



SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

**SEMINAR
NASIONAL**

**METODE KUANTITATIF II
2018**

**PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA**

**PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)**

“Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi”

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

**Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**

Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Managing Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Penerbit :

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi

Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019
Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin
tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah “Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa”.

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
Aliran MHD Fluida Nano Melewati Bola Bermagnet Dengan Pengaruh Konveksi Campuran oleh <i>Basuki Widodo</i>	1
Inferensi Regresi Semiparametrik Untuk Data Hilang Menggunakan Metode <i>Likelihood</i> Empiris Dan Simulasinya Menggunakan R oleh <i>Yuana Sukmawaty</i> , dan <i>Nur Salam</i>	9
Penentuan Struktur Dan Kadar Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Lampung Barat Sebagai Insektisida Nabati Pada Kutu Putih Tanaman Kopi (<i>Planococcus Citri</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Hona Anjelina Putri</i> , dan <i>Nismah Nukmal</i>	17
Solusi Analitik Persamaan Laplace Pada Suatu Cakram oleh <i>Yulia Novita</i> , <i>Suharsono S.</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Dorrah Azis</i>	25
Kajian <i>Best-Fit</i> Distribusi Probabilitas Untuk Curah Hujan Harian Dan Aplikasinya Dalam Mitigasi Hujan Ekstrim Di Pulau Sumatera oleh <i>Achmad Raflie Pahlevi</i> , dan <i>Warsono</i>	28
Kuantifikasi Dan Penentuan Struktur Senyawa Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Pringsewu Dan Uji Toksisitas Terhadap Kutu Putih Sirsak (<i>Pseudococcus Cryptus</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Yayang Anas Persada</i> , dan <i>Nismah Nukma</i>	39
Barisan Bilangan Fibonacci <i>N</i> -Bebas oleh <i>Irmawati</i> , <i>Amanto</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Muslim Ansori</i>	49
Metode Estimasi <i>Diagonal Weighted Least Square</i> (DWLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Nurkholifa Sholihat</i> , dan <i>Netti Herawati</i>	53
<i>Singgah Pai</i> : Aplikasi Android Untuk Melestarikan Budaya Lampung oleh <i>Putri Sukma Dewi</i> , <i>Refiesta Ratu Anderha</i> , <i>Lily Parnabhakti</i> , dan <i>Yolanda Dwi Prastika</i>	62
Metode Estimasi <i>Weighted Least Square</i> (WLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Wardhani Utami Dewi</i> , dan <i>Rudi Ruswandi</i>	68
Perbandingan Metode Solusi Awal Layak Pada Data Biaya Pengiriman Beras Perum Bulog Divre Lampung oleh <i>Dwi Wahyu Lestari</i> , dan <i>Dian Kurniasari</i>	77

Segmentasi Kabupaten/ Kota Berdasarkan Karakteristik Penduduk Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 oleh <i>Agustina Riyanti, dan Tri Rena Maya Sari</i>	86
Penerapan Metode <i>Autoregressive Distributed Lag (Ardl)</i> Dalam Memodelkan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka Di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 oleh <i>Moni Dwi Fenski, Nusyirwan, dan Agus Sutrisno</i>	95
Simulasi Pemodelan Klaim Agregasi Dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson Dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh oleh <i>Rudi Ruswandi, Ira Syavitri, dan Subian Saidi</i>	105
Karakteristik Fungsi Phi (\emptyset) Euler oleh <i>Rini Karina Agustini, Suharsono S., Wamiliana, dan Notiragayu</i>	110
Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Pada Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi oleh <i>Farida, Agus Sutrisno, Dorrah Aziz, dan Tiryono Ruby</i>	114
Evaluasi Nilai UN Sma/Ma IPA Provinsi Lampung Dengan Graf <i>Maximum Spanning Tree</i> oleh <i>Sugama Maskar, Refiesta Ratu Anderha, dan Andriyanto</i>	123
Penentuan Rute Terpendek Pada Optimalisasi Jalur Tol Trans Jawa Dengan Menerapkan Algoritma <i>Floyd-Warshall</i> oleh <i>Maharani Damayanti, Notiragayu, dan La Zakaria</i>	131
Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau <i>Loop</i> Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam oleh <i>Dracjat Indrawan, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto</i>	139
Solusi Eksak Klasik Persamaan Tricomi oleh <i>Aura Purwaningrum, Suharsono S., Tiryono Ruby, dan Agus Sutrisno</i>	144
Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Empat oleh <i>Lucia Dessie Natasha, Wamiliana, Aang Nuryaman, dan Amanto</i>	148
Beberapa Penggunaan Rantai Markov Pada Saat Kondisi Stabil (Steady State) oleh <i>Dimas Rahmat Saputra, Dian Kurnia Sari, dan Wamiliana</i>	157
Ruang Barisan Selisih $L_{3/2}(\Delta_2)$ oleh <i>Aulia Rahman, Muslim Anshori, dan Dorrah Aziz</i>	163
Solusi Analitik Untuk Sistem KDV Homogen Dengan Metode Analisis Homotopi (HAM) oleh <i>Anita Rahmasari, Suharsono S., dan Asmiati</i>	171
Alokasi Dana Dari Premi Asuransi Jiwa Syariah Menggunakan Metode Dwiguna oleh <i>Rudi Ruswandi, Arum Mardiyah Nurvitasari, dan La Zakaria</i>	178

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan oleh <i>Karomani dan Nusyirwan</i>	184
Perbandingan <i>MVE-BOOTSTRAP</i> dan <i>MCD-BOOTSTRAP</i> dalam Analisis Regresi Linear Berganda pada Data Berukuran Kecil yang Mengandung Pencilan oleh <i>Ario Pandu, dan Khoirin Nisa</i>	192
Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor oleh <i>A.S Awalluddin</i>	202
Iteraksi Inflasi dan Jumlah Uang Beredar di Indonesia dengan Model Bivariate Vector Autoregressive oleh <i>K. Nurika Damayanti</i>	211
Pengelompokan Kabupaten/ Kota Berdasarkan Indikator Pembangunan Daerah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Abdul Kadir</i>	222
Penggunaan Teori Antrian <i>Multi-Server</i> Dengan Distribusi Erlang oleh <i>Muhammad Taufik Rizal , Widiarti, Wamiliana, dan Rudi Ruswandi</i>	228
Aplikasi <i>Multiple Classification Analysis</i> (MCA) Dalam Analisis Pengaruh Variabel Sosial Ekonomi dan Demograf Terhadap Lama Sekolah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Desliyani Tri Wandita</i>	237
Keanekaragaman Arthropoda Tanah Pada Dua Tipe Pengelolaan Lahan Kopi (<i>Coffea spp.</i>) di Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat oleh <i>Siti Ardiyanti, Suratman Umar, Nismah Nukmal, dan M. Kanedi</i>	244
Perbandingan <i>Mean Squared Error</i> (MSE) Metode <i>Jackknife</i> dan <i>Bootstrap</i> Pada Pendugaan Area Kecil Model Logit-Binomial oleh <i>Shindy Dwiyanti, Widiarti, dan Khoirin Nisa</i>	252
Aplikasi Distribusi Statistik dalam Memonitor Kualitas Udara di Bukit Kotatabang oleh <i>Raeni Chindi Defi Ocvilia, Achmad Raflie Pahlevi, Warsono, dan Mareta Asnia</i>	256
Klustering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017 oleh <i>Tri Rena Mayasari</i>	263
Konstruksi Model Aljabar Max-Plus Interval Atas Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track oleh <i>Tri Utomo ,dan Eristia Arfi</i>	271

SOLUSI EKSAK KLASIK PERSAMAAN TRICOMI

Aura Purwaningrum¹, Suharsono S.¹, Tiryono Ruby¹, Agus Sutrisno¹

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jalan Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : aura.purwaningrum08@gmail.com¹

ABSTRAK

Persamaan umum Tricomi adalah persamaan diferensial parsial berbentuk: $\partial_{xx}g + a(x)\partial_{yy}g = 0$ dimana $g(x, y)$ dan $a(x)$ adalah sebuah fungsi biasa. Solusi dari persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q [a(s) t_y(s, b)] ds dq$$

Dengan $t(x, y) = g_y$.

Kata kunci: Persamaan Tricomi, Persamaan Diferensial Parsial, Solusi eksak.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hal itu karena banyak permasalahan kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial, Persamaan Diferensial secara umum dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Dalam sejarah tentang persamaan diferensial parsial, pada tahun 1923 Francesco Giacomo Tricomi melakukan sebuah penelitian tentang persamaan diferensial, kemudian saat ini dikenal persamaan Tricomi dengan bentuk $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ dengan solusi $u(x, y)$. Persamaan ini digunakan untuk analisis aliran transonik pada aerodinamika. Persamaan ini berbentuk hiperbolik pada $x < 0$, eliptik pada $x > 0$ dan berdegenerasi pada $x = 0$. Untuk lebih mempermudah dalam memahami dan mencari solusi dari persamaan Tricomi ini dalam hal yang lebih sederhana, maka penulis akan mencari formula solusi eksak dari persamaan Tricomi dengan menggunakan teknik integral dan teorema dasar kalkulus.

Dalam persamaan diferensial parsial terdapat teorema bahwa, misalkan $u = f(x, y)$ merupakan fungsi dari dua variabel x dan y . Kontinu dalam neighborhood di titik (x, y) , maka $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (Whittemore, 1898). Teori lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah teorema dasar kalkulus I dan teorema dasar kalkulus II. Pada buku (Purcell, 2010), teorema dasar kalkulus I, misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a, b) . Maka:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

Sedangkan teorema dasar kalkulus II, misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan misalkan F sembarang anti-turunan dari f pada $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam mencari solusi eksak dari persamaan Tricomi adalah metode studi pustaka dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi yang berhubungan dengan penelitian.
2. Mengasumsikan persamaan Tricomi kedalam sistem persamaan diferensial parsial orde pertama.
3. Menyelesaikan asumsi yang ada dengan menggunakan teknik integral sehingga didapatkan formula solusi eksaknya.

4. Membuktikan bahwa solusi eksak memenuhi persamaan Tricomi.
5. Menggunakan solusi eksak kedalam beberapa kasus penerapan persamaan Tricomi.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan umum Tricomi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx}g + a(x)\partial_{yy}g = 0 \quad (1)$$

Dimana $g(x, y)$ merupakan fungsi biasa yang memuat variabel x dan y dan $a(x)$ merupakan sembarang fungsi yang memuat variabel x . Untuk $a(x) = x$ persamaan ini merupakan Persamaan Tricomi Klasik.

Misalkan $u = \frac{\partial g}{\partial x} = \partial_x g = g_x$ dan $v = \frac{\partial g}{\partial y} = \partial_y g = g_y$, maka persamaan Tricomi dapat ditulis dalam sistem persamaan diferensial parsial orde satu dengan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) = 0 \\ u_y(x, y) - v_x(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Untuk mempermudah pemahaman, misalkan parameter $t = t(x, y) = v(x, y)$. Dari persamaan pertama pada sistem (2), maka

$$\begin{aligned} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) &= 0 \\ u(x, y) &= -\int_a^x [a(s)t_y(s, y)] ds + h(y) \end{aligned} \quad (3)$$

Dimana $a \in \mathbb{R}$ dan h adalah sembarang fungsi dari variabel real.

Dari persamaan kedua pada sistem (2), dengan menggunakan aturan dasar integral yang bergantung pada parameter maka didapatkan formula,

$$\begin{aligned} u_y(x, y) - v_x(x, y) &= 0 \\ u_y(x, y) &= v_x(x, y) \\ -\int_a^x [a(s)t_{yy}(s, y)] ds + h'(y) &= t_x(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} h'(y) &= t_x(x, y) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, y)] ds \\ h(y) &= \int_b^y [t_x(x, r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, r)] ds] dr \end{aligned} \quad (5)$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Tetapi h harus bergantung hanya pada y .

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Integral Kalkulus, maka

$$\begin{aligned} \partial_x h(y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_b^y \left[t_x(x, r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, r)] ds \right] dr \right) \\ \partial_x h(y) &= \int_b^y [t_{xx}(x, r) + a(x)t_{yy}(x, r)] dr \\ 0 &= \partial_x h(y) = \int_b^y [t_{xx}(x, r) + a(x)t_{yy}(x, r)] dr \quad \forall y \end{aligned} \quad (6)$$

Jika t adalah solusi dari persamaan Tricomi maka kondisi di atas terpenuhi.

Dengan mengintegrasikan $h(y)$ terhadap y maka akan didapatkan formula $u(x, y)$ yang baru, yaitu:

$$h(y) = \int_b^y t_x(x, r) dr + \int_a^x a(s)t_y(s, y) ds - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds$$

substitusikan kedalam $u(x, y)$ (3), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\int_a^x [a(s)t_y(s, y)] ds + \int_b^y t_x(x, r) dr + \int_a^x a(s)t_y(s, y) ds - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds \\ u(x, y) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds \end{aligned} \quad (7)$$

Maka, solusi persamaan Tricomi adalah t dengan fungsi g sehingga $g_x = u$ dan $g_y = t$ dengan

$$u(x, y) = \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds.$$

Oleh karena itu, dari $g_y = t$ persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_y &= t(x, y) \\ g(x, y) &= \int_b^y t(x, r) dr + k(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Dimana k adalah sembarang fungsi variabel real.

Dari $g_x = u$

$$g_x = u(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 g_x &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_b^y t(x, r) dr + k(x) \right) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 \int_b^y t_x(x, r) dr + k'(x) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 k'(x) &= - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 k(x) &= - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq \tag{9}
 \end{aligned}$$

Jika $t(x, y)$ adalah solusi, maka solusi eksak klasik persamaan Tricomi dapat dituliskan dalam rumus:

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq \tag{10}$$

Dengan $t(x, y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem (2).

Untuk membuktikan bahwa $g(x, y)$ adalah solusi dari persamaan Tricomi maka $g(x, y)$ harus memenuhi persamaan.

$$\begin{aligned}
 g_{xx} &= \int_b^y t_{xx}(x, r) dr - a(x) t_y(x, b) \\
 &= - \int_b^y a(x) t_{yy}(x, r) dr - a(x) t_y(x, b) \\
 &= -a(x) t_y(x, y) + a(x) t_y(x, b) - a(x) t_y(x, b) \\
 &= -a(x) t_y(x, y) \\
 &= -a(x) \int_b^y a(x) t_{yy}(x, r) dr \\
 &= -a(x) g_{yy}
 \end{aligned}$$

Jadi, $g_{xx} = -a(x) g_{yy}$

$$g_{xx} + a(x) g_{yy} = 0$$

Terbukti benar bahwa rumus $g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq$ merupakan solusi eksak klasik persamaan Tricomi.

Contoh 1:

Berdasarkan persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$, maka persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx} g + x \partial_{yy} g = 0$$

Dalam hal ini $a(x) = x$. Misalkan $t(x, y) = y$ adalah solusi trivial, maka dengan menggunakan persamaan (12) dengan $a = b = 0$, maka:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \int_0^y r dr - \int_0^x \int_0^q s t_y(s, b) ds dq \\
 &= \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} x^3
 \end{aligned}$$

Jadi, $g(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} x^3$ merupakan solusi eksak dari persamaan Tricomi.

Contoh 2:

Dari persamaan (1) dengan $a(x) = \sin(x)$ maka dapat di cari solusi eksak dari bentuk persamaan:

$$\partial_{xx} g + \sin(x) \partial_{yy} g = 0 \tag{11}$$

Misalkan $t(x, y) = y$ adalah solusi trivial dan $a = b = 0$. Maka:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \int_0^y r dr - \int_0^x \int_0^q \sin(s) t_y(s, b) ds dq \\
 &= \frac{1}{2} y^2 + \sin(x) - x
 \end{aligned}$$

Jadi, $g(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \sin(x) - x$ merupakan solusi eksak dari persamaan (11).

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, didapatkan rumus umum untuk mencari solusi eksak dari persamaan tricomi adalah

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq$$

Dengan $t(x, y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem

$$\begin{cases} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) = 0 \\ u_y(x, y) - v_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

Sehingga didapatkan solusi eksak dari persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ adalah

$$g(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

5. Daftar Pustaka

Purcell, E.J, Varberg, D dan Rigdon, S.E. 2010. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Sembilan*. Erlangga, Jakarta.

Whittemore, J.K. 1898. *A Doubly-infinite System of Simple Groups*. Mathematical Papers of the Chicago Congress, Chicago.