J. Sains MIPA, Agustus 2009, Vol. 15, No. 2, Hal.: 119 - 124
ISSN 1978-1873

HOMOMORFISMA RING DERET PANGKAT TERITLAK MIRING

Ahmad Faisol

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Bandar Lampung 35145 Indonesia
Email: faisol_mathunila@yahoo.co.id

Diterima 19 Juni 2009, disetujui untuk diterbitkan 28 Agustus 2009

ABSTRACT

Let *R* be a ring, $(S,\cdot,\leq)$ a strictly ordered monoid and $\omega : S \to End(R)$ a monoid homomorphism. Constructed $R[[S,\omega]]$, i.e., the set of all functions from *S* to *R* whose support is artinian and narrow. With pointwise addition and the skew convolution multiplication, $R[[S,\omega]]$ becomes a ring called the skew generalized power series rings. In this research we will investigate about homomorphism of skew generalized power series rings.

Keywords: *ordered monoid*, *artinian*, *narrow*, *ring homorphism*, *skew generalized power series rings*.

1. PENDAHULUAN

Ring polinomial *R*[*X*] didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi dari $\mathbb{Z}^+$ (bilangan bulat non negatif) ke *R* (ring dengan elemen satuan) dengan syarat $f(n) \neq 0$ hanya untuk berhingga banyak $n \in \mathbb{Z}^+$, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan biasa dan pergandaan distributif. Selanjutnya, ring polinomial *R*[*X*] digeneralisasi menjadi ring deret pangkat formal *R*[[*X*]], yaitu dengan cara menghilangkan syarat $f(n) \neq 0$ hanya untuk berhingga banyak $n \in \mathbb{Z}^+$ [1]. Ring polinomial *R*[*X*] juga dapat digeneralisasi menjadi ring monoid *R*[*S*], yaitu himpunan semua fungsi dari monoid *S* ke *R* (ring dengan elemen satuan) dengan syarat $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ berhingga, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan biasa dan pergandaan konvolusi.

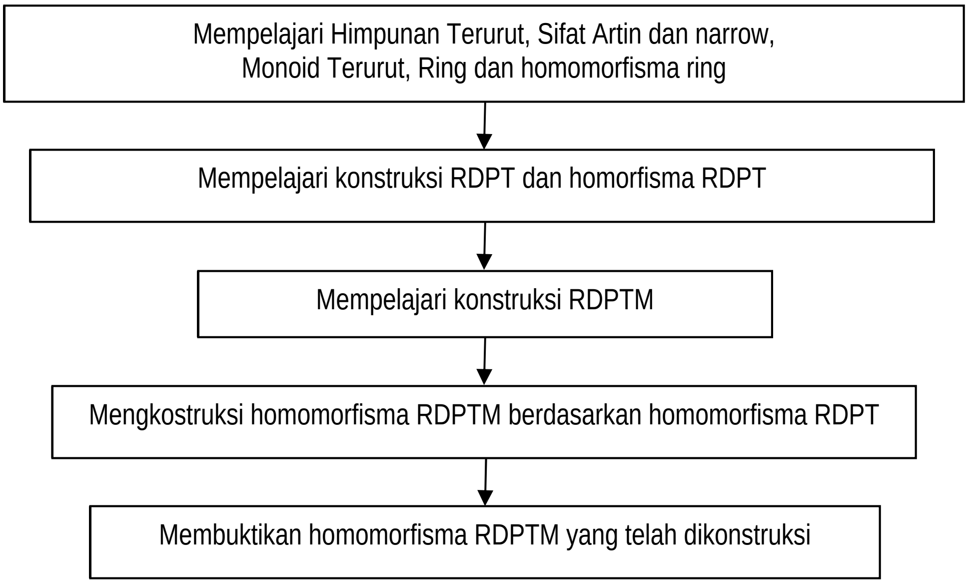
Selanjutnya, Ribenboim[6] mengkonstruksi ring deret pangkat teritlak (*generalized power series rings*) *R*[[*S*]] yang merupakan generalisasi dari ring deret pangkat formal *R*[[*X*]] dan ring monoid *R*[*S*], yaitu himpunan semua fungsi dari monoid terurut tegas *S* ke *R* (ring dengan elemen satuan) dengan syarat $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ Artin dan *narrow*, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang sama pada ring monoid *R*[*S*]. Ribomboim[7] juga mengkonstruksi homomorfisma ring deret pangkat teritlak (RDPT).

Mazurek dan Ziembowski[5] mengkonstruksi ring baru yang merupakan generalisasi dari ring deret pangkat teritlak *R*[[*S*]] dengan cara menambahkan suatu homomorfisma monoid $\omega : S \to End(R)$, yang digunakan untuk merubah operasi pergandaan konvolusi pada *R*[[*S*]]. Selanjutnya ring baru ini disebut ring deret pangkat teritlak miring (*skew generalized power series rings*) dan dinotasikan dengan $R[[S,\omega]]$ atau $R[[S,\omega,\leq]]$.

Dari uraian di atas, telah dijelaskan bahwa ring deret pangkat teritlak (RDPT) *R*[[*S*]] merupakan bentuk khusus dari ring deret pangkat teritlak miring (RDPTM), sehingga pada penelitian ini akan dikonstruksi homomorfisma RDPTM berdasarkan homomorfisma RDPT yang sudah ada.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan himpunan terurut, monoid terurut, sifat Artin dan *narrow*, ring deret pangkat teritlak (RDPT), homomorfisma RDPT, dan ring deret pangkat teritlak miring (RDPTM). Alur penelitian secara utuh digambarkan pada diagram (Gambar 1) di bawah ini.



Gambar 1. Diagram alur penelitian

Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang himpunan terurut, sifat Artin dan *narrow*, monoid terurut, teori ring, dan homomorfisma ring . Konsep-konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu untuk memahami konstruksi RDPT dan RDPTM. Berikut ini akan disajikan beberapa definisi, lemma dan teorema yang terkait dengan himpunan terurut, sifat Artin dan *narrow*, monoid terurut, teori ring, dan homomorfisma ring.

Definisi 1 (Himpunan Terurut)[1)]
Diberikan himpunan tak kosong *S*.

a. Relasi biner "≤" pada *S* disebut relasi urutan parsial jika memenuhi:
   i. "≤" refleksif : $(\forall x \in S) x \le x$.
   ii. "≤" anti simetris : $(\forall x, y \in S)(x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y)$
   iii. "≤" transitif : $(\forall x, y, z \in S)(x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z)$
b. Relasi urutan parsial "≤" pada S disebut relasi urutan total, jika untuk sebarang $x, y \in S$ berlaku $x \le y$ atau $y \le x$.
c. Suatu elemen $m \in S$ disebut elemen minimal jika $(\forall x \in S)(x \le m \Rightarrow m = x)$.
d. Himpunan $S \ne \varphi$ yang dilengkapi dengan suatu urutan parsial disebut himpunan terurut (*ordered set*). Untuk selanjutnya notasi $(S, \le)$ menyatakan *S* himpunan terurut terhadap urutan parsial ≤.

Definisi 2 (Artin dan *narrow*)[6)]
Diketahui $(S, \le)$ himpunan terurut. Himpunan terurut $(S, \le)$ dikatakan Artin jika setiap barisan turun tegas dari elemen-elemen *S* selalu berhingga. Himpunan terurut $(S, \le)$ dikatakan Noether jika setiap barisan naik tegas dari elemen-elemen *S* selalu berhingga. Untuk selanjutnya notasi $(z_i)_{i \ge 1}$ menyatakan barisan secara umum baik hingga maupun takhingga.

Teorema 1 (Artin dan *narrow*)[2)]
Jika $(S, \le)$ himpunan terurut maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. *S* Artin dan *narrow*.
2. Jika $(s_n)_{n \ge 1}$ barisan elemen-elemen *S* maka terdapat $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, sehingga $s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_3} < \cdots$

3. Jika $(s_n)_{n\geq 1} \subseteq S$ maka terdapat $n_1 < n_2$, sehingga $s_{n_1} < s_{n_2}$.

Definisi 3 (Monoid)[4]

Groupoid $(S,\cdot)$ artinya himpunan tak kosong *S* dengan operasi biner $"\cdot"$ terdefinisi. Dengan kata lain, dipunyai pemetaan $\cdot : S \times S \to S$. Selanjutnya $(S,\cdot)$ disebut semigrup jika $"\cdot"$ bersifat assosiatif, yaitu:

$$(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)(s_1 \cdot s_2)\cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3).$$

Jika $(S,\cdot)$ mempunyai sifat tambahan $(\forall s_1, s_2 \in S)(s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot s_1)$, maka $(S,\cdot)$ disebut semigrup komutatif. Jika terdapat elemen 1 di dalam *S* sedemikian sehingga $(\forall s \in S)(s \cdot 1 = 1 \cdot s = s)$, maka 1 disebut elemen identitas di dalam *S* dan *S* disebut semigrup dengan identitas atau monoid.

Definisi 4 (Monoid Terurut)[7]

Himpunan terurut $(S,\leq)$ dikatakan monoid terurut jika *S* monoid dan "≤" relasi urutan kompatibel yakni jika $(\forall s, s', t \in S)(s \leq s' \Rightarrow st \leq s't)$ dan $(S,\leq)$ dikatakan monoid terurut tegas jika urutannya kompatibel tegas, yakni jika $(\forall s, s', t \in S)(s < s' \Rightarrow st < s't)$.

Definisi 5 (Ring)[3]

Ring $(R,+,\cdot)$ adalah himpunan tak kosong *R* yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yang disebut penjumlahan dan pergandaan, yang terdefinisi di dalam *R* sedemikian sehingga sifat-sifat berikut terpenuhi :

1. $(R,+)$ grup komutatif (abelian).
2. Pergandaan $(\cdot)$ bersifat assosiatif.
3. Untuk setiap $a,b,c \in R$, sifat distributif kiri, $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ dan sifat distributif kanan $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$ terpenuhi.

Definsi 6 (Homomorfisma Ring)[3]

Diberikan ring *R* dan *R'*. Pemetaan $\phi : R \to R'$ merupakan homomorfisma jika memenuhi :

i. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$
ii. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

Untuk setiap $a, b \in R$.

Setelah mempelajari konsep-konsep dasar diatas, langkah berikutnya adalah mempelajari konstruksi RDPT dan homomorfisma RDPT. Pertama akan disajikan tentang konstruksi RDPT.

Diketahui *R* sebuah ring dengan elemen satuan dan $(S,\cdot,\leq)$ monoid terurut tegas. Dibentuk suatu himpunan R^S, yakni himpunan semua pemetaan $f : S \to R$. Untuk $f \in R^S$, support *f* didefinisikan sebagai $\operatorname{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$. Kemudian dibentuk $A = \{f \in R^S \mid \operatorname{supp}(f)$ Artin dan *narrow*$\}$.

Untuk sebarang $s \in S$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A$, himpunan $X_s(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \operatorname{supp}(f_1) \times \cdots \times \operatorname{supp}(f_n) \mid s = x_1 x_2 \ldots x_n\}$ berhingga.

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan pada *A* :

$(+)$: $(\forall f, g \in A)(f + g : S \to R)$ $\quad (f+g)(s) = f(s) + g(s)$

$(\cdot)$: $(\forall f, g \in A)(f \cdot g : S \to R)$

$$(f\cdot g)(s) = \sum_{(x,y)\in X_s(f,g)} f(x)g(y)$$

Dengan dua operasi di atas, Ribemboim[6] telah membuktikan bahwa *A* merupakan ring. Ring ini selanjutnya disebut "*Ring Deret Pangkat Teritlak* (*RDPT*)", dan disimbolkan dengan $[[R^{S,\leq}]]$ atau $R[[S]]$.

Selanjutnya akan dikonstruksi homomorfisma RDPT. Diketahui R dan R' ring, $(S,\le)$ dan $(S',\le')$ monoid terurut tegas, A dan A' RDPT. Misalkan $\alpha : R \to R'$ homomorfisma ring dan $\phi : (S,\le) \to (S',\le')$ homomorfisma tegas.

Untuk setiap $s \in S$, $\varphi^{-1}(\varphi(s)) \subseteq (S,\le)$ terurut trivial. Jika $f \in A$ maka $\mathrm{supp}(f) \cap \varphi^{-1}(\varphi(S))$ berhingga. Selanjutnya didefiniskan $f' : S' \to R'$ dengan

$$\begin{cases} f'(\varphi(s)) = \alpha \sum\limits_{t \in \varphi^{-1}(\varphi(s))} f(t) & \text{untuk setiap } s \in S \\ f'(t') = 0 & \text{jika } t' \notin \varphi(S) \end{cases}$$

Di sisi lain, jika φ injektif maka $f'(\varphi(s)) = \alpha f(s)$ untuk setiap $s \in S$. Selanjutnya didapat $\mathrm{supp}(f') \subseteq \varphi(\mathrm{supp}(f))$, yang berakibat $\mathrm{supp}(f')$ Artin dan *narrow* subset $(S',\le')$. Dengan kata lain $f' \in A' = [[R'^{S',\le'}]]$. Dan ini mendefinisikan pemetaaan $\alpha^{\varphi} : A \to A'$.

Ribemboim[7] telah membuktikan bahwa pemetaan tersebut merupakan homomorfisma ring.

Langkah terakhir, mempelajari konstruksi RDPTM dan mengkonstruksi homomorfisma RDPTM berdasarkan homorfisma RDPT yang sudah ada dan kemudian membuktikan homomorfisma RDPTM yang telah dikonstruksi. Langkah terakhir ini akan dijelaskan pada bagian Hasil dan Pembahasan di bawah ini.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ring Deret Pangkat Teritlak Miring

Mazurek dan Ziembowski[5] mengkonstruksi ring baru yang merupakan generalisasi dari RDPT yang telah dikonstruksi oleh Ribemboim[6] dengan cara menambahkan suatu homomorfisma monoid $\omega : S \to End(R)$, yang digunakan untuk merubah operasi pergandaan konvolusi pada RDPT. Di bawah ini akan disajikan konstruksi RDPTM.

Diketahui R sebuah ring dengan elemen satuan, $(S,\cdot,\le)$ monoid terurut tegas, dan $\omega : S \to End(R)$ homomorfisma monoid. Untuk sebarang $s \in S$, ω_s melambangkan image ω, yakni $\omega_s = \omega(s)$. Dapat dibuktikan $\omega_1\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s\omega_1 = \omega_s$, yang berarti ω_1 merupakan elemen identitas *End*(*R*).

Diberikan suatu himpunan *A*, yakni himpunan semua pemetaan $f : S \to R$ dengan $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \ne 0\}$ Artin dan *narrow*. Untuk sebarang $s \in S$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A$, himpunan $X_s(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{supp}(f_1) \,\mathrm{x} \cdots \mathrm{x}\, \mathrm{supp}(f_n) \mid s = x_1x_2\ldots x_n\}$ berhingga.

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan pada *A*:

$(+)$: $(\forall f, g \in A)(f + g : S \to R)$ $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$

$(\cdot)$: $(\forall f, g \in A)(f \cdot g : S \to R)$

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} \sum\limits_{(x,y) \in X_s(f,g)} f(x)\omega_x(g(y)) & ;\ X_s(f,g) \ne \varphi \\ 0 & ;\ X_s(f,g) = \varphi \end{cases}$$

Dengan dua operasi di atas, Mazurek dan Ziembowski[5] telah membuktikan bahwa *A* merupakan sebuah ring yang selanjutnya disebut "*Ring Deret Pangkat Teritlak Miring* (*RDPTM*)", dan disimbolkan dengan $R[[S,\omega,\le]]$ atau $R[[S,\omega]]$.

3.2. Homomorfisma Ring Deret Pangkat Teritlak Miring

Berdasarkan homomorfisma RDPT yang telah dikonstruksi Ribemboim[7], di bawah ini akan dicoba dikonstruksi homomorfisam RDPTM.

Diketahui R dan R' ring, $(S,\leq)$ dan $(S',\leq')$ monoid terurut tegas, A dan A' RDPTM. Misalkan $\alpha : R \to R'$ homomorfisma ring dan $\phi : (S,\leq) \to (S',\leq')$ homomorfisma tegas. Misalkan $\omega : S \to End(R)$ dan $\omega' : S' \to End(R')$ homomorfisma monoid.

Untuk setiap $s \in S, \omega_s = \omega(s)$ melambangkan image dari ω, jadi $\omega_s : R \to R$ merupakan endomorfisma. Dan untuk setiap $s' \in S', \omega'_{s'} = \omega'(s')$ melambangkan image dari ω', jadi $\omega'_{s'} : R' \to R'$ merupakan endomorfisma.

Selanjutnya didefiniskan pemetaaan $\alpha_\omega^\varphi : A \to A'$ sebagai berikut :

$$\alpha_\omega^\varphi(f)(\varphi(s)) = \begin{cases} \alpha \sum\limits_{t \in \varphi^{-1}(\varphi(s))} f(t) & , \omega'_{s'}\alpha = \alpha\omega_s \\ 0 & , \omega'_{s'}\alpha \neq \alpha\omega_s \end{cases}$$

Akan ditunjukkan $\alpha_\omega^\varphi : A \to A'$ merupakan homomorfisma ring.

Bukti :

(i) Untuk sebarang $f, g \in A$ dan $\forall s \in S$ berlaku :

$$\begin{aligned} \alpha_\omega^\phi(f+g)(\phi(s)) &= \alpha \sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} (f+g)(t) \\ &= \alpha \left(\sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} f(t) + \sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} g(t) \right) \\ &= \alpha \sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} f(t) + \alpha \sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} g(t) \\ &= \alpha_\omega^\phi(f)(\phi(s)) + \alpha_\omega^\phi(g)(\phi(s)) \\ &= \left(\alpha_\omega^\phi(f) + \alpha_\omega^\phi(g)\right)(\phi(s)) \end{aligned}$$

(ii) Untuk sebarang $f, g \in A$ dan $\forall s \in S$ berlaku :

$$\begin{aligned} \alpha_\omega^\phi(fg)(\phi(s)) &= \alpha \sum_{t \in \phi^{-1}(\phi(s))} (fg)(t) \\ &= \alpha \left(\sum_{\substack{cd=t \\ \phi(t)=\phi(s)}} f(c)\,\omega_c(g(d)) \right) \\ &= \sum_{\substack{cd=t \\ \phi(t)=\phi(s)}} \alpha\, f(c) \alpha\, \omega_c(g(d)) \\ &= \sum_{c',d' \in \phi(S)} \left(\sum_{\substack{c \in S \\ \phi(c)=c'}} \alpha\, f(c) \right) \left(\sum_{\substack{d \in S \\ \phi(d)=d'}} \alpha\, \omega_c(g(d)) \right) \\ &= \sum_{c',d' \in \phi(S)} \left(\sum_{\substack{c \in S \\ \phi(c)=c'}} \alpha\, f(c) \right) \left(\sum_{\substack{d \in S \\ \phi(d)=d'}} \omega'_{c'}\, \alpha(g(d)) \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{c',d' \in \phi(S)} \left(\sum_{\substack{c \in S \\ \phi(c)=c'}} \alpha\, f(c) \right) \omega'_{c'} \left(\sum_{\substack{d \in S \\ \phi(d)=d'}} \alpha\, g(d) \right)$$

$$= \sum_{c'd'=\phi(s)} \alpha_{\omega}^{\phi}(f)(c')\ \omega'_{c'} \left(\alpha_{\omega}^{\phi}(g)(d') \right) = \left(\alpha_{\omega}^{\phi}(f) . \alpha_{\omega}^{\phi}(g) \right) (\phi(s))$$

Dari (i) dan (ii), maka terbukti bahwa $\alpha_{\omega}^{\varphi} : A \to A'$ merupakan homomorfisma ring. □

4. KESIMPULAN

Dapat dikonstruksi homomorfisma RDPTM berdasarkan homomorfisma RDPT yang sudah ada dengan mendefinisikan pemetaaan $\alpha_{\omega}^{\varphi} : A \to A'$ sebagai berikut :

$$\alpha_{\omega}^{\varphi}(f)(\varphi(s)) = \begin{cases} \alpha \displaystyle\sum_{t \in \varphi^{-1}(\varphi(s))} f(t) & , \omega'_{s'}\, \alpha = \alpha \omega_s \\ 0 & , \omega'_{s'}\, \alpha \neq \alpha \omega_s \end{cases}$$

Pemetaan ini merupakan homomorfisma ring jika diberi batasan $\omega'_{s'}\, \alpha = \alpha \omega_s$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Adkins, W.A. and Weintraub, S.H., 1992, *Algebra An Approach Via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.

2. Elliot, G.A. and Ribenboim, P., 1990, Fields of Generalized Power Series, *Arch. Math.* **54**: 365-371.

3. Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Welsey Publishing Company, New York.

4. Howie, J.M., 1976, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press Inc., London.

5. Mazurek, R. and Ziembowski, M., 2007, Uniserial Rings of Skew Generalized Power Series, *J. Algebra*, **318**: 737-764.

6. Ribenboim, P., 1990, Generalized Power Series Rings, *In Lattice, Semigroups and Universal Algebra*, *Plenum Press*, *New York*, 271-277.

7. Ribenboim, P., 1991, Rings of Generalized Power Series : Nilpotent elements, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **61**: 15-33.

