SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF II

2018

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPILIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)

"Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi"

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Managing Editor
Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Penerbit :
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi
Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019
Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

ISBN No. 978-623-90150-0-8

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah "Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa".

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Unversitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

ISBN No. 978-623-90150-0-8

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....i
DAFTAR ISI.....ii

Aliran MHD Fluida Nano Melewati Bola Bermagnet Dengan Pengaruh Konveksi Campuran oleh *Basuki Widodo*.....1

Inferensi Regresi Semiparametrik Untuk Data HilangMenggunakan Metode *Likelihood* Empiris Dan Simulasinya Menggunakan R oleh *Yuana Sukmawaty* , dan *Nur Salam* 9

Penentuan Struktur Dan Kadar Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (*GliricidiaMaculata*) Kultivar Lampung Barat Sebagai Insektisida Nabati Pada Kutu Putih Tanaman Kopi (*Planococcus Citri,* Hemiptera: Pseudococcidae) oleh *Hona Anjelina Putri, dan Nismah Nukmal* 17

Solusi Analitik Persamaan Laplace Pada Suatu Cakram oleh *Yulia Novita* , *Suharsono S., Agus Sutrisno* , *dan Dorrah Azis* 25

Kajian *Best-Fit* Distribusi Probabilitas Untuk Curah Hujan Harian Dan Aplikasinya Dalam Mitigasi Hujan Ekstrim Di Pulau Sumatera oleh *Achmad Raflie Pahlevi, dan Warsono*.....28

Kuantifikasi Dan Penentuan Struktur Senyawa Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (*Gliricidia Maculata*) Kultivar Pringsewu Dan Uji Toksisitas TerhadapKutu Putih Sirsak(*Pseudococcus Cryptus,* Hemiptera: Pseudococcidae) oleh *Yayang Anas Persada, dan Nismah Nukma* 39

Barisan Bilangan Fibonacci *N*-Bebas oleh *Irmawati, Amanto, Agus Sutrisno, dan Muslim Ansori* 49

Metode Estimasi *Diagonal Weighted Least Square* (DWLS)Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh *Eri Setiawan, Nurkholifa Sholihat, dan Netti Herawati* 53

Singgah Pai: Aplikasi Android Untuk Melestarikan Budaya Lampung oleh *Putri Sukma Dewi, Refiesta Ratu Anderha, Lily Parnabhakti, dan Yolanda Dwi Prastika* 62

Metode Estimasi *Weighted Least Square* (WLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh *Eri Setiawan, Wardhani Utami Dewi, dan Rudi Ruswandi* 68

Perbandingan Metode Solusi Awal Layak Pada Data Biaya Pengiriman Beras Perum Bulog Divre Lampung oleh *Dwi Wahyu Lestari* , *dan Dian Kurniasari*.....77

Segmentasi Kabupaten/ Kota Berdasarkan Karakteristik Penduduk Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 oleh *Agustina Riyanti, dan Tri Rena Maya Sari* 86

Penerapan Metode *Autoregressive Distributed Lag* (Ardl) Dalam Memodelkan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka Di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 oleh *Moni Dwi Fenski, Nusyirwan, dan Agus Sutrisno* 95

Simulasi Pemodelan Klaim Agregasi Dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson Dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh oleh *Rudi Ruswandi, Ira Syavitri, dan Subian Saidi* 105

Karakteristik Fungsi Phi (∅) Euler oleh *Rini Karina Agustini , Suharsono S., Wamiliana , dan Notiragayu* 110

Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Pada Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi oleh *Farida, Agus Sutrisno, Dorrah Aziz, dan Tiryono Ruby* 114

Evaluasi Nilai UN Sma/Ma IPA Provinsi Lampung Dengan Graf *Maximum Spanning Tree* oleh *Sugama Maskar, Refiesta Ratu Anderha, dan Andriyanto* 123

Penentuan Rute Terpendek Pada Optimalisasi Jalur Tol Trans Jawa Dengan Menerapkan Algoritma *Floyd-Warshall* oleh *Maharani Damayanti, Notiragayu , dan La Zakaria* 131

Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau *Loop* Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam oleh *Dracjat Indrawan, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto* 139

Solusi Eksak Klasik Persamaan Tricomi oleh *Aura Purwaningrum , Suharsono S., Tiryono Ruby, dan Agus Sutrisno* 144

Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel TitikBerorde Empat oleh *Lucia Dessie Natasha, Wamiliana, Aang Nuryaman, dan Amanto* 148

Beberapa Penggunaan Rantai Markov Pada Saat Kondisi Stabil (Steady State) oleh *Dimas Rahmat Saputra, Dian Kurnia Sari, dan Wamiliana* 157

Ruang Barisan Selisih $L_{3/2}(\Delta_2)$ oleh *Aulia Rahman, Muslim Anshori , dan Dorrah Aziz* 163

Solusi Analitik Untuk Sistem KDV Homogen Dengan Metode Analisis Homotopi (HAM) oleh *Anita Rahmasari, Suahrsono S. , dan Asmiati* 171

Alokasi Dana Dari Premi Asuransi Jiwa Syariah Menggunakan Metode Dwiguna oleh *Rudi Ruswandi, Arum Mardhiyah Nurvitasari, dan La Zakaria* 178

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan oleh *Karomani dan Nusyirwan* 184

Perbandingan MVE-*BOOTSTRAP* dan MCD-*BOOTSTRAP* dalam Analisis Regresi Linear Berganda pada Data Berukuran Kecil yang Mengandung Pencilan oleh *Ario Pandu, dan Khoirin Nisa* 192

Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor oleh *A.S Awalluddin* 202

Iteraksi Inflasi dan Jumlah Uang Beredar di Indonesia dengan Model Bivariate Vector Autoregressive oleh *K. Nurika Damayanti*.....211

Pengelompokan Kabupaten/ Kota Berdasarkan Indikator Pembangunan Daerah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh *Abdul Kadir*.....222

Penggunan Teori Antrian *Multi-Server* Dengan Distribusi Erlang oleh *Muhammad Taufik Rizal , Widiarti, Wamiliana, dan Rudi Ruswandi* 228

Aplikasi *Multiple Classification Analysis* (MCA) Dalam Analisis Pengaruh Variabel Sosial Ekonomi dan Demograf Terhadap Lama Sekolah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh *Desliyani Tri Wandita* 237

Keanekaragaman Arthropoda Tanah Pada Dua Tipe Pengelolaan Lahan Kopi (*Coffea* spp.) di Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat oleh *Siti Ardiyanti, Suratman Umar, Nismah Nukmal, dan M. Kanedi* 244

Perbandingan *Mean Squared Error* (MSE) Metode *Jackknife* dan *Bootstrap* Pada Pendugaan Area Kecil Model Logit-Binomial oleh *Shindy Dwiyanti, Widiarti, dan Khoirin Nisa* 252

Aplikasi Distribusi Statistik dalam Memonitor Kualitas Udara di Bukit Kotatabang oleh *Raeni Chindi Defi Ocvilia, Achmad Raflie Pahlevi, Warsono, dan Mareta Asnia* 256

Klastering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017 oleh *Tri Rena Mayasari* 263

Konruksi Model Aljabar Max-Plus Interval Atas Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track oleh *Tri Utomo ,dan Eristia Arfi*.....271

ISBN No. 978-623-90150-0-8

RUANG BARISAN SELISIH $L_{3/2}(\Delta_2)$

Aulia Rahman[1], Muslim Anshori[1] , Dorrah Aziz[1]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA UNILA*
Jl. Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, B.Lampung 35145
Penulis Korespondensi : rahmanunila@gmail.com[1]

ABSTRAK

Salah satu bidang kajian yang berada pada matematika adalah bidang analisis. Dalam bidang ini, konsep ruang barisan termasuk yang sering dibicarakan. Pada ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis, membahas tentang ruang barisan yang dimana l_∞ *adalah koleksi ruang barisan yang* $sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty$, c_0 *adalah koleksi barisan bilangan yang konverken ke-0, c adalah koleksi semua barisan yang konvergen dan* l_p *adalah* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$. *Ruang barisan sendiri merupakan ruang yang isinya barisan sedangkan barisan sendiripun merupakan suatu fungsi yang domainnya bilangan asli yang bernilai real. Dalam Penelitian ini akan dikonstruksikan ruang barisan selisih pada ruang barisan* $l_{3/2}$ *dengan norma tertentu. Pada penelitian ini akan menunjukan sifat ruang barisan selisih* $l_{3/2}$, $l_{3/2}(\Delta)$, $l_{3/2}(\Delta_2)$ *adalah ruang barisan terbatas, kovergen dan merupakan ruang banach. Selanjutnya dari penelitian ini sendiri akan menunjukan bahwa ruang barisan selisih* $l_{3/2}(\Delta_2)$ *merupakan ruang banach.*

Kata kunci: *Ruang Bernorm, Ruang Barisan Selisih, Ruang Banach.*

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran, perhitungan dalam pengambilan keputusan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis. Bidang ini merupakan bagian dari matematika. Dalam bidang ini, konsep ruang barisan termasuk yang dibicarakan. Pada ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis, membahas tentang ruang barisan yang dimana l_∞ adalah koleksi ruang barisan yang $sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty$, c_0 adalah koleksi barisan bilangan yang konverken ke-0, c adalah koleksi semua barisan yang konvergen dan l_p adalah $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$. Kemudian dari pemikiran dasar tersebut digunakan oleh Colak R. (1995), dengan menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta), c_0(\Delta)$, dan $l_p(\Delta)$ (Colak, 1945). Dari pemikiran tersebut penulis mencoba mempelajari lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_{3/2}(\Delta_2)$.

2. Metode Penelitian

Metode-metode yang digunakan untuk menunjukan Ruang Barisan Selisih $l_{3/2}(\Delta_2)$ ini adalah metode studi literatur dengan diawali studi sejumlah konsepan tentang barisan, ruang bernorm, ruang barisan selisih dan ruang banach. Kemudian langkah penelitian ini selanjutnya akan dilakukan denag diantaranya sebagai berikut:

1. Menunjukan bahwa ruang $l_{3/2}$, adalah ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach
2. Menunjukan bahwa ruang $l_{3/2}(\Delta)$,ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach
3. Menunjukan bahwa ruang $l_{3/2}(\Delta_2)$, ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach

3. Hasil Dan Pembahasan

Diketahui rumus umum ruang barisan selisih:

$$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m x_k\} = \left\{\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}x_{k+m-i}\right\}$$

sebelumnya akan ditunjukan terlebih dahulu sifat sifat ruang barisan $l_{3/2}$, dan $l_{3/2}(\Delta)$ ruang bernorm, konvergen dan merupakan ruang banach.

Sebelumnya perhatikan bahwa untuk $(\mathbb{R}, \|.\|)$ dengan $\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, merupakan ruang Banach, artinya untuk setiap barisan Cauchy $\{x^n\} \subset \mathbb{R}$, selalu konvergen, yaitu untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli m, n dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x^m - x^n\| < E.$$

Selanjutnya akan dibuktikan

$$l_{3/2} = \left\{ x = \{x_i\} \middle| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} < \infty \right\}$$

dengan $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}}$ merupakan ruang Banach.

Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}}$ merupakan norma pada $l_{3/2}$ adalah sebagai berikut:

(I). $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}} > 0$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{3/2}$

Karena untuk setiap bilangan mutlak selalu lebih besar sama dengan 0.

$\|x\| = \sup_{i=1} |x_i| = 0$ jika dan hanya jika $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots.$ atau $(x_1, x_2, \ldots) = (0,0, \ldots)$, yaitu $x = \bar{0}$

(II). $\|\alpha x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha| + |x_k|)^{3/2}\right\}^{\frac{1}{3/2}}$

$= |\alpha| \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\}^{\frac{1}{3/2}}$

$= |\alpha| \, . \, \|x\|$

(IV). $\|x + y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k + y_k|)^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right\}^{\frac{1}{3/2}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{3/2}\right\}^{\frac{1}{3/2}}$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Terbukti $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\right)^{\frac{1}{3/2}}$ merupakan norma pada $l_{3/2}$

Selanjutnya akan ditunjukan $l_{3/2}$ merupakan ruang barisan yang lengkap.

a) Diambil sebarang bilangan Chauchy $\tilde{x}^{(n)} = \left\{x_k^{(n)}\right\} \subset l_{3/2}$ dengan

$$\tilde{x}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots\ x_1{}^{(n)} \ldots\right)$$
$$\tilde{x}_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \ldots\ x_2{}^{(n)} \ldots\right)$$
$$\tilde{x}_3 = \left(x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots\ x_3{}^{(n)} \ldots\right)$$
$$\vdots$$
$$\tilde{x}_k = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\ x_1{}^{(n)} \ldots\right)$$

sehingga diperoleh

$$\tilde{x}^{(n)} = \left\{x_k^{(n)}\right\} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\ldots\ x_k{}^{(m)}\right)$$
$$\tilde{x}^{(m)} = \left\{x_k^{(m)}\right\} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \ldots\ldots\ x_k{}^{(m)}\right)$$

$\tilde{x}^{(m)}, \tilde{x}^{(n)} \subset l_{3/2} \Leftrightarrow \{\tilde{x}^{(m)}\}, \{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}$ sebab;

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ berlaku:

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$\left(\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right) = \left(\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(m)} - \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(m)} - \tilde{x}_3{}^{(n)}, \ldots \tilde{x}_k{}^{(m)} - \tilde{x}_k{}^{(n)}\right)$$

$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} < \varepsilon$ atau

$$\left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rightarrow \left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Untuk setiap $m, n \geq n_0$ hal ini berakibat:

$$x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)} \text{ untuk setiap k}$$

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Atau diperoleh untuk setiap k barisan $\{x_k{}^{(n)}\}$ merupakan barisan bilangan Cauchy. Jadi untuk setiap k barisan $\{x_k{}^{(n)}\}$ konvergen. Katakanlah konvergen x_k atau, $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \; atau \lim_{n\to\infty}|x_k^{(n)} - x_k| = 0$

Dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$, mengingat (a) diperoleh

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} = |x_1^m - x_1^n| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x_1^{(m)} - x_1{}^{(n)}| + \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Jadi barisan $\{x_k{}^{(n)}\}$ konvergen ke $\tilde{x}$.

Selanjutnya $\|\tilde{x}\|_{3/2} = \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)} + \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} \leq \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} + \|\tilde{x}^n\|_{3/2} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$

Jadi, terbukti barisan chauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l_{3/2}$. Dengan kata lain $l_{3/2}$ merupakan ruang
banach.

Akan ditunjukan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang banach terhadap norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = |x_1| + \|\Delta_{\tilde{x}}\|_3$ dengan

$$\Delta\tilde{x} - \{\Delta x_k\} = \{x_{k+1} - x_k\}$$

Akan ditunjukan $l_{3/2}$ (Δ) merupakan ruang linier, sebab untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}$ $(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in l_{3/2}$

$\leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$ dan $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|y_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$

Maka $\Delta\,(\,\tilde{x} + \tilde{y}\,) = \Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{y} \in l_{3/2} \leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta x_k - \Delta y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+1} - x_k) + (y_{k+1} - y_k)|^{3/2}\right\}^{\frac{1}{3/2}}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(y_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$$

Jadi $\tilde{x} + \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta)$ (1)

Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$ diperoleh $\alpha\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$

$\Delta(\Delta\tilde{x}) = \{\Delta\alpha x_k\} \leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha||(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty\,. \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta)$ ruang linier.

Selanjutnya akan ditunjukan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_{(\Delta,\frac{3}{2})}$

$$\|.\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

(N_1) Untuk setiap $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$

$\|.\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} \geq 0$

$\|.\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = 0 \leftrightarrow |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} \geq 0$

$\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|(x_{k+1} - x_k)| = 0$ untuk setiap k
$\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|x_1 - x_2| = 0, |x_3 - x_2| = 0, \ldots\ldots$

$\leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \dots \dots = 0$
$\tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

(N_2) Untuk setiap α skalar$\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in l_{3/2}$
$\leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} < \infty$

Jadi $\|\Delta\tilde{x}\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha||(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= |\alpha| + |x_1| + |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3/2}} \right)$$
$$= |\alpha| \left(|x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} \right)$$
$$= |\alpha| \|\tilde{x}\|_{(\Delta,\frac{3}{2})}$$

(N_3) Untuk setiap$\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty \text{ dan } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$$

Jika $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = |x_1 + y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k - y_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= |x_1| + \|\Delta x\|_{(\frac{3}{2})} + |y_1| + \|\Delta y\|_{(\frac{3}{2})}$$
$$= \|\tilde{x}\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} + \|\Delta y\|_{(\Delta,\frac{3}{2})}$$

Dari N_1, N_2 dan N_3 benar bahwa $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan lengkap.Diambil sebarang bilangan Chauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{\frac{3}{2}}(\Delta)$dengan

$$\Delta\tilde{x}_1 = \left(\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_1^{(2)}, \Delta x_1^{(3)}, \dots \Delta x_1{}^{(n)}\right)$$
$$\Delta\tilde{x}_2 = \left(\Delta x_2^{(1)}, \Delta x_2^{(2)}, \Delta x_2^{(3)}, \dots \Delta x_2{}^{(n)}\right)$$
$$\Delta\tilde{x}_2 = \left(\Delta x_3^{(1)}, \Delta x_3^{(2)}, \Delta x_3^{(3)}, \dots \Delta x_3{}^{(n)}\right)$$
$$\vdots$$
$$\Delta\tilde{x}_k = \left(\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots \Delta x_1{}^{(n)} \dots\right)$$

Sehingga diperoleh

$$\Delta\tilde{x}^{(n)} = \left\{\Delta x_k^{(n)}\right\} = \left(\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots\dots \Delta x_k{}^{(m)}\right)$$
$$\Delta\tilde{x}^{(m)} = \left\{\Delta x_k^{(m)}\right\} = \left(\Delta x_1^{(m)}, \Delta x_2^{(m)}, \Delta x_3^{(m)}, \dots\dots \Delta x_k{}^{(m)}\right)$$
$$\Delta\tilde{x}^{(m)}, \Delta\tilde{x}^{(n)} \subset l_{3/2} \Leftrightarrow \{\Delta\tilde{x}^{(m)}\}, \{\Delta\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2} \text{ sebab;}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan *m, n*$\geq n_0$ berlaku:

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{3/2} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$\left(\Delta\tilde{x}^{(m)} - \Delta\tilde{x}^{(n)}\right) = \left(\Delta x_1{}^{(m)} - \Delta x_1{}^{(n)}, \Delta x_2{}^{(m)} - \Delta x_2{}^{(n)}, \Delta x_3{}^{(m)} - \Delta x_3{}^{(n)}, \dots \Delta x_k{}^{(m)} - \Delta x_k{}^{(n)}\right)$$

Sehingga,

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)})\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \varepsilon$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan asli n_0 ε N sehingga untuk setiap dua bilangan *m, n* $\geq n_0$ benar bahwa

$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\frac{3}{2})} < \varepsilon$ atau $\left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)})\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\rightarrow \left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)})\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$

Berdasarkan persamaan diatas, hal ini berakibat untuk setiap $m, n \geq n_0$ benar bahwa:
$\{\Delta x_k{}^{(n)}\} = \left|x_{k+1}{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right| < \varepsilon$ barisan chaucy untuk setiap k

(a) $\Delta x_1{}^{(n)} = \{x_2{}^{(n)} - x_1{}^{(n)}\} = \{x_2{}^{(n)}\}$ - $\{x_1{}^{(n)}\}$ barisan bilagan chauchy.
Jadi ada x_1 sehingga $\{x_1{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_1 dan $\{x_2{}^{(n)}\}$ barisan bilangan chaucy. Jadi ada bilangan x_2 sehingga $\{x_2{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_2
hal ini berakibat:

$$\{\Delta x_2{}^{(n)}\} = \{x_2{}^{(n)} - x_1{}^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_2 - x_1$$
$$\lim_{n\to\infty}\{x_2{}^{(n)} - x_1{}^{(n)}\} = x_2 - x_1$$

(b) $\Delta x_2{}^{(n)} = \{x_3{}^{(n)} - x_2{}^{(n)}\} = \{x_3{}^{(n)}\}$ - $\{x_2{}^{(n)}\}$ barisan bilagan chauchy. Karena $\{x_2{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_2 maka $\{x_3{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_3
hal ini berakibat

$$\{\Delta x_2{}^{(n)}\} = \{x_3{}^{(n)} - x_2{}^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_3 - x_2$$
$$\lim_{n\to\infty}\{x_3{}^{(n)} - x_2{}^{(n)}\} = x_3 - x_2$$

(c) Selanjutnya dianggap benar $\{x_k{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_k untuk setiap k=1,2,3,....m, ibuktikan $\{x_{m-1}{}^{(n)}\}$ konvergen. Maka barisan $\{\Delta x_{m-1}{}^{(n)}\} = \{x_m{}^{(n)} - x_{m-1}{}^{(n)}\}$ barisan chaucy. Karena $\{x_{m-1}{}^{(n)}\}$ dan $\{x_m{}^{(n)}\}$ barisan bilangan chaucy yang konvergen ke x_{m-1} dan x_m, maka $\{x_m{}^{(n)}\}$ barisan bilangan chaucy. Jadi ada bilangan x_m sehingga $\{x_m{}^{(n)}\}$ konvergen x_m dan ada x_{m-1} sehingga $\{x_{m-1}{}^{(n)}\}$ konvergen ke x_{m-1}

Akan ditunjukan $l_{3/2}$ (Δ_2) merupakan ruang linier, sebab:
untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}$ $(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2\tilde{x}, \Delta_2\tilde{y} \in l_{3/2}$

$\leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_{k+2} - 2x_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$ dan $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|y_{k+2} + 2y_{k+1} + x_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$

Maka $\Delta_2\ (\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta_2\tilde{x} + \Delta_2\tilde{y} \in l_{3/2} \leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2 x_k - \Delta_2 y_k|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k) + (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)|^{3/2}\right\}^{\frac{1}{3/2}}$$
$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$$

Jadi $\Delta_2(\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta_2\tilde{x} + \Delta_2\tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta)$ (3)

Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$ diperoleh $\alpha\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$ sebab:

$\Delta_2(\alpha\tilde{x}) = \{\Delta_2\alpha x_k\} \leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha||(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$
$$= |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ ruang linier.

Selanjutnya akan ditunjukan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_{(\Delta,\frac{3}{2})}$

$$\|.\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

(N_1) Untuk setiap $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$

$$\|.\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

$$\|.\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = 0 \leftrightarrow |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

$\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)| = 0$ untuk setiap k
$\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|x_3 - x_2 + x_1| = 0, |x_4 - x_3 + x_2| = 0, \dots \dots$
$\leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \dots \dots = 0$
$\tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

(N_2) Untuk setiap α skalar$\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2\tilde{x} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty}|x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k|^{\frac{3}{2}} < \infty$$

Jadi $\|\alpha\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha||(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$= |\alpha||x_1| + |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |\alpha|\left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3/2}}\right)$$

$$= |\alpha|\left(|x_1| + \|\Delta_2\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})}\right)$$

$$= |\alpha|\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})}$$

(N_3) Untuk setiap$\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2\tilde{x}, \Delta_2\tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty \text{ dan } \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \infty$$

Jika $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = |x_1 + y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2(x_k - y_k)|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{x}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_2\tilde{y}|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= |x_1| + \|\Delta_2 x\|_{(\frac{3}{2})} + |y_1| + \|\Delta_2 y\|_{(\frac{3}{2})}$$

$$= \|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} + \|\Delta y\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})}$$

Dari N_1, N_2 dan N_3 benar bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukan $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan lengkap.
Diambil sebarang bilangan Chauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{\frac{3}{2}}(\Delta_2)$dengan

$$\Delta_2\tilde{x}_1 = \left(\Delta_2 x_1^{(1)}, \Delta_2 x_1^{(2)}, \Delta_2 x_1^{(3)}, \dots \Delta_2 x_1{}^{(n)}\right)$$
$$\Delta_2\tilde{x}_2 = \left(\Delta_2 x_2^{(1)}, \Delta_2 x_2^{(2)}, \Delta_2 x_2^{(3)}, \dots \Delta_2 x_2{}^{(n)}\right)$$
$$\Delta_2\tilde{x}_2 = \left(\Delta_2 x_3^{(1)}, \Delta_2 x_3^{(2)}, \Delta_2 x_3^{(3)}, \dots \Delta_2 x_3{}^{(n)}\right)$$
$$\vdots$$
$$\Delta_2\tilde{x}_k = \left(\Delta_2 x_1^{(n)}, \Delta_2 x_2^{(n)}, \Delta_2 x_3^{(n)}, \dots \Delta_2 x_1{}^{(n)} \dots\right)$$

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Sehingga diperoleh

$$\Delta_2\tilde{x}^{(n)} = \left\{\Delta_2 x_k^{(n)}\right\} = \left(\Delta_2 x_1^{(n)}, \Delta_2 x_2^{(n)}, \Delta_2 x_3^{(n)}, \dots\dots \Delta_2 x_k{}^{(m)}\right)$$

$$\Delta_2\tilde{x}^{(m)} = \left\{\Delta_2 x_k^{(m)}\right\} = \left(\Delta_2 x_1^{(m)}, \Delta_2 x_2^{(m)}, \Delta_2 x_3^{(m)}, \dots\dots \Delta_2 x_k{}^{(m)}\right)$$

$$\Delta_2\tilde{x}^{(m)}, \Delta_2\tilde{x}^{(n)} \subset l_{3/2} \Leftrightarrow \left\{\Delta_2\tilde{x}^{(m)}\right\}, \left\{\Delta_2\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l_{3/2}\ (\Delta_2)\text{sebab;}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan *m, n*$\geq n_0$ berlaku:

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta_2 3/2)} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$\Delta_2\left(\tilde{x}^{(m)} - \Delta\tilde{x}^{(n)}\right) = \Delta_2\left(x_1{}^{(m)} - \Delta x_1{}^{(n)}, \Delta x_2{}^{(m)} - \Delta x_2{}^{(n)}, \Delta x_3{}^{(m)} - \Delta x_3{}^{(n)}, \dots \Delta x_k{}^{(m)} - \Delta x_k{}^{(n)}\right)$$

sehingga,

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_2 \left|x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \varepsilon$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan asli $n_0\ \varepsilon\ N$ sehingga untuk setiap dua bilangan *m, n* $\geq n_0$ benar bahwa

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ atau } \left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta_2(x_k - y_k)\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rightarrow \left|\tilde{x}_1{}^{(m)} - \tilde{x}_1{}^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta_2(x_k - y_k)\right|^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan persamaan diatas, hal ini berakibat untuk setiap *m, n*$\geq n_0$ hal ini benar bahwa:

$\left\{\Delta_2 x_k{}^{(n)}\right\} = \left\{x_{k+2}{}^{(n)} - 2x_{k+1}{}^{(n)} + x_k{}^{(n)}\right\}$ untuk setiap k

(a) $\Delta_2 x_k{}^{(n)} = \left\{x_3{}^{(n)} - 2x_2{}^{(n)} + x_1{}^{(n)}\right\} = \left\{x_3{}^{(n)}\right\} - \left\{2x_2{}^{(n)}\right\} + \left\{x_1{}^{(n)}\right\}$barisan bilangan chauchy.
Jadi jika ada x_3 sehingga $\left\{x_3{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_3 dan jika ada $\left\{2x_2{}^{(n)}\right\}$ sehingga $2x_2$ kemudian jika ada $\left\{x_1{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_1
hal ini berakibat:

$$\left\{\Delta_2 x_2{}^{(n)}\right\} = \left\{x_3{}^{(n)} - 2x_2{}^{(n)} + x_1{}^{(n)}\right\} \text{ konvergen ke } x_3 - 2x_2 + x_1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_3{}^{(n)} - 2x_2{}^{(n)} + x_1{}^{(n)}\right\} = x_3 - 2x_2 + x_1$$

(b) $\Delta_2 x_2{}^{(n)} = \left\{x_4{}^{(n)} - 2x_3{}^{(n)} + x_2{}^{(n)}\right\} = \left\{x_4{}^{(n)}\right\} - \left\{2x_3{}^{(n)}\right\} + \left\{x_2{}^{(n)}\right\}$barisan bilangan chauchy. Jadi jika ada x_4 sehingga $\left\{x_4{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_4 dan jika ada $\left\{3^{(n)}\right\}$ sehingga $2x_3$ kemudian jika ada $\left\{x_2{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_2
berakibat :

$$\left\{\Delta_2 x_2{}^{(n)}\right\} = \left\{x_4{}^{(n)} - 2x_3{}^{(n)} + x_2{}^{(n)}\right\} \text{ konvergen ke } x_4 - 2x_3 + x_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_4{}^{(n)} - 2x_3{}^{(n)} + x_2{}^{(n)}\right\} = x_4 - 2x_3 + x_2$$

(c) $\Delta_2 x_3{}^{(n)} = \left\{x_5{}^{(n)} - 2x_4{}^{(n)} + x_3{}^{(n)}\right\} = \left\{x_5{}^{(n)}\right\} - \left\{2x_4{}^{(n)}\right\} + \left\{x_3{}^{(n)}\right\}$barisan bilangan chauchy. Jadi jika ada x_5 sehingga $\left\{x_5{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_5 dan jika ada $\left\{2x_4{}^{(n)}\right\}$ sehingga konvergen $2x_4$ kemudian jika ada $\left\{x_3{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_3
berakibat :

$$\left\{\Delta_2 x_3{}^{(n)}\right\} = \left\{x_5{}^{(n)} - 2x_4{}^{(n)} + x_3{}^{(n)}\right\} \text{ konvergen ke } x_5 - 2x_4 + x_3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_5{}^{(n)} - 2x_4{}^{(n)} + x_3{}^{(n)}\right\} = x_5 - 2x_4 + x_3$$

(d) Selanjutnya dianggap benar $\left\{x_k{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_k untuk setiap k=1,2,3,....m, dibuktikan $\left\{x_{m-1}{}^{(n)}\right\}$ konvergen. Maka barisan $\left\{\Delta x_{m-1}{}^{(n)}\right\} = \left\{x_m{}^{(n)} - x_{m-1}{}^{(n)}\right\}$ barisan chaucy. Karena $\left\{x_{m-1}{}^{(n)}\right\}$ dan $\left\{x_m{}^{(n)}\right\}$ barisan bilanganchaucy yang konvergen ke x_{m-1} dan x_m, maka $\left\{x_m{}^{(n)}\right\}$ barisan bilangan chaucy. Jadi ada bilangan x_m sehingga $\left\{x_m{}^{(n)}\right\}$ konvergen x_m dan ada x_{m-1} sehingga $\left\{x_{m-1}{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_{m-1}

Berakibat $\left\{\Delta_2 x_{m-1}{}^{(n)}\right\} = \left\{x_m{}^{(n)} - x_{m-1}{}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_m - x_{m-1} dan diperoleh. Berdasarkan nilai (a), (b), (c), dan (d) diperoleh.

Barisan $\{\Delta_2 {x_k}^{(n)}\}$ konvergen untuk setiap k.
Jadi $\{\Delta_2 {x_k}^{(n)}\}$ konvergen ke $\Delta_2\tilde{x}$ dengan $\tilde{x} = \{x_k\}$

$$\|\Delta_2\tilde{x}^{(m)}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} = \|\Delta_2\tilde{x} - \Delta_2\tilde{x}^{(n)} + \Delta_2\tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2,3/2)} \quad (5)$$

$$\leq \|\Delta_2\tilde{x} - \Delta_2\tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2,3/2)} + \|\Delta_2\tilde{x}^{(m)}\|_{(\Delta_2,\frac{3}{2})} < \infty \quad (6)$$

Jadi berdasarkan (5) dan (6) terbukti barisan chaucy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{\frac{3}{2}}(\Delta_2)$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l_{3/2}(\Delta_2)$. Jadi $\Delta_2\tilde{x} \in l_{3/2}$ atau $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$. Dengan kata lain bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ lengkap.
Dengan demikian terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang banach.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- Ruang barisan $(l_{3/2}, \|.\|_{3/2})$ dengan norma $\|x\|_3 = \{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{3/2}\}^{\frac{1}{3/2}}$ merupakan ruang banach.
- Ruang barisan $(l_{3/2}(\Delta), \|.\|_{(\Delta,3/2)})$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta,3/2)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_{3/2}$ merupakan ruang banach.
- Ruang barisan $(l_{3/2}(\Delta_2), \|.\|_{(\Delta_2,3/2)})$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta_2,3/2)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_{3/2}$ merupakan ruang banach.

5. Daftar Pustaka

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Gozali, M. 2009. *Ruang Norm dan Ruang Banach.* Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung.

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik Universities, Turkey.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons, inc, New York

Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.