



SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

**SEMINAR
NASIONAL**

**METODE KUANTITATIF II
2018**

**PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA**

**PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)**

“Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi”

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

**Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**

Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Managing Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Penerbit :

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi

Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019
Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin
tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah “Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa”.

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
Aliran MHD Fluida Nano Melewati Bola Bermagnet Dengan Pengaruh Konveksi Campuran oleh <i>Basuki Widodo</i>	1
Inferensi Regresi Semiparametrik Untuk Data Hilang Menggunakan Metode <i>Likelihood</i> Empiris Dan Simulasinya Menggunakan R oleh <i>Yuana Sukmawaty</i> , dan <i>Nur Salam</i>	9
Penentuan Struktur Dan Kadar Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Lampung Barat Sebagai Insektisida Nabati Pada Kutu Putih Tanaman Kopi (<i>Planococcus Citri</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Hona Anjelina Putri</i> , dan <i>Nismah Nukmal</i>	17
Solusi Analitik Persamaan Laplace Pada Suatu Cakram oleh <i>Yulia Novita</i> , <i>Suharsono S.</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Dorrah Azis</i>	25
Kajian <i>Best-Fit</i> Distribusi Probabilitas Untuk Curah Hujan Harian Dan Aplikasinya Dalam Mitigasi Hujan Ekstrim Di Pulau Sumatera oleh <i>Achmad Raflie Pahlevi</i> , dan <i>Warsono</i>	28
Kuantifikasi Dan Penentuan Struktur Senyawa Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Pringsewu Dan Uji Toksisitas Terhadap Kutu Putih Sirsak (<i>Pseudococcus Cryptus</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Yayang Anas Persada</i> , dan <i>Nismah Nukma</i>	39
Barisan Bilangan Fibonacci <i>N</i> -Bebas oleh <i>Irmawati</i> , <i>Amanto</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Muslim Ansori</i>	49
Metode Estimasi <i>Diagonal Weighted Least Square</i> (DWLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Nurkholifa Sholihat</i> , dan <i>Netti Herawati</i>	53
<i>Singgah Pai</i> : Aplikasi Android Untuk Melestarikan Budaya Lampung oleh <i>Putri Sukma Dewi</i> , <i>Refiesta Ratu Anderha</i> , <i>Lily Parnabhakti</i> , dan <i>Yolanda Dwi Prastika</i>	62
Metode Estimasi <i>Weighted Least Square</i> (WLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Wardhani Utami Dewi</i> , dan <i>Rudi Ruswandi</i>	68
Perbandingan Metode Solusi Awal Layak Pada Data Biaya Pengiriman Beras Perum Bulog Divre Lampung oleh <i>Dwi Wahyu Lestari</i> , dan <i>Dian Kurniasari</i>	77

Segmentasi Kabupaten/ Kota Berdasarkan Karakteristik Penduduk Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 oleh <i>Agustina Riyanti, dan Tri Rena Maya Sari</i>	86
Penerapan Metode <i>Autoregressive Distributed Lag (Ardl)</i> Dalam Memodelkan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka Di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 oleh <i>Moni Dwi Fenski, Nusyirwan, dan Agus Sutrisno</i>	95
Simulasi Pemodelan Klaim Agregasi Dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson Dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh oleh <i>Rudi Ruswandi, Ira Syavitri, dan Subian Saidi</i>	105
Karakteristik Fungsi Phi (\emptyset) Euler oleh <i>Rini Karina Agustini, Suharsono S., Wamiliana, dan Notiragayu</i>	110
Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Pada Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi oleh <i>Farida, Agus Sutrisno, Dorrah Aziz, dan Tiryono Ruby</i>	114
Evaluasi Nilai UN Sma/Ma IPA Provinsi Lampung Dengan Graf <i>Maximum Spanning Tree</i> oleh <i>Sugama Maskar, Refiesta Ratu Anderha, dan Andriyanto</i>	123
Penentuan Rute Terpendek Pada Optimalisasi Jalur Tol Trans Jawa Dengan Menerapkan Algoritma <i>Floyd-Warshall</i> oleh <i>Maharani Damayanti, Notiragayu, dan La Zakaria</i>	131
Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau <i>Loop</i> Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam oleh <i>Dracjat Indrawan, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto</i>	139
Solusi Eksak Klasik Persamaan Tricomi oleh <i>Aura Purwaningrum, Suharsono S., Tiryono Ruby, dan Agus Sutrisno</i>	144
Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Empat oleh <i>Lucia Dessie Natasha, Wamiliana, Aang Nuryaman, dan Amanto</i>	148
Beberapa Penggunaan Rantai Markov Pada Saat Kondisi Stabil (Steady State) oleh <i>Dimas Rahmat Saputra, Dian Kurnia Sari, dan Wamiliana</i>	157
Ruang Barisan Selisih $L_{3/2}(\Delta_2)$ oleh <i>Aulia Rahman, Muslim Anshori, dan Dorrah Aziz</i>	163
Solusi Analitik Untuk Sistem KDV Homogen Dengan Metode Analisis Homotopi (HAM) oleh <i>Anita Rahmasari, Suharsono S., dan Asmiati</i>	171
Alokasi Dana Dari Premi Asuransi Jiwa Syariah Menggunakan Metode Dwiguna oleh <i>Rudi Ruswandi, Arum Mardiyah Nurvitasari, dan La Zakaria</i>	178

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan oleh <i>Karomani dan Nusyirwan</i>	184
Perbandingan <i>MVE-BOOTSTRAP</i> dan <i>MCD-BOOTSTRAP</i> dalam Analisis Regresi Linear Berganda pada Data Berukuran Kecil yang Mengandung Pencilan oleh <i>Ario Pandu, dan Khoirin Nisa</i>	192
Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor oleh <i>A.S Awalluddin</i>	202
Iteraksi Inflasi dan Jumlah Uang Beredar di Indonesia dengan Model Bivariate Vector Autoregressive oleh <i>K. Nurika Damayanti</i>	211
Pengelompokan Kabupaten/ Kota Berdasarkan Indikator Pembangunan Daerah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Abdul Kadir</i>	222
Penggunaan Teori Antrian <i>Multi-Server</i> Dengan Distribusi Erlang oleh <i>Muhammad Taufik Rizal , Widiarti, Wamiliana, dan Rudi Ruswandi</i>	228
Aplikasi <i>Multiple Classification Analysis</i> (MCA) Dalam Analisis Pengaruh Variabel Sosial Ekonomi dan Demograf Terhadap Lama Sekolah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Desliyani Tri Wandita</i>	237
Keanekaragaman Arthropoda Tanah Pada Dua Tipe Pengelolaan Lahan Kopi (<i>Coffea spp.</i>) di Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat oleh <i>Siti Ardiyanti, Suratman Umar, Nismah Nukmal, dan M. Kanedi</i>	244
Perbandingan <i>Mean Squared Error</i> (MSE) Metode <i>Jackknife</i> dan <i>Bootstrap</i> Pada Pendugaan Area Kecil Model Logit-Binomial oleh <i>Shindy Dwiyanti, Widiarti, dan Khoirin Nisa</i>	252
Aplikasi Distribusi Statistik dalam Memonitor Kualitas Udara di Bukit Kotatabang oleh <i>Raeni Chindi Defi Ocvilia, Achmad Raflie Pahlevi, Warsono, dan Mareta Asnia</i>	256
Klustering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017 oleh <i>Tri Rena Mayasari</i>	263
Konstruksi Model Aljabar Max-Plus Interval Atas Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track oleh <i>Tri Utomo ,dan Eristia Arfi</i>	271

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK DENGAN PENGARUH VAKSINASI

Farida¹, Agus Sutrisno¹, Dorrah Aziz¹, Tiryono Ruby¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145

Penulis Korespondensi : farida.pasha1569@gmail.com¹

Abstrak

Kondisi umum kesehatan dipengaruhi oleh berbagai faktor yaitu lingkungan, perilaku, dan pelayanan kesehatan. Dari faktor inilah muncul masalah kesehatan, yaitu penyakit. Salah satunya ialah campak. Campak adalah infeksi virus yang ditandai dengan munculnya ruam yaitu bintik-bintik merah di seluruh tubuh dan sifatnya sangat menular. Bagi penderita campak, virus campak ada di dalam percikan cairan yang dikeluarkan saat mereka bersin dan batuk. Virus campak akan menyebar, saat menghirup percikan cairan ini atau menyentuh benda yang sudah terkontaminasi virus ini siapapun dapat tertular. Analisis model matematika penyebaran penyakit campak menggunakan sistem persamaan diferensial dengan peubah *Susceptible, Infected, Recovered* (SIR). Sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit campak, vaksinasi akan ditambahkan ke dalam model tersebut. Model yang diamati terdiri atas dua kasus berdasarkan titik kesetimbangannya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Kemudian, diberikan simulasi untuk setiap kasus yang menggambarkan perilaku dan kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Hasil yang diperoleh dari titik kesetimbangan bebas penyakit saat $R_0 < 1$ stabil, sehingga semakin lama penyakit campak akan menghilang dari populasi. Untuk titik kesetimbangan endemik saat $R_0 > 1$ stabil, maka saat kesetimbangan ini penyakit akan ada sampai pada waktu yang tidak terbatas.

Kata kunci: model SIR, campak, vaksinasi, sistem persamaan diferensial, kestabilan Routh-Hurwitz.

1. Pendahuluan

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika turut memberikan peranan dalam memodelkan dan menganalisis suatu permasalahan. Dengan menggunakan model matematika dapat menghasilkan suatu formulasi masalah yang dihadapi. Model matematika adalah suatu usaha dalam menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk matematika.

Penyebaran penyakit campak yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Model matematika yang sering digunakan untuk menganalisa penyebaran suatu penyakit adalah model SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Model epidemik membagi populasi menjadi populasi *Susceptible* (individu yang rentan terinfeksi penyakit), populasi *infected* (individu yang terinfeksi penyakit), dan populasi *recovered* (individu yang sembuh dari penyakit).

Vaksinasi merupakan pemberian vaksin ke dalam tubuh seseorang untuk memberikan kekebalan terhadap penyakit tersebut. Model yang akan terbentuk merupakan suatu persamaan diferensial. Persamaan tersebut akan digunakan untuk mencari titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada model SIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi serta mengetahui simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.

2. Bahan dan Metode

Model matematis epidemiologi SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan Mc Kendrick pada tahun 1927. Model tersebut terdiri dari tiga kategori yaitu: *susceptible* (S) atau individu yang rentan terserang penyakit, *infected* (I) atau individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan dan *recovered* (R) atau individu yang diasumsikan telah sembuh atau kekebalan tubuhnya telah kembali normal sehingga kebal terhadap penyakit (Murray, 2002).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling berkaitan dan konsisten. Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan sebuah derivatif fungsi x_n terhadap t , dan g_1 adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Neuhauser, 2004).

Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika diuraikan dalam sebuah persamaan differensial, maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol. Misalkan diberikan suatu sistem persamaan differensial yang terbentuk

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) dapat dikatakan sebagai titik kesetimbangan dari sistem (2), apabila dipenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan penyelesaian keseimbangan dari sistem (2) (Campbell and Haberman, 2008).

Teorema 1 (Olsder et al., 2011) diberikan teorema mengenai kestabilan suatu sistem nonlinier yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian.

1. Apabila semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan diferensial bernilai negatif, maka titik kesetimbangan dari sistem tersebut stabil.
2. Jika terdapat satu nilai eigen matriks Jacobian dari sistem persamaan diferensial bernilai positif, maka titik kesetimbangan dari sistem tersebut tidak stabil.

Kestabilan titik kesetimbangan merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan.

Matriks Jacobi dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali persamaan $Jx = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(\lambda I - J)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|\lambda I - J| = 0$. Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka dapat ditulis $\begin{bmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda - d \end{bmatrix}$ atau $\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$ (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Secara umum kestabilan suatu titik kesetimbangan mempunyai 2 perilaku, yaitu:

- 3.1 Stabil, jika
 - a. $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i , atau
 - b. Terdapat $Re(\lambda_i) = 0$ untuk sebarang j , dan $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i \neq j$.
- 3.2 Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu i sehingga $Re(\lambda_i) > 0$ (Tu, 1994).

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu kriteria yang digunakan untuk memperlihatkan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung. Jika suatu persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Adapun prosedur dalam kriteria *Routh-Hurwitz* adalah :

1. Persamaan polinom orde ke- n ditulis dalam bentuk $a_m s^n - a_{m-1} s^{n-1} + a_{m-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$,
2. Jika terdapat koefisien bernilai 0 atau negatif, maka terdapat satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif yang berarti sistem tersebut tidak stabil.
3. Jika seluruh koefisien bernilai positif, maka dapat dibentuk suatu matriks yang sering disebut *array Routh* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} S^n \\ S^{n-1} \\ S^{n-2} \\ S^{n-3} \\ \vdots \\ S^1 \\ S^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-2} \dots a_0 \\ a_{m-1} & a_{m-3} \dots 0 \\ b_1 & b_2 \dots b_k \\ c_1 & c_2 \dots c_k \\ \vdots & \vdots \dots \vdots \\ g_1 & 0 \dots 0 \\ h_1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Koefisien b_1, b_2, \dots, b_k dan c_1, c_2, \dots, c_k dapat ditentukan dengan formula-formula berikut.

$$b_1 = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-2} \\ a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix},$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-4} \\ a_{m-1} & a_{m-5} \end{vmatrix},$$

$$b_k = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-2k} \\ a_{m-1} & a_{m-2k+1} \end{vmatrix},$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$c_k = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-2k+1} \\ b_1 & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

4. Jumlah akar yang tidak stabil dapat terlihat pada banyaknya perubahan tanda dikolom pertama matriks (3).
5. Syarat perlu agar sistem dikatakan stabil adalah apabila koefisien dari persamaan karakteristik bernilai positif, sedangkan syarat cukupnya adalah apabila suku dari kolom pertama matriks (3) bernilai positif (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Dalam epidemiologi, *Next Generation Matrix* adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan angka reproduksi dasar. Matriks ini merupakan matriks yang dikonstruksi dari sub-sub populasi yang menyebabkan infeksi. Selanjutnya disusun matriks φ dan ψ dengan φ merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit dan ψ merupakan matriks laju perkembangan, kematian, atau kesembuhan. Kemudian perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi φ dan ψ di titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan F dan V adalah hasil masing-masing linearisasi dari φ dan ψ . Sehingga diperoleh *Next Generation Matrix* yaitu $K = FV^{-1}$. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari *Next Generation Matrix* (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah ini adalah:

1. Menentukan parameter laju perubahan individu pada subpopulasi SIR.

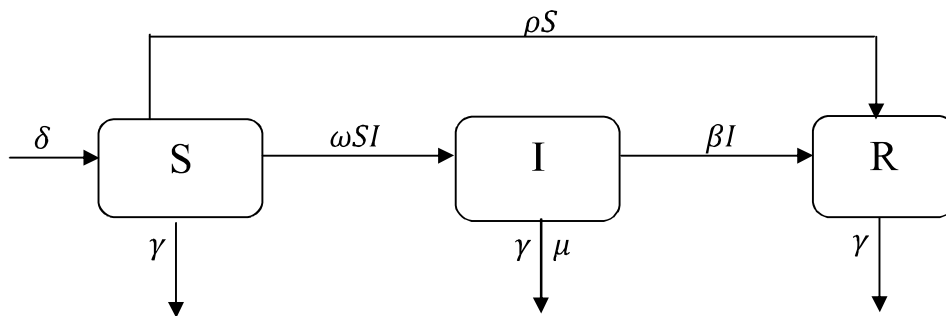
2. Mencari model matematika SIR untuk penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
3. Menentukan titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
4. Menganalisis kestabilan dari model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
5. Melakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.

3. Hasil dan Pembahasan

Pembentukan model penyebaran penyakit campak dibatasi dengan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

1. Populasi penduduk diasumsikan tertutup artinya tidak ada imigran dan emigran.
2. Populasi penduduk bersifat tidak konstan artinya laju kelahiran dan kematian diasumsikan tidak sama.
3. Setiap individu yang baru lahir dan yang masih hidup akan masuk dalam populasi rentan terhadap penyakit campak.
4. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
5. Penyakit menular melalui kontak langsung antara populasi rentan (*Susceptible*) dengan populasi terinfeksi (*Infected*).
6. Populasi terinfeksi (*Infected*) memiliki kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit campak.
7. Tidak ada masa inkubasi dari penyakit campak.
8. Setiap individu yang diberi vaksin masuk ke dalam kelas sembuh (*Recovered*) dan akan kebal terhadap penyakit campak. Kekebalan terjadi karena vaksin bersifat permanen artinya individu yang mendapatkan vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama.

Berdasarkan asumsi-asumsi dapat disajikan ke dalam diagram transfer berikut.



Gambar 1. Skema kompartemen populasi model SIR dengan pengaruh vaksinasi.

Dari skema kompartemen diperoleh model epidemiologi SIR dengan pengaruh vaksinasi ditulis ke sistem sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \rho S - \beta I - \gamma R \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dengan $\delta(t)$ merupakan jumlah kelahiran populasi, $\omega(t)$ merupakan laju kontak antara jumlah populasi *Susceptible* dengan *Infected*, $\gamma(t)$ merupakan laju kematian alami, $\mu(t)$ merupakan laju kematian yang disebabkan penyakit, $\beta(t)$ merupakan laju kesembuhan, dan $\rho(t)$ merupakan jumlah individu yang memperoleh vaksinasi. Nilai parameter δ , ω , γ , μ , β adalah positif. Batas laju vaksinasi adalah $0 \leq \rho \leq 1$. Karena asumsi menyatakan bahwa jumlah kelahiran tidak sama dengan jumlah kematian maka total populasi tidak konstan. Dari populasi N dapat ditulis persamaan berikut.

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (5)$$

Berdasarkan penelitian Awaluddin (2018) laju perubahan jumlah populasi N dengan jumlah kelahiran dikurangi kematian alami dari populasi N dan dikurangi dengan kematian yang disebabkan oleh penyakit pada populasi I (*infected*). Hal ini dapat dirubah ke persamaan berikut.

$$\frac{dN}{dt} = \delta - \gamma N - \mu I \quad (6)$$

Pada asumsi (2) dan (8) bahwa jumlah populasi tidak konstan karena perbedaan antara jumlah kelahiran dan kematian serta populasi S (*susceptible*) dan I (*infected*) akan menuju R (*recovered*), sehingga pada populasi R (*recovered*) dapat diganti dengan jumlah populasi $N(t)$, dengan demikian diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dN}{dt} &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Titik kesetimbangan dari sistem (7) terjadi pada saat $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, dan $\frac{dN}{dt} = 0$. Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit terjadi pada saat jumlah individu terinfeksi sama dengan nol ($I = 0$) sehingga di titik kesetimbangan bebas penyakit untuk sistem (7) diperoleh

$$E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho + \gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma} \right) \quad (8)$$

Untuk titik kesetimbangan endemik terjadi pada saat $I \neq 0$, sehingga di titik kesetimbangan endemik untuk sistem (7) diperoleh

$$E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma + \mu + \beta}{\omega}, (q - 1) \left(\frac{\rho + \gamma}{\omega} \right), \frac{\delta \omega - \mu(q - 1)(\rho + \gamma)}{\omega \gamma} \right) \quad (9)$$

dengan $q = \frac{\delta \omega}{(\rho + \gamma)(\gamma + \mu + \beta)}$.

Pada model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yang menyebabkan infeksi adalah kelas *Infected* sehingga pada sistem (7) yang digunakan adalah:

$$\frac{dI}{dt} = \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I$$

Akan membentuk $\varphi = [\omega SI]$ dan $\psi = [\gamma I + \mu I + \beta I]$, dengan φ merupakan matriks dari laju kontak antara populasi *Susceptible* dengan *Infected* dan ψ merupakan laju kematian alami, kematian yang disebabkan oleh penyakit dan kesembuhan dari penyakit.

Sehingga diperoleh $R_0 = \left[\frac{\omega \delta}{\rho + \gamma(\gamma + \mu + \beta)} \right]$.

Akan dilakukan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan sebagai berikut.
Tulis:

$$\begin{aligned} f(S, I, N) &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ g(S, I, N) &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ h(S, I, N) &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned} \quad (10)$$

maka matriks Jacobian dari persamaan (10) adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial N} \\ \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial N} \\ \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega I - \rho - \gamma & -\omega S & 0 \\ \omega I & \omega S - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit $E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho+\gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma}\right)$ ke persamaan (11) diperoleh matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$J(E_*) = \begin{bmatrix} -(\rho + \gamma) & -\frac{\omega\delta}{\rho + \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\omega\delta}{\rho + \gamma} - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_*)$ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J(E_*)) = 0$ dengan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh nilai eigen,

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 + \lambda^2(3\gamma + \mu + \beta + \rho - z) + \lambda(3\gamma^2 + 2\gamma\mu + 2\gamma\beta + 2\rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - 2\gamma z - \rho z) + \gamma^3 + \rho\gamma^2 + \mu\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \rho\gamma\mu + \rho\gamma\beta - \rho z\gamma - \gamma^2 z) = 0 \quad (12)$$

Untuk menunjukkan kestabilan dari persamaan karakteristik yang dijelaskan pada penelitian A'maludin (2016) dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, memisalkan:

$$\begin{aligned} a &= 3\gamma + \mu + \beta + \rho - z \\ b &= 3\gamma^2 + 2\gamma\mu + 2\gamma\beta + 2\rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - 2\gamma z - \rho z \\ c &= \gamma^3 + \rho\gamma^2 + \mu\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \rho\gamma\mu + \rho\gamma\beta - \rho z\gamma - \gamma^2 z \end{aligned}$$

dengan $z = \frac{\omega\delta}{\rho+\gamma}$

Selanjutnya dengan menuliskan persamaan (12) ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & c \\ \frac{ab-c}{a} & \\ \left(\frac{ab-c}{a}\right)a & 0 \\ \frac{ab-c}{a} & a \end{bmatrix} \quad (13)$$

Matriks (13) telah memenuhi syarat cukup pada teorema 1 (Olsder *et al.*, 2011) agar sistem tersebut dikatakan stabil karena semua suku pada kolom pertama matriks bertanda positif. Oleh sebab itu, karena syarat perlu dan syarat cukup sudah terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (12) stabil, yang artinya titik kesetimbangan bebas penyakit pada persamaan (8) dikatakan stabil. Dengan mensubstitusikan nilai titik endemik $E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}, (q-1)\left(\frac{\rho+\gamma}{\omega}\right), \frac{\delta\omega-\mu(q-1)(\rho+\gamma)}{\omega\gamma}\right)$ ke persamaan (11) diperoleh matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:
dengan $S = \frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}$ dan $I = (q-1)\left(\frac{\rho+\gamma}{\omega}\right)$
misal $S = x$ dan $I = y$

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\omega y - \rho - \gamma & -\omega x & 0 \\ \omega y & \omega x - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E^*)$ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J(E^*)) = 0$ dengan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh nilai eigen,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\lambda^3 + \lambda^2(-\omega x + \omega y + 2\gamma + \mu + \beta + \rho - \omega x \gamma + \omega y \gamma + 2\gamma^2 + \mu \gamma + \beta \gamma + \rho \gamma) + \lambda(\omega y \gamma \\ & + \omega y \mu + \omega y \beta - \omega x \rho + \rho \gamma + \rho \mu + \rho \beta - \omega x \gamma + \gamma^2 + \gamma \mu + \gamma \beta) + \omega y \gamma(\gamma + \mu + \beta) \\ & + \rho \gamma(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) + \gamma^2(-\omega x + \gamma + \mu + \beta)) \\ & = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Untuk menunjukkan kestabilan dari persamaan karakteristik yang dijelaskan pada penelitian A'maludin (2016) dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, memisalkan:

$$\begin{aligned} k &= -\omega x + \omega y + 2\gamma + \mu + \beta + \rho - \omega x \gamma + \omega y \gamma + 2\gamma^2 + \mu \gamma + \beta \gamma + \rho \gamma \\ l &= \omega y \gamma + \omega y \mu + \omega y \beta - \omega x \rho + \rho \gamma + \rho \mu + \rho \beta - \omega x \gamma + \gamma^2 + \gamma \mu + \gamma \beta \\ m &= \omega y \gamma(\gamma + \mu + \beta) + \rho \gamma(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) + \gamma^2(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menuliskan persamaan (14) ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ k & m \\ \frac{kl-m}{k} & \\ \left(\frac{kl-m}{k}\right)k & 0 \\ \frac{kl-m}{k} & k \end{bmatrix} \tag{15}$$

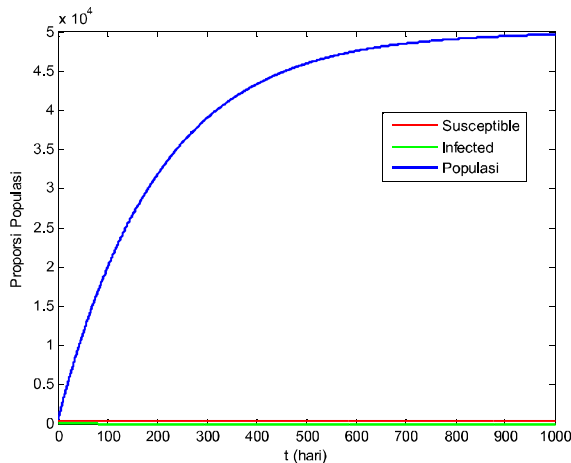
Matriks (15) telah memenuhi syarat perlu dan syarat cukup pada teorema 1 (Olsder, *et al.*, 2011), sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan (14) stabil dan dengan kata lain titik kesetimbangan endemik (9) stabil.

Berdasarkan penelitian Awaluddin (2018) dan adanya perubahan nilai parameter, diberikan nilai awal proporsi individu rentan, terinfeksi dan populasi dengan $S(0) = 450$, $I(0) = 50$ dan $N(0) = 500$. Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi. Dari simulasi dapat dilihat kestabilan model (7).

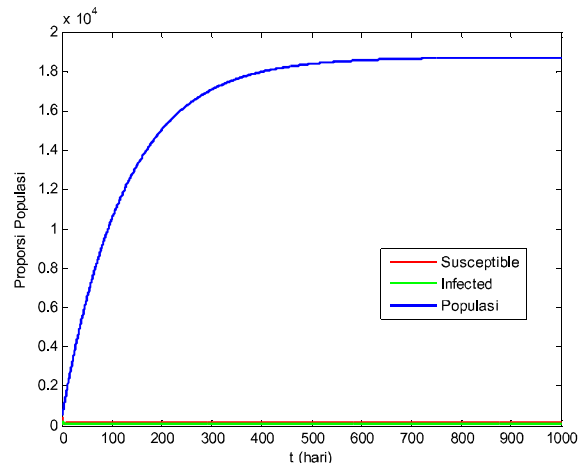
Tabel 1. Nilai Simulasi Parameter

Parameter	Nilai Parameter	
	Bebas penyakit Saat $R_0 < 1$	Endemik Saat $R_0 > 1$
δ	250	180
ω	0.0018	0.002
γ	0.005	0.007
μ	0.006	0.002
β	0.92	0.81
ρ	0.8	0.4

Berikut diberikan simulasi pada saat titik kesetimbangan bebas penyakit $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$.



Gambar 2. Simulasi titik kesetimbangan bebas penyakit $R_0 < 1$



Gambar 3. Simulasi titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$

l. Berdasarkan

populasi manusia semakin lama semakin meningkat. Sementara laju perubahan populasi terinfeksi (*Infected*) akan menuju kepunahan sehingga kurva akan menuju nol. Sedangkan untuk laju perubahan populasi rentan (*Susceptible*) akan menuju perbandingan laju kelahiran dengan laju kematian alaminya ditambah laju orang yang telah di vaksinasi. Diperoleh nilai eigen sebesar $(-0.8050, -0.0050, -3720)$ sehingga pada saat $R_0 < 1$ keadaan titik stabil.

Pada gambar 3 diperoleh $R_0 = 2.428 > 1$. Dari gambar 3, terlihat bahwa laju perubahan populasi manusia semakin lama semakin mengalami kenaikan, karena diakibatkan oleh faktor kematian alaminya dan jumlah kelahiran. Sementara untuk laju perubahan populasi terinfeksi (*Infected*) akan mendekati kurva populasi rentan (*Susceptible*). Sedangkan laju perubahan populasi rentan (*Susceptible*) menurun karena akan menuju perbandingan laju kelahiran dengan laju kematian alaminya ditambah laju orang yang telah divaksinasi. Diperoleh nilai eigen sebesar $(-0.0080 + 0.000i, -0.6169 + 0.4869i, -0.6169 - 0.4869i)$ sehingga pada saat $R_0 > 1$ keadaan titik kesetimbangan endemik stabil.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika SIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \rho S - \beta I - \gamma R \end{aligned}$$

Karena populasi S (*susceptible*) dan I (*infected*) akan menuju R (*recovered*) dan jumlah populasi tidak konstan karena perbedaan antara jumlah kelahiran dan kematian, sehingga pada populasi R (*recovered*) dapat diganti dengan jumlah populasi $N(t)$, dengan demikian diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dN}{dt} &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned}$$

2. Diperoleh dua titik kestabilan dari model matematika pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yaitu :
 - a. Titik kestabilan bebas penyakit yaitu $E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho+\gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma} \right)$ yang stabil pada saat $R_0 < 1$. Sehingga saat $R_0 < 1$, semakin lama penyakit campak akan menghilang dari populasi.
 - b. Titik kestabilan endemik penyakit yaitu $E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}, (q-1) \left(\frac{\rho+\gamma}{\omega} \right), \frac{\delta\omega-\mu(q-1)(\rho+\gamma)}{\omega\gamma} \right)$, yang stabil pada saat $R_0 > 1$. Sehingga saat kesetimbangan ini penyakit akan ada sampai pada waktu yang tidak terbatas.

5. Daftar Pustaka

- A'maludin, H., Faruk, A., dan Cahyono, E. S. (2016). Analisis Kestabilan Model Epidemik SIR untuk Penyakit Tuberkulosis, hlm. 207-213. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*, BKS-PTN Barat: Palembang
- Awaluddin, M., Affandi, P., dan Faisal. 2018. Model Epidemiologi SIR dengan Vaksinasi dan Pengobatan. *Jurnal Matriks*. 1:61-70.
- Campbell, S, L., and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. Princeton University Press: New Jersey.
- Derouich, M. and Boutayeb, A. 2008. An Avian Mathematical Model. *Applied Mathematical Science*. 36(2): 1749-1760.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biologi An Introduction. Third edition*. Springer-Verlag: New York Berlin Heidelberg.
- Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education: New Jersey.
- Olsder, G. J., et al. 2011. *Mathematical System Theory*. 4th Edition. VVSD: Netherland.
- Tu, PNV. 1994. *Dynamical System An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer Verlag: New York.