SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF II
2018

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPILIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)

"Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi"

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Penerbit :
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi
Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019

ISBN No. 978-623-90150-0-8

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah "Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa".

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Unversitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

DAFTAR ISI

ISBN No. 978-623-90150-0-8

ISBN No. 978-623-90150-0-8

SOLUSI EKSAK KLASIK PERSAMAAN TRICOMI

Aura Purwaningrum[1], Suharsono S. [1],Tiryono Ruby[1], Agus Sutrisno[1]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung*
Jalan Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi :aura.purwaningrum08@gmail.com[1]

ABSTRAK

Persamaan umum Tricomi adalah persamaan diferensial parsial berbentuk: $\partial_{xx}g + a(x)\partial_{yy}g = 0$ *dimana* $g(x,y)$ *dan* $a(x)$ *adalah sebuah fungsi biasa. Solusi dari persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$g(x,y) = \int_b^y t(x,r)\, dr - \int_a^x \int_a^q [a(s)\, t_y(s,b)]\, ds\, dq$$

Dengan $t(x,y) = g_y$.

Kata kunci:*Persamaan Tricomi, Persamaan Diferensial Parsial, Solusi eksak.*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hal itu karena banyak permasalahan kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial,Persamaan Diferensial secara umum dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa danpersamaan diferensial parsial.

Dalam sejarah tentang persamaan diferensial parsial, pada tahun 1923 Francesco Giacomo Tricomi melakukan sebuah penelitian tentang persamaan diferensial, kemudian saat ini dikenal persamaan Tricomi dengan bentuk $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ dengan solusi $u(x,y)$. Persamaan ini digunakan untuk analisis aliran transonik pada *aerodinamika*. Persamaan ini berbentuk hiperbolik pada $x < 0$, eliptik pada $x > 0$ dan berdegenerasi pada $x = 0$. Untuk lebih mempermudah dalam memahami dan mencari solusi dari persamaan Tricomi ini dalam hal yang lebih sederhana, maka penulis akan mencari formula solusi eksak dari persamaan Tricomi dengan menggunakan teknik integral dan teorema dasar kalkulus.

Dalam persamaan diferensial parsial terdapat teorema bahwa, misalkan $u = f(x,y)$ merupakan fungsi dari dua variabel x dan y. Kontinu dalam neighborhood di titik (*x,y*), maka $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (Whittemore, 1898).Teori lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah teorema dasar kalkulus I dan teorema dasar kalkulus II. Pada buku (Purcell, 2010), teorema dasar kalkulus I, misalkan f kontinu pada interval tertutup [a,b] dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a,b). Maka:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\, dt = f(x)$$

Sedangkan teorema dasar kalkulus II, misalkan *f* kontinu pada [a,b] dan misalkan F sembarang anti-turunan dari *f* pada [a,b], maka:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

2. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam mencari solusi eksak dari persamaan Tricomi adalah metode studi pustaka dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi yang berhubungan dengan penelitian.
2. Mengasumsikan persamaan Tricomi kedalam sistem persamaan diferensial parsial orde pertama.
3. Menyelesaikan asumsi yang ada dengan menggunakan teknik integral sehingga didapatkan formula solusi eksaknya.

ISBN No. 978-623-90150-0-8

4. Membuktikan bahwa solusi eksak memenuhi persamaan Tricomi.
5. Menggunakan solusi eksak kedalam beberapa kasus penerapan persamaan Tricomi.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan umum Tricomi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx} g + a(x)\partial_{yy} g = 0 \tag{1}$$

Dimana $g(x,y)$ merupakan fungsi biasa yang memuat variabel x dan y dan $a(x)$ merupakan sembarang fungsi yang memuat variabel x. Untuk $a(x) = x$ persamaan ini merupakan Persamaan Tricomi Klasik.

Misalkan $u = \frac{\partial g}{\partial x} = \partial_x g = g_x$ dan $v = \frac{\partial g}{\partial y} = \partial_y g = g_y$, maka persamaan Tricomi dapat ditulis dalam sistem persamaan diferensial parsial orde satu dengan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_x(x,y) + a(x)v_y(x,y) = 0 \\ u_y(x,y) - v_x(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Untuk mempermudah pemahaman, misalkan parameter $t = t(x,y) = v(x,y)$. Dari persamaan pertama pada sistem (2), maka

$$u_x(x,y) + a(x)v_y(x,y) = 0$$

$$u(x,y) = -\int_a^x [a(s)t_y(s,y)]ds + h(y) \tag{3}$$

Dimana $a \in \mathbb{R}$ dan h adalah sembarang fungsi dari variabel real.

Dari persamaan kedua pada sistem (2), dengan menggunakan aturan dasar integral yang bergantung pada parameter maka didapatkan formula,

$$u_y(x,y) - v_x(x,y) = 0$$

$$u_y(x,y) = v_x(x,y)$$

$$-\int_a^x [a(s)t_{yy}(s,y)]ds + h'(y) = t_x(x,y) \tag{4}$$

Sehingga,

$$h'(y) = t_x(x,y) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s,y)]ds$$

$$h(y) = \int_b^y \left[t_x(x,r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s,r)]ds\right]dr \tag{5}$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Tetapi h harus bergantung hanya pada y.

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Integral Kalkulus, maka

$$\partial_x h(y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_b^y \left[t_x(x,r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s,r)]ds\right]dr\right)$$

$$\partial_x h(y) = \int_b^y [t_{xx}(x,r) + a(x)t_{yy}(x,r)]dr$$

$$0 = \partial_x h(y) = \int_b^y [t_{xx}(x,r) + a(x)t_{yy}(x,r)]dr \quad \forall y \tag{6}$$

Jika t adalah solusi dari persamaan Tricomi maka kondisi di atas terpenuhi.

Dengan mengintegralkan $h(y)$ terhadap y maka akan didapatkan formula $u(x,y)$ yang baru, yaitu:

$$h(y) = \int_b^y t_x(x,r)\,dr + \int_a^x a(s)t_y(s,y)\,ds - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\,ds$$

substitusikan kedalam $u(x,y)(3)$, sehingga diperoleh:

$$u(x,y) = -\int_a^x [a(s)t_y(s,y)]ds + \int_b^y t_x(x,r)\,dr + \int_a^x a(s)t_y(s,y)\,ds - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\,ds$$

$$u(x,y) = \int_b^y t_x(x,r)\,dr - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\,ds \tag{7}$$

Maka, solusi persamaan Tricomi adalah t dengan fungsi g sehingga $g_x = u$ dan $g_y = t$ dengan

$$u(x,y) = \int_b^y t_x(x,r)\,dr - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\,ds.$$

Oleh karena itu, dari $g_y = t$ persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$g_y = t(x,y)$$

$$g(x,y) = \int_b^y t(x,r)\,dr + k(x) \tag{8}$$

Dimana k adalah sembarang fungsi variabel real.

Dari $g_x = u$

$$g_x = u(x,y)$$

$$g_x = \int_b^y t_x(x,r)\, dr - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\, ds$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_b^y t(x,r)\, dr + k(x)\right) = \int_b^y t_x(x,r)\, dr - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\, ds$$
$$\int_b^y t_x(x,r)\, dr + k'(x) = \int_b^y t_x(x,r)\, dr - \int_a^x a(s)t_y(s,b)\, ds$$
$$k'(x) = -\int_a^x a(s)t_y(s,b)\, ds$$
$$k(x) = -\int_a^x \int_a^q a(s)\, t_y(s,b)\, ds\, dq \tag{9}$$

Jika $t(x,y)$ adalah solusi, maka solusi eksak klasik persamaan Tricomi dapat dituliskan dalam rumus:

$$g(x,y) = \int_b^y t(x,r)\, dr - \int_a^x \int_a^q a(s)\, t_y(s,b)\, ds\, dq \tag{10}$$

Dengan $t(x,y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem (2).
Untuk membuktikan bahwa $g(x,y)$ adalah solusi dari persamaan Tricomi maka $g(x,y)$ harus memenuhi persamaan.

$$g_{xx} = \int_b^y t_{xx}(x,r)\, dr - a(x)t_y(x,b)$$
$$= -\int_b^y a(x)t_{yy}(x,r)\, dr - a(x)t_y(x,b)$$
$$= -a(x)t_y(x,y) + a(x)t_y(x,b) - a(x)t_y(x,b)$$
$$= -a(x)t_y(x,y)$$
$$= -a(x)\int_b^y a(x)t_{yy}(x,r)\, dr$$
$$= -a(x)g_{yy}$$

Jadi, $g_{xx} = -a(x)g_{yy}$
$g_{xx} + a(x)g_{yy} = 0$
Terbukti benar bahwa rumus $g(x,y) = \int_b^y t(x,r)\, dr - \int_a^x \int_a^q a(s)\, t_y(s,b)\, ds\, dq$
Merupakan solusi eksak klasik persamaan Tricomi.

Contoh 1:
Berdasarkan persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$, maka persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx}g + x\partial_{yy}g = 0$$

Dalam hal ini $a(x) = x$. Misalkan $t(x,y) = y$ adalah solusi trivial, maka dengan menggunakan persamaan (12) dengan $a = b = 0$, maka:

$$g(x,y) = \int_0^y r\, dr - \int_0^x \int_0^q s\, t_y(s,b)\, ds\, dq$$
$$= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Jadi, $g(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3$ merupakan solusi eksak dari persamaan Tricomi.

Contoh 2:
Dari persamaan (1) dengan $a(x) = \sin(x)$ maka dapat di cari solusi eksak dari bentuk persamaan:

$$\partial_{xx}g + \sin(x)\, \partial_{yy}g = 0 \tag{11}$$

Misalkan $t(x,y) = y$ adalah solusi trivial dan $a = b = 0$. Maka:

$$g(x,y) = \int_0^y r\, dr - \int_0^x \int_0^q \sin(s)\, t_y(s,b)\, ds\, dq$$
$$= \frac{1}{2}y^2 + \sin(x) - x$$

Jadi, $g(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \sin(x) - x$ merupakan solusi eksak dari persamaan (11).

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, didapatkan rumus umum untuk mencari solusi eksak dari persamaan tricomi adalah

ISBN No. 978-623-90150-0-8

$$g(x,y) = \int_b^y t(x,r)\,dr - \int_a^x \int_a^q a(s)\,t_y(s,b)\,ds\,dq$$

Dengan $t(x,y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem

$$\begin{cases} u_x(x,y) + a(x)v_y(x,y) = 0 \\ u_y(x,y) - v_x(x,y) = 0 \end{cases}$$

Sehingga didapatkan solusi eksak dari persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ adalah

$$g(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

5. Daftar Pustaka

Purcell, E.J, Varberg, D dan Rigdon, S.E. 2010. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Sembilan*. Erlangga, Jakarta.

Whittemore, J.K. 1898. *A Doubly-infinite System of Simple Groups*. MathematicalPapers of the Chicago Congress, Chicago.