Pembentukan Ring Faktor Pada Ring Deret Pangkat Teritlak Miring

Ahmad Faisol

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Email : faisol_mathunila@yahoo.co.id

Abstrak. Misalkan R ring dengan elemen satuan,$(S,\cdot,\leq)$ monoid terurut tegas, dan $\omega : S\rightarrow End(R)$ homomorfisma monoid. Himpunan semua fungsi dari S ke R dengan support Artin dan *narrow* yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan, merupakan suatu ring yang disebut Ring Deret Pangkat Teritlak Miring (RDPTM) dan dinotasikan dengan $R[[S,\omega,\leq]]$ atau$R[[S,\omega]]$. Jika I ideal dari R, maka dapat dibentuk himpunan$R/_I$yang merupakan ring yang disebut dengan ring faktor. Dalam tulisan ini dibahas tentang pembentukan ring faktor pada RDPTM, yaitu ring faktor $R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]}$ dengan $I[[S,\omega]]$ adalah ideal di RDPTM $R[[S,\omega]]$. Selanjutnya ditunjukkan juga bahwa ring faktor pada RDPTM isomorfik dengan RDPTM atas ring faktor $R/_I$, yaitu $R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]} \cong (R/_I)[[S,\mu]]$.

Kata Kunci: Ring Deret Pangkat Teritlak Miring (RDPTM), Ideal RDPTM,Ring Faktor, Isomorfima Ring.

PENDAHULUAN

Misalkan S himpunan tak kosong, relasi biner "$\leq$" pada S disebut relasi urutan parsial jika memenuhi sifat refleksif, anti simetris, dan transitif. Himpunan S yang dilengkapi dengan suatu urutan parsial "$\leq$" disebut himpunan terurut dan dinotasikan dengan $(S,\leq)$.Urutan "$\leq$" dikatakan urutan trivial jika$(\forall x,y\in S)(x\leq y\rightarrow x=y$, dan S dikatakan terurut trivial[1].

Himpunan tak kosong S dengan operasi biner yang assosiatif dan mempunyai elemen identitasdisebut monoid [3]. Himpunan $(S,\leq)$ dikatakan monoid terurut tegas jika urutannya *compatible* tegas, yaitu $(\forall s,s',t\in S)(s<s'\rightarrow st<s't)$ [6].

$(S,\leq)$ dikatakan Artin jika setiap barisan turun tegas dari anggota-anggota$S$ berhingga, dikatakan *narrow* jika setiap himpunan bagianS yang terurut trivial berhingga. Jika$(S,\leq)$ Artin dan *narrow*,maka sebarang himpunan bagian $X\subset S$ juga Artin dan *narrow* [6].

Misalkan R ring dengan elemen satuan, $(S,\leq)$monoid terurut tegas, dan $\omega: S\rightarrow End(R)$homomorfisma monoid. Untuk sebarang $s\in S$, $\omega_s$melambangkan *image* dari s atas ω, yaitu$\omega_s=\omega(s)$. Dibentuk himpunan A, yaitu himpunan semua pemetaan $f: S\rightarrow R$ dengan $\mathrm{supp}(f)=\{s\in S|f(s)\neq 0\}$Artin dan *narrow*. Dengan operasi penjumlahan biasa dan operasi pergandaan yang didefiniskan sebagai berikut:

$$(\forall f,g\in A)\ (fg: S\rightarrow R)$$

$$(fg)(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{(u,v)\in X_s(f,g)} f(u)\omega_u\big(g(v)\big) & ; X_s(f,g)\neq\emptyset\\ 0 & ; X_s(f,g)=\emptyset\end{cases}$$

dan $X_s(f,g)=\{(u,v)\in\mathrm{supp}(f)\times\mathrm{supp}(g)|s=uv\}$, himpunan Amerupakan suatu ring yang disebut Ring Deret Pangkat

Teritlak Miring (RDPTM), dandinotasikan Misalkan $r \in R$. Pemetaaan c_r , $e_s \in R[[S,\omega]]$ didefinisikan sebagai

$$c_r = \begin{cases} r & \text{jika } x = 1 \\ 0 & \text{jika } x \neq 1 \end{cases} \text{ dan}$$

$$e_s = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = s \\ 0 & \text{jika } x \neq s \end{cases}.$$

RDPTM merupakan generalisasi dari Ring Deret Pangkat Teritlak (RDPT). Sedangkan RDPT merupakan generalisasi dari ring deret pangkat formal $R[[X]]$ dan ring monoid $R[S]$, yaitu himpunan semua fungsi dari monoid terurut tegas S ke ring komutatif dengan elemen satuan R dengan $\operatorname{supp}(f) = \{s \in S | f(s) \neq 0\}$ Artin dan *narrow*, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang sama pada ring monoid $R[S]$. RDPT dinotasikan dengan $[[R^{S,\leq}]]$ atau $R[[S]]$ [6].

Jika I ideal dari ring R, maka dapat dibentuk himpunan $R/_I$ yang juga merupakan ring yang disebut dengan ring faktor dari R oleh I. Jika $\alpha: R \to T$ adalah homomorfisma ring, maka $Ker(\alpha)$ merupakan ideal dari R dan $Im(\alpha)$ merupakan subring di T. Sehingga berlaku $R/_{Ker(\alpha)} \cong Im(\alpha)$. Persamaan ini dikenal sebagai Teorema Homomorfisma Ring 1 [1].

Jika I ideal dari ring R, maka $I[[S]] = \{f \in R[[S]] | f(s) \in I, \forall s \in S\}$merupakan ideal dari RDPT$R[[S]]$[6], dan juga berlaku

$$R[[S]]/_{I[[S]]} \cong (R/_I)[[S]] \text{ [5].}$$

Jika I ideal dari ring R, maka $I[[S,\omega]] = \{f \in R[[S,\omega]] | f(s) \in I, \forall s \in S\}$ merupakan ideal dari ring $R[[S,\omega]]$ [2]. Sehingga dapat dibentuk ring faktor dari $R[[S,\omega]]$ oleh $I[[S,\omega]]$, yaitu ring $R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]}$ .Karena RDPTM merupakan generalisasi dari RDPT, maka pada penelitian ini akan diselidiki apakah ring faktor pada RDPTM isomorfik dengan RDPTM atas ring faktor $R/_I$, yaitu

$$R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]} \cong (R/_I)[[S,\mu]],$$

dengan$I$ ideal ring R, $(S,\leq)$monoid terurut tegas, $\omega: S \to End(R)$ dan $\mu: S \to End(R/_I)$ homomorfisma monoid.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut.Mendefinisikan ideal$I[[S,\omega]]$ dari RDPTM $R[[S,\omega]]$.

Membentuk ring faktor dari $R[[S,\omega]]$ oleh $I[[S,\omega]]$, yaitu ring $R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]}$.

Menyelidiki apakah berlaku $R[[S,\omega]]/_{I[[S,\omega]]} \cong (R/_I)[[S,\mu]]$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang ideal RDPTM dan pembentukan ring faktor pada RDPTM serta pembuktian isomorfis antara ring faktor pada RDPTM dengan RDPTM atas ring faktor.

***Lemma 1*[2].**

Jika I ideal dari ring R, maka $I[[S,\omega]] = \{f \in R[[S,\omega]] | f(s) \in I, \forall s \in S\}$merupakan ideal dari ring $R[[S,\omega]]$.

Bukti :

Untuk sebarang $f, g \in I[[S,\omega]]$, akan ditunjukkan $f - g \in I[[S,\omega]]$.

Jelas bahwa $f(s), g(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Karena I ideal R, maka berakibat $f(s) - g(s) = (f-g)(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Dengan kata lain terbukti $f - g \in I[[S,\omega]]$.

Untuk sebarang $r \in R$dan $f \in I[[S,\omega]]$, akan ditunjukkan $fr, rf \in I[[S,\omega]]$.

Jelas bahwa $f(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Karena I ideal R, maka untuk sebarang $r \in R$ berlaku $rf(s) = (rf)(s) \in I$dan $f(s)r = (fr)(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Dengan kata lain terbukti $fr, rf \in I[[S,\omega]]$.

Jadi terbukti bahwa jika I ideal dari ring
R, maka
$I[[S,\omega]] = \{f \in R[[S,\omega]] | f(s) \in I, \forall s \in S\}$merupakan ideal dari RDPTM$R[[S,\omega]]$.■

Dengan definisi ideal pada Lemma 1, maka dapat dibentuk ring faktor pada RDPTM, yaitu himpunan $R[[S,\omega]] \big/ I[[S,\omega]]$ terhadap operasi penjumlahan $\bar{f} + \bar{g} = \overline{f+g}$ dan operasi pergandaan $\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}$untuk setiap $\bar{f}, \bar{g} \in R[[S,\omega]] \big/ I[[S,\omega]]$.

Jika diberikan ring faktor $R/_I$, monoid terurut tegas$(S, \leq)$, dan homomorfisma monoid$\mu : S \to End(R/_I)$, maka dapat dibentuk RDPTM $(R/_I)[[S,\mu]]$.

Lemma 2.

Diberikan RDPTM $R[[S,\omega]]$ dan $(R/_I)[[S,\mu]]$. Misalkan I ideal dari ring R dan $\pi : R \to R/_I$ homomorfisma proyeksi natural. Untuk sebarang $f \in R[[S,\omega]]$ dapat dibentuk pemetaan $\pi f : S \to R/_I$ dengan $\pi f \in (R/_I)[[S,\mu]]$.

Bukti :

Akan ditunjukkan $\text{supp}(\pi f)$ Artin dan *narrow*. Karena $f \in R[[S,\omega]]$, maka jelas $\text{supp}(f)$ Artin dan *narrow*. Sehingga cukup menunjukkan $\text{supp}(\pi f) \subseteq \text{supp}(f)$, karena jika$(S, \leq)$ Artin dan *narrow*, maka sebarang himpunan bagian $X \subset S$ juga Artin dan *narrow* [6].

Ambil sebarang $s \in \text{supp}(\pi f)$, maka $(\pi f)(s) \neq 0$. Sehingga $\pi(f(s)) \neq 0$, yang berakibat $f(s) \neq 0$. Dengan kata lain diperoleh $s \in \text{supp}(f)$. Jadi terbukti $\text{supp}(\pi f) \subseteq \text{supp}(f)$, dengan kata lain terbukti $\text{supp}(\pi f)$ Artin dan *narrow*atau $\pi f \in (R/_I)[[S,\mu]]$.■

Teorema 3.

Diberikan RDPTM $R[[S,\omega]]$ dan $(R/_I)[[S,\mu]]$. Misalkan I ideal dari ring R dan $\pi : R \to R/_I$ homomorfisma proyeksi natural. Jika $\pi\omega_s = \mu_s\pi$ untuk setiap $s \in S$, maka

$$R[[S,\omega]] \big/ I[[S,\omega]] \cong (R/_I)[[S,\mu]]$$

Bukti :

Bentuk pemetaan $\tau : R[[S,\omega]] \to (R/_I)[[S,\mu]]$ dengan definisi $\tau(f) = \pi f$.Akan ditunjukkan τ*well-defined*.

Ambil sebarang $f, g \in R[[S,\omega]]$ dengan $f = g$. Sehingga diperoleh $\pi f = \pi g$, dengan kata lain $\tau(f) = \tau(g)$. Jadi terbukti τ*well-defined*. Akan ditunjukkan τ merupakan homomorfisma ring.Ambil sebarang $f, g \in R[[S,\omega]]$ dan $s \in S$, akan ditunjukkan $\tau(f+g) = \tau(f) + \tau(g)$.

$$\begin{aligned}(\tau(f+g))(s) &= (\pi(f+g))(s)\\ &= (f+g)(s) + I\\ &= (f(s)+I) + (g(s)+I)\\ &= (\pi f)(s) + (\pi g)(s)\\ &= (\pi f + \pi g)(s)\\ &= (\tau(f) + \tau(g))(s)\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\tau(f+g) = \tau(f) + \tau(g)$.Selanjutnya, akan ditunjukkan $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$.

$$\begin{aligned}(\tau(fg))(s) &= (\pi(fg))(s)\\ &= \pi(fg)(s)\\ &= \pi\left(\sum_{(u,v)\in X_s(f,g)} f(u)\omega_u(g(v))\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{(u,v)\in X_s(f,g)} \pi(f(u)\omega_u(g(v)))$$
$$= \sum_{(u,v)\in X_s(f,g)} \pi(f(u))\mu_u(\pi(g(v)))$$
$$= \sum_{(u,v)\in X_s(\pi f,\pi g)} (\pi f)(u)\mu_u((\pi g)(v))$$
$$= ((\pi f)(\pi g))(s) = (\tau(f)\tau(g))(s)$$

Jadi terbukti $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$. Akan ditunjukkan$\left({}^{R}/_{I}\right)[[S,\mu]] = \mathrm{Im}(\tau)$. Dengan kata lain akan ditunjukkan τ surjektif, yaitu untuk setiap $g \in \left({}^{R}/_{I}\right)[[S,\mu]]$, terdapat $f \in R[[S,\omega]]$ sedemikian sehingga $\tau(f) = g$.

Ambil Sebarang $g \in {}^{R}/_{I}\,[[S,\mu]]$, maka untuk setiap $s \in S$, $g(s) \in {}^{R}/_{I}$. Karena π homomorfisma proyeksi natural, maka $\pi^{-1}(g(s)) \neq \emptyset$. Selanjutnya diambil suatu $r \in \pi^{-1}(g(s))$, jelas jika $g(s) = 0$, maka $r = 0$. Misalkan terdapat $f: S \to R$ dengan $f(s) = r$, untuk setiap $s \in S$ dan $r \in \pi^{-1}(g(s))$. Akan ditunjukkan $f \in R[[S,\omega]]$, yaitu $\mathrm{supp}(f)$ Artin dan *narrow*.

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(f) &= \{s \in S | f(s) \neq 0\}\\ &= \{s \in S | r \neq 0\}\\ &= \{s \in S | g(s) \neq 0\}\\ &= \mathrm{supp}(g)\end{aligned}$$

Karena $\mathrm{supp}(g)$ Artin dan *narrow*, maka terbukti $\mathrm{supp}(f)$ Artin dan *narrow*, dengan kata lain terbukti $f \in R[[S,\omega]]$dan$\left(\tau(f)\right)(s) = (\pi f)(s) = \pi\left(f(s)\right) = \pi(r) = g(s)$ untuk setiap $s \in S$. Jadi terbukti τ surjektif.

Akan ditunjukkan $I\left[[S,\omega]\right] = \mathrm{Ker}(\tau)$.

Pertama akan ditunjukkan $I\left[[S,\omega]\right] \subseteq \mathrm{Ker}(\tau)$. Ambil sebarang $f \in I\left[[S,\omega]\right]$, maka $f(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Karena $\pi : R \to {}^{R}/_{I}$ homomorfisma proyeksi natural, maka $\pi\left(f(s)\right) = 0$. Akibatnya $\pi\left(f(s)\right) = (\pi f)(s) = \left(\tau(f)\right)(s) = 0$, dengan kata lain $\tau(f) = 0$ untuk setiap $f \in I\left[[S,\omega]\right] \subseteq R\left[[S,\omega]\right]$. Jadi terbukti $f \in Ker(\tau)$, atau $I\left[[S,\omega]\right] \subseteq \mathrm{Ker}(\tau)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan$\mathrm{Ker}(\tau) \subseteq I\left[[S,\omega]\right]$. Ambil sebarang $f \in Ker(\tau)$, maka $\tau(f) = \pi f = 0$. Dengan kata lain $\pi(f(s)) = 0$ untuk setiap $s \in S$, akibatnya $f(s) \in I$ untuk setiap $s \in S$. Jadi terbukti$f \in I\left[[S,\omega]\right]$, atau $\mathrm{Ker}(\tau) \subseteq I\left[[S,\omega]\right]$.Jadi terbukti $I\left[[S,\omega]\right] = \mathrm{Ker}(\tau)$.Dari (i), (ii), (iii), dan (iv), berdasarkan Teorema Isomorfisma Ring 1, diperoleh $R[[S,\omega]] \big/ I[[S,\omega]] \cong \left({}^{R}/_{I}\right)[[S,\mu]]$.■

KESIMPULAN

Dari hasil yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa pembentukkan ring faktor pada RDPTM dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mendefinisikan ideal di RDPTM dan terbukti bahwa ring faktor pada RDPTM isomorfik dengan RDPTM atas ring faktor R oleh I.Untuk penelitian selanjutnya, dapat diselidiki tentang teorema isomorfisma ring 2 dan 3 pada RDPTM.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A and Weintraub,S.H.(1992).*Algebra, An Aproach via Module Theory*. Springer-Verlag.

Faisol, A. (2010). Ideal Ring Deret Pangkat Teritlak Miring. *Prosiding Seminar Nasional Sains MIPA dan Aplikasinya 2010*.

Howie, J.M.(1976).An Introduction to Semigroup Theory.*Academic Press Inc., London.*

Mazurek, R. and Ziembowski, M.(2007). Uniserial Rings of Skew Generalized Power Series.*Journal of Algebra*. Vol.318, 737-764.

Minqing Xiao and Lin Xin.(2003). Ideal and Idempotents of the Rings of Generalized Power Series. *Vietnam Journal of Mathematics*, 31(3): 313-323.

Ribenboim, P.(1990).Generalized Power Series Rings. *In Lattice, Semigroups and Universal Algebra, Plenum Press, New York*, 271-277.