Syarat Perlu Suatu Modul Merupakan Modul Distributif Lemah dan Ring Endomorfisma dari Modul Distributif Lemah

Fitriani

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Email: fitriani_mathunila@yahoo.co.id

Abstrak. Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan $1 \neq 0$ dan M adalah R-modul. Submodul U dikatakan submodul distributif lemah dari M jika $U = U \cap X + U \cap Y$ untuk setiap submodul $X, Y \subseteq M$ sedemikian sehingga $X + Y = M$. R-modul M dikatakan modul distributif lemah jika setiap submodulnya merupakan submodul distributif lemah. Modul distributif lemah merupakan generalisasi dari modul distributif. Salah satu contoh modul distributif lemah adalah modul duo. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai syarat perlu suatu modul merupakan modul distributif lemah dan sifat ring endomorfisma dari modul distributif lemah

Kata Kunci: Modul Distributif Lemah, Modul Distributif, Modul Duo, Ring Endomorfisma.

PENDAHULUAN

Misalkan R ring dan M, N adalah R-modul. Fungsi $f: M \to N$ merupakan homomorfisma R-modul jika $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ dan $f(rm) = rf(m)$, untuk setiap $m_1, m_2, m \in M$ dan $r \in R$. Himpunan semua homomorfisma R-modul dari M ke N dinotasikan dengan $Hom_R(M, N)$. Jika $M = N$, maka $Hom_R(M, N)$ ditulis dengan $End_R(M)$. Dengan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi, $Hom_R(M, M) = End_R(M)$ merupakan ring, yang dinamakan ring endomorfisma dari M [1].

Dalam kaitannya dengan endomorfisma dari R-modul M didefinisikan submodul *fully invariant* sebagai berikut.Misalkan R ring dan M adalah R-modul kanan. Submodul N dari M dikatakan *fully invariant* jika $f(N)$ termuat di N untuk setiap $f \in End_R(M)$. Jika $S = End_R(M)$ adalah ring endomorfisma dari M, maka M adalah (S, R)-bimodul dan N submodul dari MR-modul kanan merupakan submodul *fully invariant* jika dan hanya jika N merupakan sub-bimodul dari M [2]. Untuk setiap R-modul M, 0 dan M jelas merupakan submodul *fully invariant* dari M. Jika setiap submodul dari M merupakan submodul *fully invariant*, maka R-modul M disebut modul duo [2].

R-modul M dikatakan uniserial jika untuk setiap L dan N yang merupakan submodul dari M, berlaku $L \subseteq N$ atau $N \subseteq L$[2]. Dalam [2] telah ditunjukkan modul uniserial yang memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) merupakan modul duo.

Secara umum, submodul dari modul duo bukan merupakan modul duo. Demikian halnya dengan bayangan homomorfisma dari modul duo. Salah satu kondisi yang harus dipenuhi agar setiap submodul dari modul duo berkaitan dengan modul quasi injektif. Sedangkan, kondisi yang harus dipenuhi modul duo agar bayangan homomorfismanya merupakan modul duo berkaitan dengan modul quasi proyektif. Modul quasi injektif didefinisikan sebagai berikut. Misalkan M dan U adalah R-modul. U dikatakan M-injektif jika untuk setiap monomorfisma $f: K \to M$ dan homomorfisma $g: K \to U$, terdapat homomorfisma $h: U \to M$ sedemikian sehingga $h \circ g = f$, yaitu diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

R-modul U dikatakan quasi injektif jika U adalah U-injektif [3].

Selanjutnya, modul quasi proyektif didefinisikan sebagai berikut. Misalkan M dan P adalah R-modul. P dikatakan M-proyektif jika untuk setiap epimorfisma $g: M \to N$ dan homomorfisma $h: P \to N$, terdapat homomorfisma $k: P \to M$ sedemikian sehingga $g \circ k = h$, yaitu diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

R-modul P dikatakan quasi-proyektif jika P adalah P-proyektif [3].

R-modul M dikatakan π-proyektif jika $M = X + Y$, maka terdapat $\alpha \in End_R(M)$ sedemikian sehingga $\alpha(M) \subseteq X$ dan $(1 - \alpha)(M) \subseteq Y$ [4].

Jika M adalah R-modul dan U submodul M, maka U dikatakan submodul distributif dari M jika $U = U \cap X + U \cap Y$ untuk setiap submodul $X, Y \subseteq M$. R-modul M dikatakan modul distributif, jika setiap submodul dari M merupakan submodul distributif [4].

Sebagai perumuman dari modul distributif, didefinisikan definisi modul distributif lemah sebagai berikut. Submodul U dikatakan submodul distributif lemah dari M jika $U = U \cap X + U \cap Y$ untuk setiap submodul $X, Y \subseteq M$ sedemikian sehingga $X + Y = M$. R-modul M dikatakan modul distributif lemah jika setiap submodulnya merupakan submodul distributif lemah[4]. Selanjutnya, ring R dikatakan distributif lemah jika R sebagai R-modul kiri merupakan modul distributif lemah. Modul distributif lemah merupakan generalisasi dari modul distributif.

Beberapa karakterisasi modul distributif telah dibahas pada [5] dan pada [6] telah dibahas beberapa sifat modul distributif dalam kaitannya dengan modul perkalian.

Dalam tulisan ini, akan dibahas syarat perlu suatu modul merupakan modul distributif lemah.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Langkah pertama yang dilakukan adalah membahas sifat-sifat modul duo sebagai contoh modul distributif lemah. Langkah selanjutnya adalah menentukan syarat perlu suatu modul merupakan modul distributif lemah. Sebagai dasar dalam langkah ini adalah sifat-sifat modul distributif dan modul duo yang merupakan contoh dari modul distribuif lemah yang telah dilakukan pada langkah sebelumnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Modul Distributif Lemah

Sebelum membahas modul distributif lemah dan sifat-sifatnya, berikut ini akan disajikan beberapa sifat-sifat dari modul duo yang akan digunakan dalam pembahasan mengenai modul distributif lemah.

***Lemma* 1**[2]*Misalkan R ring. R-modul kanan M merupakan modul duo jika dan hanya jika setiap endomorfisma f dari M dan setiap $m \in M$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(m) = mr$.*

Bukti. Misalkan R ring dan M adalah R-modul kanan yang merupakan modul duo. Oleh karena itu, setiap submodul dari M adalah submodul *fully invariant*. Ambil $N = mR$ submodul dari M. Karena M modul duo, maka N merupakan submodul *fully invariant*. Oleh karena itu, untuk setiap endomorfisma f dari M. $f(mR)$ termuat di R. Sehingga, untuk setiap $m \in M$ terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga$f(m) = mr$.

Sebaliknya, misalkan untuk setiap endomorfisma f di M dan untuk setiap $m \in M$ terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga$f(m) = mr$. Hal ini menunjukkan bahwa $f(N)$ termuat di N untuk setiap submodul N dari M. Akibatnya, setiap submodul dari M merupakan submodul *fully invariant* dan terbukti M adalah modul duo.■

Dalam Proposisi berikut akan ditunjukkan bahwa hasil tambah langsung dari modul duo juga merupakan modul duo.

Proposisi **2**[2]*Setiap hasil tambah langsung dari modul duo merupakan modul duo.*

Bukti. Diberikan M merupakan modul duo dan M', M'' adalah submodul dari M sedemikian sehingga $M = M' \oplus M''$. Misalkan $p: M \to M'$ adalah pemetaan proyeksi kanonik dan $i: M' \to M$ adalah pemetaan inklusi. Misalkan f adalah sebarang endomorfisma dari M' dan N sebarang submodul dari M'. Akan ditunjukkan N merupakan submodul *fully invariant*. Perhatikan bahwa $g = i \circ f \circ p$ merupakan endomorfisma pada M seperti terlihat pada diagram berikut.

Untuk setiap $n \in N$, $g(n) = (i \circ f \circ p)(n) = f(n)$yang berarti $g(N) = f(N)$. Karena M merupakan modul duo, maka N merupakan submodul *fully invariant*. Akibatnya $g(N) = f(N) \subseteq N$. Hasil ini menunjukkan bahwa setiap submodul dari M' merupakan submodul *fully invariant*. Akibatnya, M' merupakan modul duo. ■

Secara umum, submodul dari modul duo bukan merupakan modul duo. Dalam Proposisi berikut akan ditunjukkan bahwa setiap submodul dari modul quasi injektif merupakan modul duo.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f"] & M' \arrow[r, "i"] & M \\
M \arrow[u, "p"] \arrow[urr, "g = i \circ f \circ p"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposisi **3**[2]*Diberikan M merupakan modul duo. Jika M adalah modul quasi injektif, maka setiap submodul dari M adalah modul duo.*

Bukti. Misalkan M adalah modul duo yang merupakan modul quasi injektif, L sebarang submodul dari M dan f adalah endomorfisma dari L. Diberikan N adalah sebarang submodul dari L. Misalkan $i: L \longrightarrow M$ adalah pemetaan inklusi yang bersifat injektif. Karena M merupakan modul quasi injektif, maka terdapat $g: M \longrightarrow L$ sedemikian sehingga $g \circ i = f$, yaitu diagram berikut komutatif.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Dengan mengambil $f' = i \circ g$, maka f' merupakan endomorfisma pada M. Diberikan sebarang $n \in N$, maka $f'(n) = (i \circ g)(n) = i\big(g(n)\big) = g(n) = (g \circ i)(n) = f(n)$. Sehingga, $f'(N) = f(N)$. Selanjutnya, karena M adalah modul duo, diperoleh $f(N) = f'(N) \subseteq N$. Hasil ini menunjukkan bahwa N adalah submodul *fully invariant* dari L. Karena pengambilan N sebarang, dapat disimpulkan bahwa setiap submodul dari L merupakan submodul *fully invariant*. Sehingga, terbukti L adalah modul duo.■

Selanjutnya, dalam kaitannya dengan modul quasi proyektif, dalam Proposisi berikut akan ditunjukkan bahwa setiap bayangan homomorfisma dari modul quasi proyektif merupakan modul duo.

***Proposisi* 4**[2] *Diberikan M merupakan modul duo. Jika M adalah modul quasi proyektif, maka setiap bayangan homomorfisma dari M merupakan modul duo.*

Bukti. Diberikan M adalah modul duo yang merupakan modul quasi proyekif. Misalkan K adalah submodul dari M, H adalah submodul dari M yang memuat K dan g adalah sebarang endomorfisma dari M/K. Misalkan $p: M \longrightarrow M/K$ adalah pemetaan proyeksi natural. Karena M adalah modul quasi proyektif, maka terdapat $\hat{g}: M/K \longrightarrow M$ sedemikian sehingga $p \circ \hat{g} = g$, yaitu diagram berikut bersifat komutatif.

$$\begin{tikzcd} & M/K \arrow[dl, dashed, "\hat{g}"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "p"] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dengan mengambil $g^* = \hat{g} \circ p$, maka g^* adalah endomorfisma pada M. Perhatikan bahwa untuk setiap $m \in M$, $g(m+K) = g^*(m) + K$. Karena M merupakan modul duo, maka $g^*(H)$ termuat di H. Oleh karena itu, $g(H/K)$ termuat di H/K. Hasil ini menunjukkan bahwa H/K merupakan submodul *fully invariant*. Karena pengambilan H/K sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap submodul dari M/K merupakan submodul *fully invariant.* Sehingga, M/K adalah modul duo. Dengan kata lain, bayangan homomorfisma dari modul duo merupakan modul duo. ■

Bayangan homomorfisma dari modul distributif lemah merupakan modul distributif lemah seperti ditunjukkan dalam Lemma berikut.

***Lemma* 5**[4] *Jika M merupakan modul distributif lemah dan $f: M \to N$ adalah homomorfisma, maka Im f merupakan modul distributif lemah.*

Bukti. Diberikan M adalah modul distributif lemah dan $f: M \to N$ merupakan homomorfisma modul. Berdasarkan Teorema Fundamental Isomomorfisma Modul, diperoleh $Im\, f \cong M/K$, dengan $K = Ker\, f$. Misalkan $U/K + V/K = M/K$ untuk suatu $U, V \subseteq M$ dan $X/K \subseteq M/K$. Karena $U/K + V/K = M/K$, maka diperoleh $U + V = M$. Berdasarkan hipotesis, M merupakan modul distributif lemah. Oleh karena itu, diperoleh $X = X \cap U + X \cap V$. Sehingga,

$$X/K = (X \cap U + X \cap V)/K$$
$$= [(X/K) \cap (U/K)] + [(X/K) \cap (V/K)].$$

Jadi, untuk setiap $X/K \subseteq M/K$, $X/K = [(X/K) \cap (U/K)] + [(X/K) \cap (V/K)]$,untuk setiap $U/K, V/K \subseteq M/K$ dengan $U/K + V/K = M/K$. Oleh karena itu, setiap submodul dari M/K merupakan submodul distributif lemah. Akibatnya, $Im\, f \cong M/K$ merupakan modul distributif lemah.■

Dalam lemma berikut akan ditunjukkan bahwa setiap submodul *fully invariant* dari modul π-proyektif merupakan submodul distributif lemah.

***Lemma* 6**[4] *Jika Madalah modul π-proyektif, maka setiap submodul fully invariant dari Mmerupakan submodul distributif lemah dari M.*

Bukti. Diberikan M adalah modul π-proyektif dan U merupakan submodul *fully invariant* dari M. Misalkan $M = X + Y$. Karena M adalah modul π-proyektif, maka terdapat $f \in End_R(M)$ sedemikian sehingga $f(M) \subseteq X$ dan $(1-f)(M) \subseteq Y$. Selanjutnya, U yang merupakan submodul *fully invariant* akan berakibat $f(U) \subseteq U \cap X$dan$(1-f)(U) \subseteq U \cap Y$.Oleh karena itu, $U \subseteq f(U) + (1-f)(U) \subseteq U \cap X + U \cap Y$. Jadi,$U = U \cap X + U \cap Y$, dengan $X + Y = M$. Terbukti U merupakan submodul distributif lemah dari M. ■

Salah satu akibat dari Lemma 6 adalah setiap modul duo yang merupakan modul π-proyektif adalah modul distributif lemah sebagai berikut.

***Akibat* 7**[4]*Setiap modul duo yang merupakan modul π-proyektif merupakan modul distributif lemah.*

Bukti. Diberikan R-modul M adalah modul duo yang merupakan modul π-proyektif.Karena setiap submodul dari M merupakan submodul *fully invariant*, maka berdasarkan Lemma 6, setiap submodul dari M merupakan submodul distributif lemah. Sehingga, terbukti bahwa M merupakan modul disributif lemah. ■

***Teorema* 8.** *Misalkan M adalah modul π-proyektif. R-modul kanan M merupakan modul distributif lemah jika dan hanya jika setiap endomorfisma f dari M dan setiap $m \in M$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(m) = mr$.*

Bukti. Berdasarkan Lemma 1, R-modul kanan M merupakan modul duo jika dan hanya jika setiap endomorfisma f dari M dan setiap $m \in M$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(m) = mr$. Sehingga dari Akibat 7, diperoleh R-modul kanan M merupakan modul distributif lemah jika dan hanya jika setiap endomorfisma f dari M dan setiap $m \in M$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(m) = mr$.■

***Akibat* 9.** *Diberikan M adalah modul quasi injektif dan π-proyektif. Jika M adalah modul duo, maka setiap submodul dari M adalah modul distributif lemah.*

Bukti. Misalkan M adalah modul quasi injektif. Berdasarkan Proposisi 3, setiap submodul dari M merupakan modul duo. Sehingga, dengan menggunakan Akibat 6, diperoleh setiap submodul dari M merupakan modul distributif lemah.■

***Teorema* 10.** *Misalkan M adalah modul π-proyektif. Jika M adalah modul uniserial yang memenuhi kondisi rantai naik (ascending chain condition) pada submodul siklik, maka M merupakan modul distributif lemah.*

Bukti. Diberikan M adalah modul uniserial dan M memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*). Misalkan $m \in M$ dengan $m \neq 0$ dan f sebarang endomorfisma pada M. Akan ditunjukkan M adalah modul duo. Andaikan $f(m) \notin mR$, maka $m \in f(m)R$. Sehingga, $m = f(m)r$, untuk suatu $r \in R$. Akibatnya,$f^n(m) = f^{n+1}(m)r$untuk setiap bilangan bulat positif n. Diperoleh, $mR \subseteq f(m)R \subseteq f^2(m) \subseteq \cdots$

Karena M memenuhi kondisi rantai naik, maka terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga $f^k(m)R = f^{k+1}(m)R$.Jadi, terdapat $s \in R$ sedemikian sehingga$f^{k+1}(m) = f^k(m)s = f^k(ms)$.
Diperoleh,$f^k\big(f(m)\big) = f^k(ms)$atau $f^k\big(f(m)\big) - f^k(ms) = 0$.

Hasil ini menunjukkan $f(m) - ms \in Ker(f^k)$. Andaikan $mR \subseteq Ker(f^k)$, maka $f^k(m) = 0$. Oleh karena itu, $m = f^k(m)r^k = 0$. Hal ini menimbulkan kontradiksi. Jadi, haruslah $Ker(f^k) \subseteq mR$. Oleh karena itu, $f(m) - ms \in mR$.Sehingga, $f(m) \in mR$.

Hasil ini menimbulkan kontradiksi dengan $f(m) \notin mR$. Jadi, haruslah terpenuhi $f(m) \in mR$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1, M merupakan modul duo. Sehingga, berdasarkan Akibat 7, M merupakan modul distributif lemah. ■

Dalam Lemma berikut akan ditunjukkan bahwa hasil tambah langsung dari modul distributif lemah yang tak nol bukan merupakan modul distributif lemah.

***Lemma* 11**[4] *Jika M adalah sebarang modul tak nol, maka $M \oplus M$ bukan merupakan modul distributif lemah.*

Bukti. Diberikan sebarang $m \in M$, dengan $m \neq 0$. Pilih $N = R(m,m)$ yang merupakan submodul dari $M \oplus M$. Akan ditunjukkan N bukan merupakan submodul distributif lemah. Perhatikan bahwa $N \cap (M \oplus \{0\}) = \{(0,0)\} = N \cap (\{0\} \oplus M)$. Oleh karena itu, N bukan merupakan submodul distributif lemah. Akibatnya, $M \oplus M$ bukan merupakan modul distributif lemah. ■

Ring Endomorfisma Dari Modul Distributif Lemah

Misalkan M_1, M_2 adalah submodul dari R-modul M. Jika $M = M_1 + M_2$ dan $M_1 \cap M_2 = 0$, maka M_1 dan M_2 dikatakan hasil tambah langsung (*direct summand*) dari M, ditulis $M = M_1 \oplus M_2$ [4].

R-modul M dikatakan memenuhi *SSP* (*Summand Sum Property*)jika jumlahan dari sebarang hasil tambah langsung dari M merupakan hasil tambah langsung dari M [4]. Jadi, jika R-modul M memenuhi *SSP* dan U, V merupakan hasil tambah langsung dari M, maka $U + V$ merupakan hasil tambah langsung dari M.

R-modul M dikatakan memenuhi sifat *summand intersection* jika irisan dari sebarang hasil tambah langsung dari M merupakan hasil tambah langsung dari M [4].Jadi, jika R-modul M memenuhi sifat *summand intersection* dan U, V merupakan hasil tambah langsung dari M, maka $U \cap V$ merupakan hasil tambah langsung dari M.

Dalam Lemma berikut akan ditunjukkan bahwa modul distributif lemah memenuhi *SSP* (*summand sum property*) dan sifat *summand intersection*.

Lemma 2.1.[4]*Modul distributif lemah memenuhi Summand Sum Property (SSP) dan sifat summand intersection*.

Bukti. Misalkan R-modul M merupakan modul distributif lemah. Akan ditunjukkan M memenuhi sifat *summand intersection*. Jika X dan Y adalah hasil tambah langsung dari M, maka $M = X \oplus X' = Y \oplus Y'$, untuk suatu X', Y' submodul dari M. Karena M merupakan modul distributif lemah, maka $X = (X \cap Y) \oplus (X \cap Y')$. Sehingga, diperoleh

$M = (X \cap Y) \oplus (X \cap Y') \oplus X' (1)$

Misalkan $Z = (X \cap Y') \oplus X'$. Jadi, Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai $M = (X \cap Y) \oplus Z$. Sehingga, terbukti $X \cap Y$ merupakan hasil tambah langsung dari M. Akibatnya, M memenuhi sifat *summand intersection*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan M memenuhi *SSP* (*summand sum property*). Misalkan X dan Y adalah hasil tambah langsung dari M, maka $M = X \oplus X' = Y \oplus Y'$, untuk suatu X', Y' submodul dari M. Karena M merupakan modul distributif lemah, maka $X = (X \cap Y) \oplus (X \cap Y')$ dan $Y = (Y \cap X) \oplus (Y \cap X')$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} X + Y &= (X \cap Y) + (X \cap Y') + (Y \cap X) \\ &\quad + (Y \cap X') \\ &= (X \cap Y + X' \cap Y) + X \cap Y' \\ &= Y \oplus X \cap Y'. \end{aligned}$$

Jadi, $M = Y \oplus Y' = Y \oplus Y' \cap X \oplus Y' \cap X'$
$= (X + Y) \oplus Y' \cap X'.$

Hasil ini menunjukkan bahwa $X + Y$ merupakan hasil tambah langsung dari M. Jadi, terbukti M memenuhi *SSP*. ■

Dalam Proposisi berikut diberikan sifat ring endomorfisma dari modul distributif lemah.

Teorema **2.2**[4]*Jika M merupakan modul distributif lemah dan $e, f \in End(M)$ adalah endomorfisma idempoten, maka $Im(ef) = Im(fe) = Im(e) \cap Im(f)$ dan fe adalah elemen idempoten.*

Bukti. Karena e dan f merupakan endomorfisma idempoten, maka:

$M = e(M) \oplus (1 - e)(M) (2)$

dan

$M = f(M) \oplus (1 - f)(M) (3)$

Karena M merupakan modul distributif lemah, maka

$e(M) = e(M) \cap f(M) \oplus e(M) \cap (1 - f)(M)$dan

$f(M) = f(M) \cap e(M) \oplus f(M) \cap (1 - e)(M)$

Dengan menerapkan f pada $e(M)$ diperoleh:

$$f(e(M)) = f(e(M) \cap f(M)) = e(M) \cap f(M)$$

Selanjutya, dengan menerapkan e pada f(M) diperoleh:

$e(f(M)) = e(f(M) \cap e(M)) = f(M) \cap e(M).$

Dari sini diperoleh

$Im(fe) = e(M) \cap f(M) = Im(e) \cap Im(f)$

dan $Im(ef) = e(M) \cap f(M) = Im(e) \cap Im(f).$

Sehingga, $Im(fe) = Im(ef)$. Dari persamaan (2) dan (3), diperoleh $Im(e)$ dan $Im(f)$ merupakan hasil tambah langsung dari M. Sehingga berdasarkan Lemma 7, $Im(e) \cap Im(f)$ juga merupakan hasil tambah langsung dari M.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa fe merupakan elemen idempoten di $End(M)$. Diberikan sebarang $m \in M$. Karena $Im(fe) = Im(e) \cap Im(f)$, maka $efe(m) = e\big(fe(m)\big) = f\big(e(m)\big) \in Im(f)$.Oleh karena itu,$fefe(m) = e\big(efe(m)\big) = efe(m) = fe(m)$.Hasil ini menunjukan bahwa fe merupakan endomorfisma idempoten dari M. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan beberapa karakterisasi modul distributif lemah sebagai berikut. Bayangan homomorfisma dari modul distributif lemah merupakan modul distributif lemah, setiap submodul *fully invariant* dari modulπ-proyektif merupakan submodul distributif lemah dari modul tersebut. Selain itu, jika M adalah modul π-proyektif, maka R-modul kanan M merupakan modul distributif lemah jika dan hanya jika setiap endomorfisma f dari M dan setiap $m \in M$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(m) = mr$.

Selanjutnya, setiap submodul dari modul duo yang merupakan modul quasi injektif dan π-proyektif adalah modul distributif lemah. Dalam kaitannya dengan modul uniserial, setiap modul uniserial yang merupakan modul π-proyektif yang memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) pada submodul siklik merupakan modul distributif lemah. Berdasarkan hasil dan pembahasan juga diperoleh bahwa jika M adalah sebarang modul tak nol, maka $M \oplus M$ bukan merupakan modul distributif lemah.Modul distributif lemah memenuhi *Summand Sum Property* (SSP)dan sifat *summand intersection*. Selanjutnya, jika M merupakan modul distributif lemah dan$e, f \in End(M)$adalah endomorfisma idempoten, maka

$$Im(ef) = Im(fe) = Im(e) \cap Im(f)$$

dan *fe* adalah elemen idempoten.

Penelitian ini masih dapat dilanjutkan dengan menyelidiki karakterisasi lain dari modul distributif lemah dan aplikasi dari modul distributif lemah, diantaranya dalam modul bersuplemen dan penentuan amplop proyektif (*projective cover*) dari suatu modul.

DAFTAR PUSTAKA

Wisbauer, R. (1991). *Foundation of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach. Philadelphia, USA.

Harmanci,A.,A.C and Smith, P.,F., (2006) Duo Modules. *Glasgow Mathematical Journal Trust* 48(2006) p 533-545.

Clark, J., dkk. (2006). *Lifting Modules(Supplement and Projectivity in Module Theory)*, Birkhauser Verlag, Basel Switzerland.

Buyukasik, Engin and Demirci, Y., M. (2010). Weakly distributive modules. Applications to supplement submodules. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* Vol. 120, No. 5, November 2012 p. 525 – 534.

Zamani, N.(2009) On Torsion Free Distributive Modules. *Contributions to Algebra and Geometry* Vol. 50(2009), No. 2 p 327-336.