SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF II
2018

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPILIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)

"Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi"

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Managing Editor
Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Penerbit :
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi
Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019

ISBN No. 978-623-90150-0-8

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah "Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa".

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Unversitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

ISBN No. 978-623-90150-0-8

DAFTAR ISI

ISBN No. 978-623-90150-0-8

PENGGUNAAN TEORI ANTRIAN *MULTI-SERVER* DENGAN DISTRIBUSI ERLANG

Muhammad Taufik Rizal[1*], Widiarti[1], Wamiliana[1], Rudi Ruswandi[1]

[1]*Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung*
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
*Penulis Korespodensi : mtaufik.rizal11@gmail.com

Abstrak

Antrian merupakan keadaan dimana pelanggan harus menunggu giliran untuk mendapatkan jasa pelayanan. Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pada pelanggan dan pemrosesan masalahnya. Teori yang mempelajari lebih lanjut tentang sistem antrian itu adalah teori antrian. Berdasarkan susunan saluran dalam struktur antrian, terdapat 2 jenis sistem antrian yaitu sistem antrian single-server dan sistem antrian multi-server. Dalam penelitian ini, karena sifat kedatangan yang terjadi dalam sistem antrian yaitu kedatangan secara acak dan kedatangan secara konstan, maka tingkat kedatangan akan berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Sedangkan untuk waktu pelayanan memakai distribusi erlang dengan parameter μ dan k. Akan didiskusikan nilai-nilai dari rata-rata jumlah pelanggan baik yang sedang antri atau dalam keseluruhan sistem antrian dan rata-rata waktu yang dihabiskan pelanggan baik yang sedang antri atau dalam keseluruhan sistem antrian.

Kata kunci*:* *Distribusi Erlang; Multi-Server; Teori Antrian*

1. Pendahuluan

Kehidupan saat ini mengalami perkembangan yang sangat pesat di belahan dunia manapun. Dengan berkembangnya kehidupan saat ini, mengakibatkan timbulnya persaingan antar tiap elemen terutama dalam melayani pelanggan. Beberapa yang dapat diperhatikan pelanggan dalam hal pelayanan yaitu waktu pelayanan, disiplin pelayanan, ketepatan pelayanan, proses pelayanan, dan yang lainnya.

Pelayanan sangat terkait dengan antrian. Pelayanan yang baik yaitu pelayanan yang tidak membuat pelanggan menunggu sampai waktu yang lama akibat antrian yang cukup panjang. Beberapa penyebab antrian yang panjang yaitu waktu yang diperlukan server dalam melayani pelanggan cukup lama, jumlah pelanggan melebihi jumlah server yang ada, dan yang lainnya. Untuk mengatasi hal tersebut tidak cukup diselesaikan dengan sistem antrian yang mempunyai server tunggal (*single-server*), melainkan mempunyai server yang lebih dari satu (*multi-server*).

Karakteristik operasi dari sistem antrian dijelaskan secara luas oleh dua sifat statistik yang disebut distribusi peluang dari waktu antar kedatangan dan distribusi peluang dari waktu pelayanan. Untuk merumuskan model teori antrian yang menggambarkan sistem yang sebenarnya, perlu untuk menetapkan asumsi dari masing-masing distribusi tersebut, diantaranya waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan bersifat acak dan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan selanjutnya tidak terpengaruh dengan yang sebelumnya. Maka distribusi peluang yang cocok adalah distribusi Eksponensial, karena sifat pada distribusi Eksponensial sama seperti asumsi-asumsi tersebut.

Pada kenyataannya distribusi dari waktu pelayanan yang sesungguhnya seringkali menyimpang dari distribusi Eksponensial, seperti kebutuhan pelayanan dari pelanggan cukup banyak kesamaan, satu *server* hanya dapat mengerjakan beberapa tugas, dan yang kejadian lainnya yang tidak bisa jika menggunakan distribusi Eksponensial. Oleh karena itu, penting untuk mempunyai model-model antrian lain yang menggunakan distribusi-distribusi alternatif dari distribusi waktu pelayanan, salah satunya distribusi Erlang.

Distribusi Erlang adalah distribusi yang sangat penting dalam teori antrian karena mampu untuk memperoleh total waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh pelanggan yang memungkinkan server-server memproses tidak hanya satu tugas yang spesifik, melainkan barisan dari k tugas. Misalkan T_1, T_2, …, T_k adalah k peubah acak bebas dengan suatu distribusi eksponensial yang identik, dengan mean $\frac{1}{k\mu}$. Maka penjumlahan $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$ memiliki distribusi Erlang dengan parameter μ dan k. Sehingga penulis tertarik untuk mendiskusikan teori antrian *multi-server* dengan distribusi Erlang.

ISBN No. 978-623-90150-0-8

2. Bahan dan Metode

2.1. Bahan

2.1.1. Teori Antrian

Suatu proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut. Suatu sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pada pelanggan dan pemrosesan masalahnya (Bronson, 1996).

Dalam teori antrian, ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam mengatasi sebuah antrian agar lebih efektif.

1. Rata-rata jumlah pelanggan dalam suatu sistem antrian (L)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

2. Rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q)

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$$

3. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu antrian sampai dilayani (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Dengan:
L = Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian
L_q = Rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri
W = Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian
W_q = Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani

2.1.2. Distribusi Erlang

Suatu peubah acak (T) berdistribusi Erlang jika memiliki pdf sebagai berikut:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t} & ; untuk\ t \geq 0 \\ 0 & ; lainnya \end{cases}$$

dengan μ dan k adalah parameter (Hillier dan Liberman, 1980).
Nilai harapan dari distribusi Erlang adalah:

$$E(T) = \frac{1}{\mu}$$

Varian dari distribusi Erlang adalah:

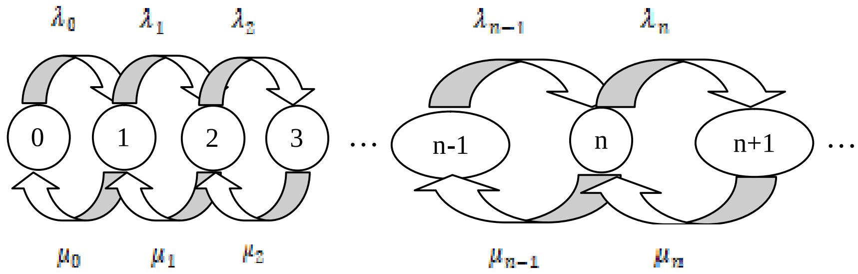
$$Var(T) = \frac{1}{k\,\mu^2}$$

2.1.3. Proses Kelahiran dan Kematian

Model antrian yang paling dasar diasumsikan bahwa input (pelanggan yang masuk) dan output (pelanggan yang keluar) dari sistem antrian yang terjadi berdasarkan proses kelahiran dan kematian. Secara konteks pada teori antrian, istilah kelahiran ditujukan untuk pelanggan yang baru masuk ke dalam sistem antrian, dan kematian ditujukan untuk pelanggan yang sudah pergi setelah selesai dilayani. State sistem pada waktu t (t ≥ 0), ditandai dengan N(t), yang merupakan jumlah pelanggan dalam sistem antrian pada waktu t.

Adapun asumsi dari proses kelahiran dan kematian yaitu:

1. Diberikan N(t) = n, distribusi peluang dari sisa waktu sampai kelahiran selanjutnya (kedatangan) adalah eksponensial dengan parameter λ_n = (n=0,1,2,...)
2. Diberikan N(t) = n, distribusi peluang dari sisa waktu sampai kematian selanjutnya (pelayanan selesai) adalah eksponensial dengan parameter μ_n = (n=0,1,2,...)
3. Peubah acak dari asumsi 1 dan asumsi 2 hubungannya bebas. Transisi selanjutnya pada state salah satu proses dari keduanya adalah n → n+1 (kelahiran tunggal) atau n → n-1 (kematian tunggal), bergantung pada variabel yang terlebih dahulu atau yang belakangan lebih kecil.



Gambar 1. Diagram proses kelahiran dan kematian (Hillier dan Liberman, 1980)

2.2. Metode

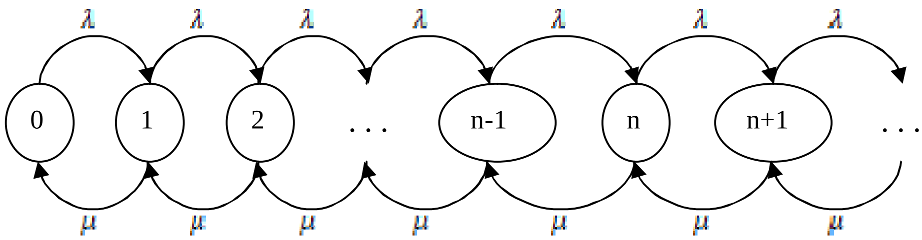
Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk mendapatkan peluang terdapat n pelanggan (P_n) pada antrian *single-server*.
2. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q).
3. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani (W_q).
4. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W).
5. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L).
6. Menganalisis persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk mendapatkan peluang terdapat n pelanggan (P_n) pada antrian *multi-server*.
7. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q).
8. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani (W_q).
9. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W).
10. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L).
11. Mengaplikasikan ke dalam bentuk studi kasus.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Sistem Antrian *Single-Server*

Teori antrian sangat berhubungan dengan proses kelahiran dan kematian, dimana pada proses kelahiran dan kematian terdapat persamaan keseimbangan. Untuk menjelaskan sebuah persamaan keseimbangan, anggap state 0. Proses memasuki state 0 hanya dari state 1. Jadi, peluang keseimbangan yang berada pada state 1 (P_1) menggambarkan proporsi waktu yang memungkinkan proses memasuki state 0. Jika diketahui proses berada pada state 1, tingkat rata-rata untuk memasuki state 0 adalah μ_1 (dengan kata lain, untuk setiap kumulatif unit waktu pada proses dihabiskan pada state 1, nilai harapan dari waktu yang dihabiskan dari state 1 menuju state 0 adalah μ_1). Oleh karena itu, keseluruhan tingkat rata-rata proses meninggalkan state saat ini untuk memasuki state 0 (rata-rata tingkat memasuki) adalah $\mu_1 P_1$. Dengan alasan yang sama, rata-rata tingkat meninggalkan dari state 0 menjadi $\lambda_0 P_0$. Jadi, persamaan keseimbangan untuk state 0 adalah $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$. Untuk setiap state lain terdapat dua kemungkinan transisi masuk dan keluar. Oleh karena itu, setiap sisi persamaan keseimbangan untuk state ini menggambarkan jumlah tingkat rata-rata untuk dua transisi yang terlibat.



Gambar 2. Diagram transisi untuk sistem antrian *single-server*

Tabel 1. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian

State	Kelahiran = Kematian
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1$ $P_2 = \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1 P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2}$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)$ $= \frac{\lambda_1}{\mu_2}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) P_0 + 0$ $P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$
. . .	. . .
n-1	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = \mu_{n-1} P_{n-1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ $P_n = \frac{\lambda_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} + \frac{\mu_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-2} P_{n-2}}{\mu_n}$ $= \frac{\lambda_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n}(\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2})$ $= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + 0$ $P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\lambda_{n-3} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_1} P_0$

Pada sistem antrian *single-server* berlaku:

$$\lambda_n = \lambda \quad ; n = 0,1,2, \dots$$
$$\mu_n = \mu \quad ; n = 1,2,3, \dots$$

Sehingga persamaan P_n menjadi:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\lambda_{n-3} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_1} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad ; n = 0,1,2, \dots$$

Pada akhirnya, syarat dari jumlah semua peluang sama dengan 1 dapat digunakan untuk mengevaluasi P_0. Asumsikan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right) P_0 = 1$$
$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)^{-1}$$
$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho$$

Sehingga persamaan P_n menjadi:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad ; n = 0,1,2, \dots$$

Setelah itu dapat menentukan persamaan L_q dari persamaan P_n yang telah diketahui.

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 \frac{d}{d\rho}\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho^2 \left(\frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}\right)$$
$$= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 \frac{d}{d\rho}\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho^2 \left(\frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}\right) = (1-\rho)\rho^2 \left(\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\rho^2\big((-1)\,(1-\rho)^{-2}\,(-1)\big) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2\frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^2\sigma^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan L_q dari model M/G/1 yang mengasumsikan bahwa sistem antrian mempunyai *single server* dan *exponential interarrival times* dengan mean = $\frac{1}{\mu}$ dan $\sigma^2 = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$. Persamaan di atas biasanya disebut formula *Pollaczek-Khintchine*. Sedangkan pada penelitian ini menggunakan model M/Ek/1 dimana model tersebut adalah bentuk spesial dari model M/G/1 yang waktu pelayanannya memakai distribusi Erlang dengan parameter bentuk k, mean = $\frac{1}{\mu}$, dan $\sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$. Selanjutnya formula *Pollaczek-Khintchine* diaplikasikan ke dalam model M/Ek/1, sehingga persamaan L_q menjadi:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2\left(\frac{1}{k\mu^2}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}{\lambda} = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

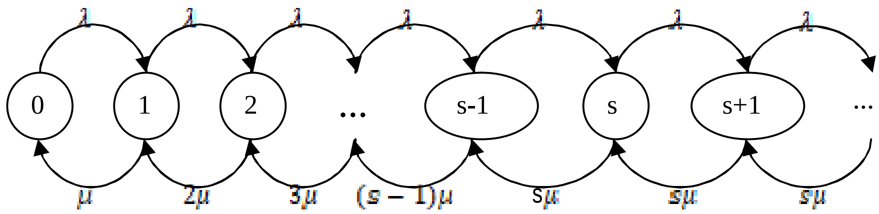
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda\left(\frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

3.2. Sistem Antrian *Multi-Server*

Ketika sistem antrian mempunyai banyak server atau *multi-server* (s >1), λ_n tetap didefinisikan seperti pada antrian *single-server* namun tidak untuk μ_n.

$$\lambda_n = \lambda \;\; ; n = 0,1,2,\ldots$$
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots,s \\ s\mu & ; n = s, s+1,\ldots \end{cases}$$



Gambar 3. Diagram transisi untuk sistem antrian *multi-server*

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Tabel 2. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = n\mu$; $n = 1,2,3,\dots,s$

State	Kelahiran = Kematian
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + 2\mu_2 P_2 = \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1$ $P_2 = \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + \frac{\mu_1 P_1}{2\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{2\mu_2}$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + \frac{1}{2\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + 0$ $= \frac{\lambda_1}{2\mu_2}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0\right)$
. . .	. . .
s-1	$\lambda_{s-2} P_{s-2} + s\mu_s P_s = (s-1)\mu_{s-1} P_{s-1} + \lambda_{s-1} P_{s-1}$ $P_s = \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + \frac{(s-1)\mu_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} - \frac{\lambda_{s-2} P_{s-2}}{s\mu_s}$ $= \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + \frac{1}{s\mu_s}((s-1)\mu_{s-1} P_{s-1} - \lambda_{s-2} P_{s-2})$ $= \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + 0$ $P_s = \frac{\lambda_{s-1}}{s\mu_s}\left(\frac{\lambda_{s-2}\lambda_{s-3}\dots\lambda_0}{(s-1)\mu_{s-1}(s-2)\mu_{s-2}\dots 1\mu_1} P_0\right)$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n\, n!} P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad ; 0 \le n \le s$$

Tabel 3. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = s\mu$; $n = s, s+1, s+2, \dots$

State	Kelahiran = Kematian
s	$\lambda_{s-1} P_{s-1} + s\mu_{s+1} P_{s+1} = s\mu_s P_s + \lambda_s P_s$ $P_{s+1} = \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + \frac{s\mu_s P_s}{s\mu_{s+1}} - \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_{s+1}}$ $= \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + \frac{1}{s\mu_{s+1}}(s\mu_s P_s - \lambda_{s-1} P_{s-1})$ $= \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + 0$ $= \frac{\lambda_s}{s\mu_{s+1}} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$ $P_{s+1} = \frac{\lambda}{s\mu} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$
s+1	$\lambda_s P_s + s\mu_{s+2} P_{s+2} = s\mu_{s+1} P_{s+1} + \lambda_{s+1} P_{s+1}$ $P_{s+2} = \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + \frac{s\mu_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} - \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+2}}$ $= \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + \frac{1}{s\mu_{s+2}}(s\mu_{s+1} P_{s+1} - \lambda_s P_s)$ $= \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + 0$ $= \frac{\lambda_{s+1}}{s\mu_{s+2}} \frac{\lambda_s}{s\mu_{s+1}} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$

	$P_{s+2} = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$
. . .	. . .
s+(n-s)-1	$\lambda_{s+(n-s)-2}P_{s+(n-s)-2} + s\mu_{s+(n-s)}P_{s+(n-s)} = s\mu_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1} + \lambda_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1}$ $P_{s+(n-s)} = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1}}{s\mu_{s+(n-s)}} + \frac{s\mu_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1}}{s\mu_{s+(n-s)}} - \frac{\lambda_{s+(n-s)-2}P_{s+(n-s)-2}}{s\mu_{s+(n-s)}}$ $P_{s+(n-s)} = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1}}{s\mu_{s+(n-s)}} + \frac{1}{s\mu_{s+(n-s)}}\left(s\mu_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1} - \lambda_{s+(n-s)-2}P_{s+(n-s)-2}\right)$ $P_{s+(n-s)} = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1}P_{s+(n-s)-1}}{s\mu_{s+(n-s)}} + 0$ $P_{s+(n-s)} = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$

Jika diasumsikan $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$, maka persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = s\mu$; $n = s, s+1, s+2, \ldots$ menjadi sebagai berikut:

$$P_{s+(n-s)} = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$$

$$P_n = \rho^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 \qquad ; n \geq s$$

Jadi persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian pada antrian *multi-server* adalah sebagai berikut:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & ; 0 \leq n \leq s \\ \\ \rho^{n-s} \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 & ; n \geq s \end{cases}$$

Nilai dari P_0 ditentukan dari persamaan P_n yang disubstitusikan ke $f(x_i) \geq 0$ dan $\sum f(x_i) = 1$. Jika $\lambda < s\mu$, dan asumsikan $\rho = {}^{\lambda}/_{(s\mu)} < 1$ agar sistem tidak *overload* dan tercipta *steady state*, maka diperoleh:

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s}\right)} = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Setelah itu dapat menentukan persamaan L_q.

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

Misalkan $j = n - s$, maka $n = s + j$. Sehingga,

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho^j P_0 = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} j\,\rho^j = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} \rho \frac{d}{d\rho} \rho^j$$

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j\right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{1-\rho}\right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho((-1)(1-\rho)^{-2}(-1))$$

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right)}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s}\right)\sigma}{s!\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan L_q dari model M/M/s yang berarti sistem antrian mempunyai *multi-server* dan berdistribusi Eksponensial untuk waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan. Pada penelitian ini menggunakan model M/E$_k$/s dimana waktu pelayanannya memakai distribusi Erlang. Distribusi Eksponensial untuk waktu pelayanan mengasumsikan variasi yang sangat besar $\sigma = \frac{1}{\mu}$, sedangkan distribusi Erlang mengasumsikan variasi yang berada di antara varian *zero* dan varian distribusi Eksponensial $\left(0 < \sigma < \frac{1}{\mu}\right)$, dengan $\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{\mu}$. Sehingga persamaan di atas menjadi:

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right)}{s!\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{s!\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2}$$

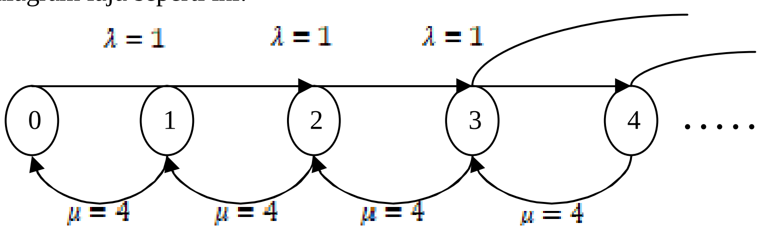
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2}}{\lambda} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\lambda\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\lambda\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda\left(P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\lambda\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}\right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,\sqrt{k}\,(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

3.3. Studi Kasus

1. Antonio menjalankan perbaikan sepatu seorang diri. Pelanggan datang membawa sepasang sepatu untuk diperbaiki menurut proses Poisson dengan laju rata-rata satu pasang tiap jam. Waktu yang diperlukan Antonio untuk memperbaiki satu sepatu mempunyai distribusi eksponensial dengan rata-rata 15 menit.
   a. Perhatikan rumusan sistem antrian ini jika sepatu (tidak sepasang) dianggap sebagai pelanggan. Dengan diagram laju seperti ini:



   Buatlah persamaan keseimbangannya.
   b. Sekarang perhatikan rumusan sistem antrian ini jika pasangan sepatu dianggap sebagai pelanggan. Tentukan model antrian yang sesuai dengan rumusan ini.
   c. Hitunglah ekspektasi jumlah pasangan sepatu dalam kios.
   d. Hitunglah ekspektasi jumlah waktu mulai dari pelanggan memasukkan pasangan sepatu sampai sepatu tersebut selesai diperbaiki dan siap diambil lagi.

<u>**Penyelesaian**</u>

a.

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$
$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)\,P_1$$
$$\lambda P_0 + \mu P_3 = (\lambda + \mu)\,P_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda P_{n-2} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu)\,P_n$$

b. Masukan distribusi Poisson dengan $\lambda = 1$ dan waktu pelayanan berdistribusi Erlang dengan $\mu = \frac{4}{2} = 2, k = 2$

c. $L = \rho + L_q = \rho + \frac{\lambda^2\,\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = 0.5 + \frac{1^2\;0.354^2 + 0.5^2}{2(1-0.5)} = 0.875$

d. $W = \frac{1}{\mu} + W_q = \frac{1}{\mu} + \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{0.875-0.5}{1} = 0.875$

2. Pabrik McAllister Company saat ini mempunyai dua gudang peralatan, masing-masing dioperasikan oleh satu karyawan dalam lokasi pabrik. Gudang peralatan pertama hanya digunakan untuk menyimpan peralatan/mesin berat, sedangkan yang kedua digunakan untuk menyimpan peralatan lain. Akan tetapi, untuk kedua gudang kedatangan mekanik untuk mendapatkan perawatan mempunyai laju rata-rata 18 kedatangan tiap jam dan ekspektasi waktu pelayanan adalah 3 menit.

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Oleh karena terdapat keluhan dari mekanik bahwa mereka harus menunggu di gudang terlalu lama untuk mendapatkan perawatan, diusulkan agar kedua gudang dijadikan satu sehingga kedua karyawan dapat melayani kedua jenis permintaan perawatan. Hal ini membuat laju kedatangan rata-rata mekanik untuk mendapatakan peralatan menjadi 36 kedatangan tiap jam dan ekspektasi waktu pelayanan tetap sebesar 3 menit. Akan tetapi, informasi mengenai bentuk probabilitas waktu antarkedatangan dan waktu pelayanan tidak diketahui sehingga tidak jelas model antrian mana yang paling sesuai.

Bandingkan kondisi sekarang dan usulan yang ada dalam hal ekspektasi total jumlah mekanik dalam gudang peralatan dan ekspektasi waktu tunggu (termasuk pelayanan) untuk setiap mekanik. Lakukan hal ini dengan membuat tabel berdasarkan model antrian eksponensial dan model antrian erlang (gunakan $k = 2$ untuk distribusi Erlang yang sesuai).

Penyelesaian

Pada sistem saat ini, $\lambda = 18$ dan $\mu = 20$, sehingga $\rho = 0{,}9$. Untuk sistem usulan $\lambda = 36$, $\mu = 20$, $s = 2$, sehingga $\rho = 0{,}9$.

Model	Saat Ini			Usulan	
	L di tiap penyimpanan	Total L	$W = L/\lambda$	L	$W = L/\lambda$
Eksponensial	9	18	0,5	9,47	0,263
Erlang	6,975	13,95	0,388	7,242	0,201

4. Kesimpulan

Berdasarkan analisis teori antrian yang telah dilakukan, distribusi Erlang sangat tepat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan antrian dalam kehidupan nyata. Bahkan jika dibandingkan dengan distribusi Eksponensial, distribusi Erlang tetap lebih baik. Sehingga tidak akan merugikan pihak penyelenggara layanan maupun pihak yang membutuhkan layanan.

5. Daftar Pustaka

Bronson, R. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research* (Terjemahan Hans Wospakrik). Erlangga, Jakarta.

Hillier, Frederick S. and Liberman, Gerald J. (1980). *Introduction to Operation Research*. 3rd ed. Holden-Day, USA.