



SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

**SEMINAR
NASIONAL**

METODE KUANTITATIF II

2018

**PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPILIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA**

**PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)**

“Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi”

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

**Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)

“Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi”

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Panitia Pelaksana

Ketua Pelaksana : Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Sekretaris : Dr. La Zakaria, M.Sc
Bendahara : Amanto, S.Si., M.Sc
Kesekretariatan : Subian Saidi, S.Si., M.Si
Dorrah Aziz, M.Si
Syamsul Huda, S.I.P, M.M
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Seksi-seksi :

Acara : Dr. Asmiati, M.Si
Dr. Notiragayu, M.Si
Drs. Rudi Ruswandi, M.Si
Drs. Eri Setiawan, M.Si
Aisyah Hirma Hindarti, S.A.N.

Konsumsi : Widiarti S.Si., M.Si
Dr. Khoirin Nisa, M.Si
Srimiati, S.Pd.

Transportasi : Drs. Nusyirwan, M.Si
Agus Sutrisno, S.Si., M.Si
Sugianto

Perlengkapan : Drs. Tiryono R., M.Sc., Ph.D
Anita
Edi Saputra
Obit Ahmad Al Fallah
Sovia Octaviana
Dede Rizki Amanda
Rizki Rizdiana Pratiana

Keuangan : Erni Rahmawati, S.Pd.
Risma Nurmei Winda, S.P.
Rizki Amalia Tanum, S.E.

Dokumentasi : Ali Suhendra
Ardi Bayu Purnomo
Thalibul Ckhair, S.I.P.
Abi Ilham Yurinja, S.I.Komp.

Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

Managing Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Azwar Rizaldy
Gesang Subarkah
Evrilia Rahmawati

Penerbit :

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi

Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com

Cetakan pertama, Februari 2019

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Allah s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah “Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa”.

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Allah s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	ii
Aliran MHD Fluida Nano Melewati Bola Bermagnet Dengan Pengaruh Konveksi Campuran oleh <i>Basuki Widodo</i>	1
Inferensi Regresi Semiparametrik Untuk Data Hilang Menggunakan Metode <i>Likelihood</i> Empiris Dan Simulasinya Menggunakan R oleh <i>Yuana Sukmawaty</i> , dan <i>Nur Salam</i>	9
Penentuan Struktur Dan Kadar Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Lampung Barat Sebagai Insektisida Nabati Pada Kutu Putih Tanaman Kopi (<i>Planococcus Citri</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Hona Anjelina Putri</i> , dan <i>Nismah Nukmal</i>	17
Solusi Analitik Persamaan Laplace Pada Suatu Cakram oleh <i>Yulia Novita</i> , <i>Suharsono S.</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Dorrah Azis</i>	25
Kajian <i>Best-Fit</i> Distribusi Probabilitas Untuk Curah Hujan Harian Dan Aplikasinya Dalam Mitigasi Hujan Ekstrem Di Pulau Sumatera oleh <i>Achmad Raflie Pahlevi</i> , dan <i>Warsono</i>	28
Kuantifikasi Dan Penentuan Struktur Senyawa Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal (<i>Gliricidia Maculata</i>) Kultivar Pringsewu Dan Uji Toksisitas Terhadap Kutu Putih Sirsak (<i>Pseudococcus Cryptus</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Yayang Anas Persada</i> , dan <i>Nismah Nukma</i>	39
Barisan Bilangan Fibonacci <i>N</i> -Bebas oleh <i>Irmawati</i> , <i>Amanto</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Muslim Ansori</i>	49
Metode Estimasi <i>Diagonal Weighted Least Square</i> (DWLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Nurkholifa Sholihat</i> , dan <i>Netti Herawati</i>	53
<i>Singah Pai</i> : Aplikasi Android Untuk Melestarikan Budaya Lampung oleh <i>Putri Sukma Dewi</i> , <i>Refiesta Ratu Anderha</i> , <i>Lily Parnabhakti</i> , dan <i>Yolanda Dwi Prastika</i>	62
Metode Estimasi <i>Weighted Least Square</i> (WLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Wardhani Utami Dewi</i> , dan <i>Rudi Ruswandi</i>	68
Perbandingan Metode Solusi Awal Layak Pada Data Biaya Pengiriman Beras Perum Bulog Divre Lampung oleh <i>Dwi Wahyu Lestari</i> , dan <i>Dian Kurniasari</i>	77

Segmentasi Kabupaten/ Kota Berdasarkan Karakteristik Penduduk Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 oleh <i>Agustina Riyanti, dan Tri Rena Maya Sari</i>	86
Penerapan Metode <i>Autoregressive Distributed Lag</i> (Ardl) Dalam Memodelkan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka Di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 oleh <i>Moni Dwi Fenski, Nusyirwan, dan Agus Sutrisno</i>	95
Simulasi Pemodelan Klaim Agregasi Dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson Dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh oleh <i>Rudi Ruswandi, Ira Syavitri, dan Subian Saidi</i>	105
Karakteristik Fungsi Phi (\emptyset) Euler oleh <i>Rini Karina Agustini, Suharsono S., Wamiliana, dan Notiragayu</i>	110
Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Pada Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi oleh <i>Farida, Agus Sutrisno, Dorrah Aziz, dan Tiryono Ruby</i>	114
Evaluasi Nilai UN Sma/Ma IPA Provinsi Lampung Dengan Graf <i>Maximum Spanning Tree</i> oleh <i>Sugama Maskar, Refiesta Ratu Anderha, dan Andriyanto</i>	123
Penentuan Rute Terpendek Pada Optimalisasi Jalur Tol Trans Jawa Dengan Menerapkan Algoritma <i>Floyd-Warshall</i> oleh <i>Maharani Damayanti, Notiragayu, dan La Zakaria</i>	131
Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau <i>Loop</i> Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam oleh <i>Dracjat Indrawan, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto</i>	139
Solusi Eksak Klasik Persamaan Tricomi oleh <i>Aura Purwaningrum, Suharsono S., Tiryono Ruby, dan Agus Sutrisno</i>	144
Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Empat oleh <i>Lucia Dessie Natasha, Wamiliana, Aang Nuryaman, dan Amanto</i>	148
Beberapa Penggunaan Rantai Markov Pada Saat Kondisi Stabil (Steady State) oleh <i>Dimas Rahmat Saputra, Dian Kurnia Sari, dan Wamiliana</i>	157
Ruang Barisan Selisih $L_{3/2}(\Delta_2)$ oleh <i>Aulia Rahman, Muslim Anshori, dan Dorrah Aziz</i>	163
Solusi Analitik Untuk Sistem KDV Homogen Dengan Metode Analisis Homotopi (HAM) oleh <i>Anita Rahmasari, Suharsono S., dan Asmiati</i>	171
Alokasi Dana Dari Premi Asuransi Jiwa Syariah Menggunakan Metode Dwiguna oleh <i>Rudi Ruswandi, Arum Mardhiyah Nurvitasari, dan La Zakaria</i>	178

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan oleh <i>Karomani dan Nusyirwan</i>	184
Perbandingan <i>MVE-BOOTSTRAP</i> dan <i>MCD-BOOTSTRAP</i> dalam Analisis Regresi Linear Berganda pada Data Berukuran Kecil yang Mengandung Pencilan oleh <i>Ario Pandu, dan Khoirin Nisa</i>	192
Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor oleh <i>A.S Awalluddin</i>	202
Iteraksi Inflasi dan Jumlah Uang Beredar di Indonesia dengan Model Bivariate Vector Autoregressive oleh <i>K. Nurika Damayanti</i>	211
Pengelompokan Kabupaten/ Kota Berdasarkan Indikator Pembangunan Daerah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Abdul Kadir</i>	222
Penggunaan Teori Antrian <i>Multi-Server</i> Dengan Distribusi Erlang oleh <i>Muhammad Taufik Rizal , Widiarti, Wamiliana, dan Rudi Ruswandi</i>	228
Aplikasi <i>Multiple Classification Analysis</i> (MCA) Dalam Analisis Pengaruh Variabel Sosial Ekonomi dan Demograf Terhadap Lama Sekolah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Desliyani Tri Wandita</i>	237
Keanekaragaman Arthropoda Tanah Pada Dua Tipe Pengelolaan Lahan Kopi (<i>Coffea</i> spp.) di Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat oleh <i>Siti Ardiyanti, Suratman Umar, Nismah Nukmal, dan M. Kanedi</i>	244
Perbandingan <i>Mean Squared Error</i> (MSE) Metode <i>Jackknife</i> dan <i>Bootstrap</i> Pada Pendugaan Area Kecil Model Logit-Binomial oleh <i>Shindy Dwiyaniti, Widiarti, dan Khoirin Nisa</i>	252
Aplikasi Distribusi Statistik dalam Memonitor Kualitas Udara di Bukit Kotatabang oleh <i>Raeni Chindi Defi Ocvilia, Achmad Raflie Pahlevi, Warsono, dan Mareta Asnia</i>	256
Klastering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017 oleh <i>Tri Rena Mayasari</i>	263
Konstruksi Model Aljabar Max-Plus Interval Atas Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track oleh <i>Tri Utomo ,dan Eristia Arfi</i>	271

ALIRAN MHD FLUIDA NANO MELEWATI BOLA BERMAGNET DENGAN PENGARUH KONVEKSI CAMPURAN

Basuki Widodo

*Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD) - ITS
Kampus ITS Keputih Sukolilo Surabaya (60111)
E-mail: b_widodo@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Fluida nano merupakan larutan yang terdiri atas fluida cair sebagai fluida dasar dan partikel padat nano. Aliran magnetohidrodinamik (MHD) adalah aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik akibat medan magnet. Merujuk pada hasil riset peneliti sebelumnya bahwa medan magnet dan konveksi dapat mempengaruhi kecepatan dan temperatur pada fluida. Pada makalah ini dibahas mengenai model matematika dan penyelesaian numeriknya dari permasalahan aliran MHD pada lapisan batas yang mengalir melalui bola bermagnet didalam fluida nano dengan pengaruh konveksi campuran. Model matematika ini dibangun dari persamaan kontinuitas massa, persamaan momentum, dan persamaan energi. Model ini selanjutnya ditransformasikan kebentuk non-dimensi. Selanjutnya dengan teori potensial, yaitu dengan memperkenalkan fungsi aliran dan kecepatan potensial, model non dimensi tersebut dibawa ke teori lapisan batas. Selanjutnya diselesaikan dengan metode Keller-Box. Dari metode Keller-Box ini selanjutnya diselesaikan secara numerik menggunakan metode Beda Hingga Implisit Euler. Diperoleh hasil numerik bahwa peningkatan nilai parameter magnetik mengakibatkan nilai kecepatan dan temperatur mengalami penurunan. Selanjutnya, dengan meningkatkan nilai parameter konveksi campuran diperoleh nilai kecepatan dan temperatur meningkat. Demikian juga dengan meningkatkan bilangan Prandtl diperoleh nilai kecepatan dan temperatur menurun. Dan dengan meningkatkan besaran nilai fraksi volume fluida nano diperoleh nilai kecepatan menurun sedangkan nilai temperatur meningkat.

Kata Kunci: *Fluida Nano, Aliran Magnetohidrodinamik, Metode Keller-Box, Metode Beda Hingga Implisit Euler.*

1. Pendahuluan

Fluida adalah zat yang dapat berubah bentuk secara kontinu apabila terkena tegangan geser (Widodo,2012). Berdasarkan viskositasnya, fluida terdiri dari dua jenis, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Contoh dari fluida Newtonian adalah fluida nano. Fluida nano merupakan larutan yang mengandung partikel padat nano dengan ukuran satu sampai 100 nanometer (nm) didalam fluida dasar (Ramadhan, 2012). Fluida dasar yang digunakan dapat berupa air, oli, minyak dan sebagainya. Sedangkan contoh dari partikel padat nano seperti Au (Emas), Cu (Tembaga), Al_2O_3 (Alumina), dan TiO_3 (Titania). Partikel nano Cu memiliki tingkat konduktivitas termal yang tinggi. Fluida dasar yang digunakan biasanya berupa air. Partikel nano Cu jika dicampurkan dengan fluida dasar air dan dengan adanya pengaruh medan magnet, maka menjadi fluida yang dapat menghantarkan arus listrik, sehingga dapat disebut sebagai fluida yang memiliki karakteristik magnetohidrodinamik.

Penggunaan aliran magnetohidrodinamik banyak diterapkan dalam perkembangan teknologi dan industri, contohnya pada pengeboran minyak, pemipaan zat-zat kimia pada pabrik dan penggerak pada kapal. Merujuk pada hasil riset peneliti sebelumnya, selain medan magnet, kecepatan dan temperatur pada fluida juga dapat dipengaruhi oleh konveksi campuran. Terdapat beberapa penelitian mengenai pengaruh konveksi campuran pada aliran fluida, seperti pada penelitian Ghani dkk (2014) tentang model aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik yang melewati sebuah bola dan dikaji pengaruh parameter konveksi campuran yang mempengaruhi karakteristik aliran fluida. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Ismail, dkk (2017) mengenai pengaruh MHD pada aliran fluida dengan konveksi campuran melewati bola silinder dalam keadaan tak tunak.

Dalam makalah ini telah dikaji dan diteliti mengenai magnetohidrodinamik dari aliran fluida nano tak tunak yang dipengaruhi oleh konveksi campuran yang mengalir melewati bola bermagnet secara teori dengan membuat model matematikanya. Selanjutnya diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga implisit Euler untuk mengkaji pengaruhnya terhadap kecepatan aliran fluida dan temperatur.

2. Metode Penelitian

Tahapan-tahapan yang telah dilakukan adalah sebagai berikut

1. Studi Literatur

2. Pembangunan Model Matematika

Pada tahap ini dilakukan dalam beberapa langkah:

- i. Penurunan persamaan konversi massa dan hukum-hukum Fisika yang berkaitan dengan permasalahan dan penentuan kondisi batas dengan melakukan pengamatan terhadap aliran fluida yang melewati bola bermagnet.
- ii. Persamaan kemudian dirubah secara berturut-turut menjadi model dimensional dan model non-dimensional lalu mentransformasikan menjadi persamaan non-similaritas.

3. Tahap Penyelesaian Model

Persamaan non-similaritas yang telah diperoleh diselesaikan dengan metode beda hingga implicit Euler.

4. Tahap Simulasi Numerik.

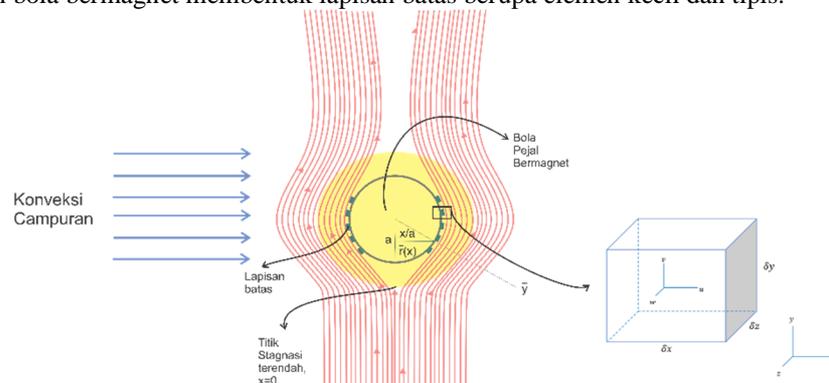
5. Tahap Analisis dan Pembahasan

6. Tahap Finalisasi

Pada tahap ini ditarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan dari tahap sebelumnya.

3. Hasil dan Pembahasan

Fluida yang digunakan adalah fluida nano. Fluida nano yang terinduksi magnet mengalami gesekan dengan permukaan bola bermagnet membentuk lapisan batas berupa elemen kecil dan tipis.



Gambar 1 Sistem Fisis Bola Pejal Bermagnet.

Persamaan pembangun adalah persamaan kontinuitas massa, persamaan momentum linier, dan persamaan energi yang diuraikan dari hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Berikut persamaan-persamaan pembangun dimensional yang diperoleh,

i. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (1)$$

ii. Persamaan Momentum

Pada sumbu x

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} + (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{x}} \quad (2)$$

Pada sumbu y

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \mathbf{V} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} + (\rho_{fn} - \rho_\infty) g_{\bar{y}} \quad (3)$$

iii. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \alpha_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$\begin{aligned} \bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ pada saat } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{u} = \bar{v}, T = T_\infty \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh, yaitu persamaan (1)-(4), kemudian ditransformasikan kedalam persamaan non-dimensional dengan menggunakan variabel non-dimensional. Variabel-variabel non-dimensional selanjutnya didefinisikan sebagai berikut (Widodo dkk, 2016).

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_\infty^2}; r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}$$

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas, maka bilangan Reynolds mendekati tak hingga ($Re \rightarrow \infty$) maka $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ sehingga diperoleh.

Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + \lambda T \sin x \quad (5)$$

Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\alpha_{fn}}{\alpha_f} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6)$$

Persamaan (5) dan (6) selanjutnya dibawa kedalam bentuk fluida nano dengan substitusi variabel-variabel yang berhubungan antara fluida nano dengan fluida dasar diberikan sebagai berikut (Rabeti, 2014).

Densitas Fluida Nano

$$\rho_{fn} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s$$

Viskositas

$$\mu_{fn} = \mu_f \frac{1}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

Kalor spesifik Fluida Nano

$$(\rho C_p)_{fn} = (1 - \chi)(\rho C_p)_f + \chi(\rho C_p)_s$$

Konduktivitas termal

$$k_{fn} = \frac{k_s + 2k_f - 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f + \chi(k_s - k_f)} k_f$$

dengan substitusi variabel-variabel diatas maka persamaan pembangun dengan pendekatan lapisan batas diperoleh:

i. Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{(1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + \lambda T \sin x \quad (7)$$

ii. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{k_s + 2k_f - 2\chi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f + \chi(k_s - k_f)} \frac{1}{(1-\chi) + \chi \left(\frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \right)} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8)$$

Fungsi alir selanjutnya dinyatakan sebagai berikut (White, 2011):

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dan variabel similaritas dinyatakan sebagai berikut:

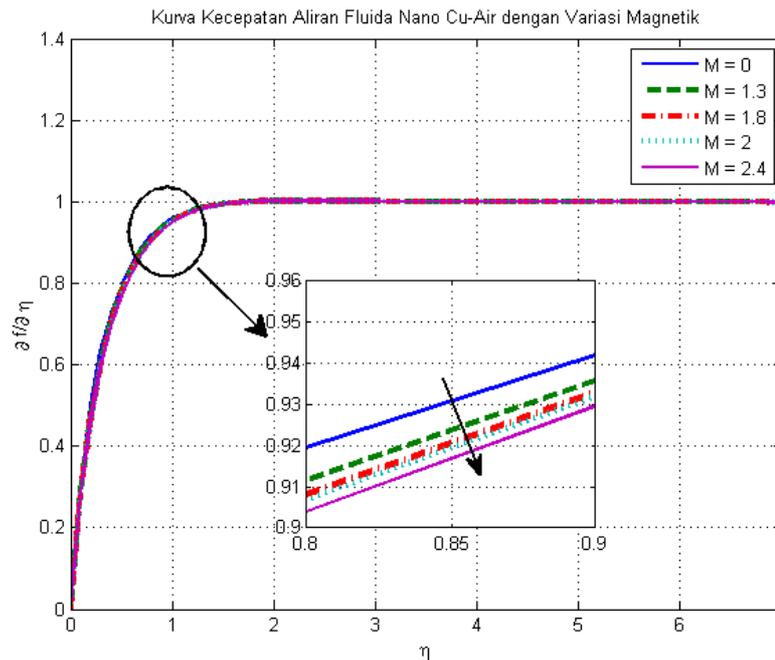
$$\Psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t); \eta = \frac{y}{t^{1/2}}; T = s(x, \eta, t)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi alir dan ditransformasikan kedalam variabel non-similaritas maka persamaan (7) dan (8) masing-masing dapat dinyatakan sebagai berikut.

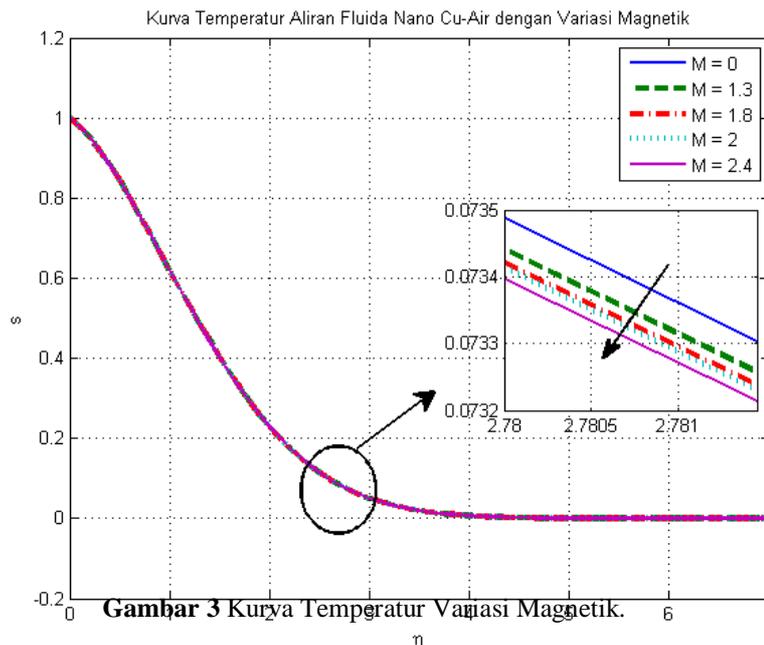
$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left[(1-\chi) + \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right]} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta \partial u}{2 \partial \eta} + \frac{3}{2} t \left(1 - (u)^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial u}{\partial t} + Mt(1 - u) - \frac{2}{3} \lambda st \quad (9)$$

$$\text{Pr } t \frac{\partial s}{\partial t} = \left[\frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{((k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s))((1 - \chi) + \left(\frac{\chi \rho(Cp)_s}{\rho(Cp)_f}\right))} \right] \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \text{Pr } t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (10)$$

Selanjutnya, pada makalah ini disimulasikan secara numerik partikel nano *Cu* dan fluida dasar air. Inputan yang digunakan dalam simulasi numerik ini adalah nilai parameter magnetic (*M*), konveksi campuran (λ), bilangan Prandtl (*Pr*) dan fraksi volume (χ), yaitu masing-masing sebesar $M=1.3$, $\lambda=1$, $Pr=1$, dan $\chi=0.1$. Pada hasil simulasi numerik diperoleh bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Sedangkan penurunan pada temperatur fluida nano mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Jika diamati dengan variasi parameter magnetik pada **Gambar 2** dan **Gambar 3**, maka kecepatan dan temperatur fluida mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya parameter magnetik. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh gaya Lorentz pada bola bermagnet.

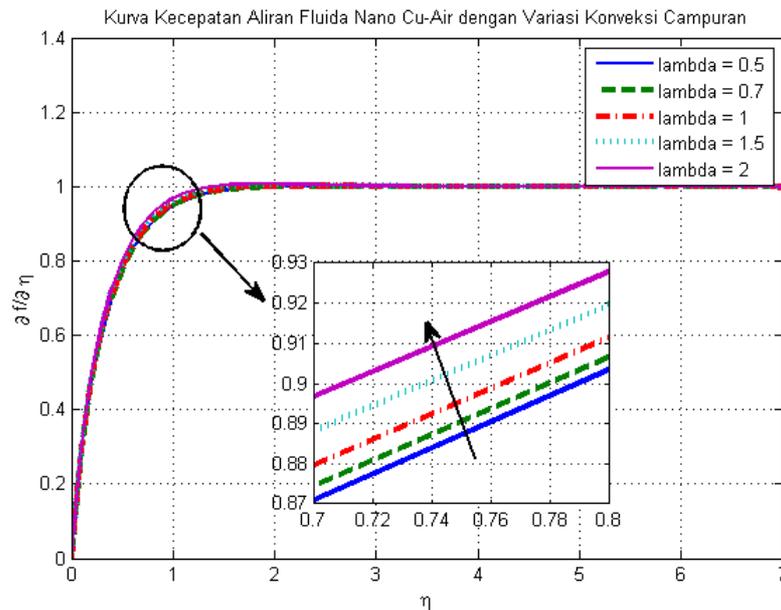


Gambar 2 Kurva Kecepatan Variasi Magnetik.

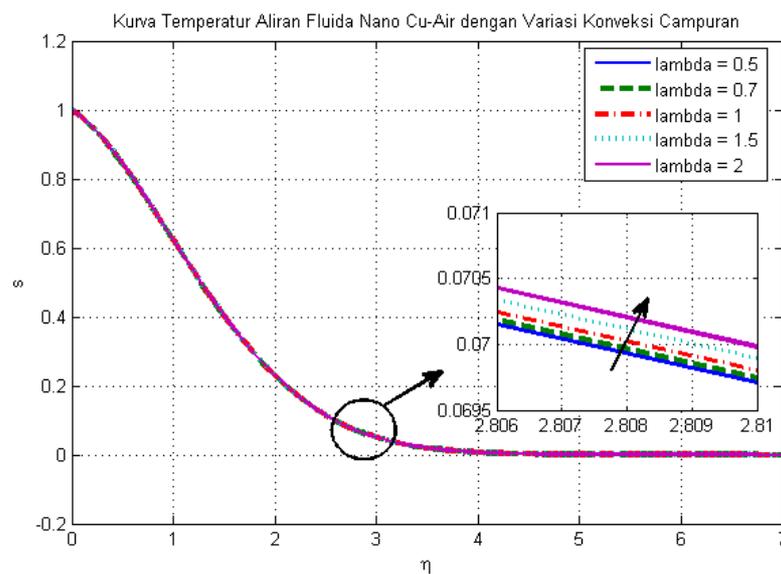


Gambar 3 Kurva Temperatur Variasi Magnetik.

Jika diamati dengan variasi parameter konveksi campuran pada **Gambar 4** dan **Gambar 5**, maka kecepatan dan temperatur fluida mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya parameter konveksi campuran.

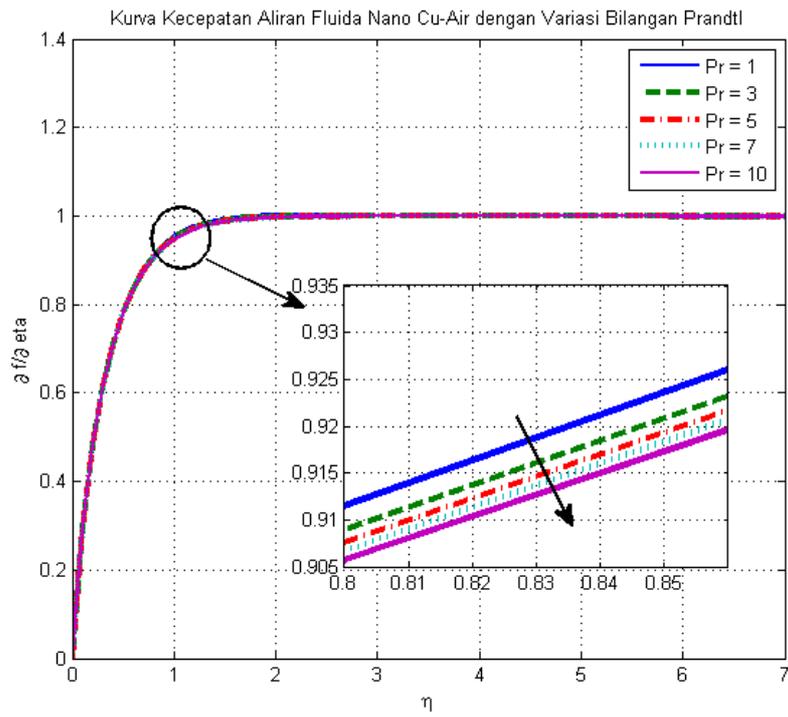


Gambar 4 Kurva Kecepatan Variasi Konveksi Campuran.

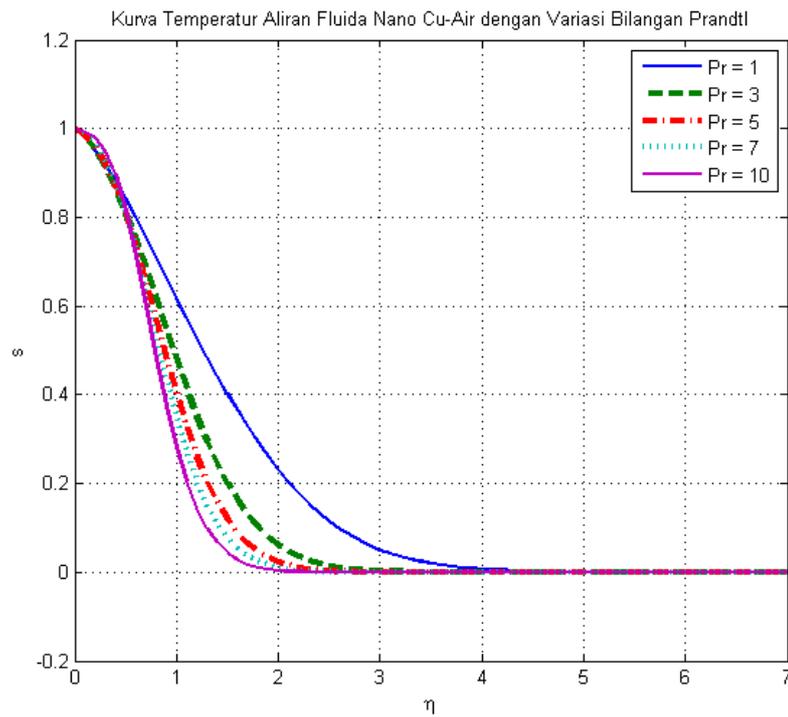


Gambar 5 Kurva Temperatur Variasi Konveksi Campuran.

Pada **Gambar 6** menunjukkan kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, profil kecepatan dengan partikel nano *Cu* mengalami penurunan ketika bilangan Prandtl diperbesar. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan viskositas kinematik pada fluida menjadi semakin besar, sehingga kekentalan fluida semakin meningkat. Akibat dari peningkatan kekentalan fluida ini maka kecepatan aliran fluida semakin menurun. Dengan variasi bilangan Prandtl pada **Gambar 7**, temperatur fluida juga mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

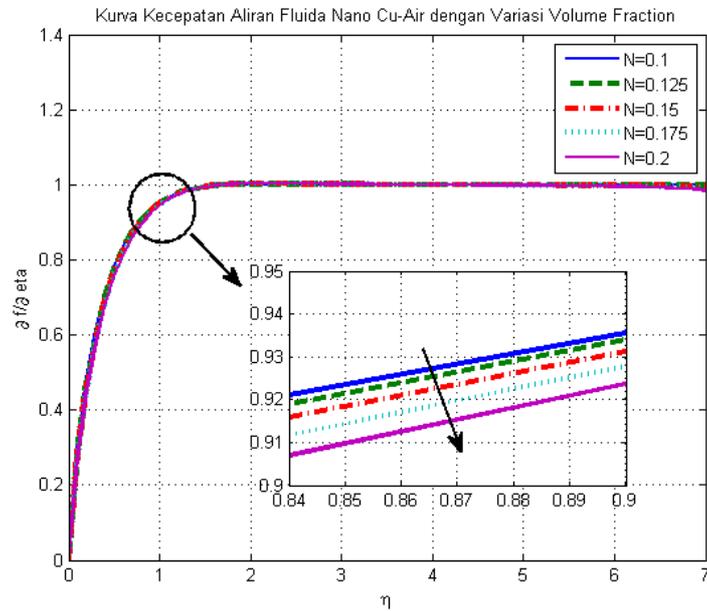


Gambar 6 Kurva Kecepatan Variasi Prandtl.

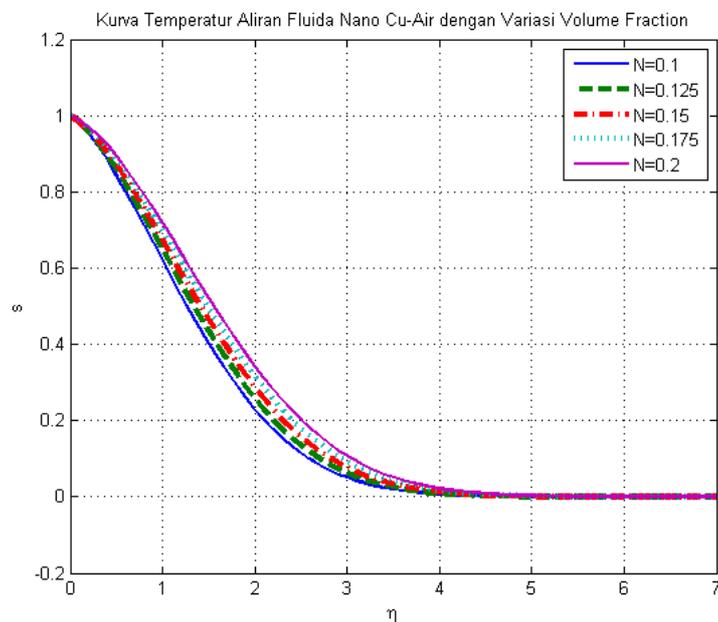


Gambar 7 Kurva Temperatur Variasi Prandtl.

Dengan melakukan variasi fraksi volume pada **Gambar 8** dan **Gambar 9**, maka kecepatan fluida mengalami penurunan sedangkan temperatur fluida mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya bilangan Prandtl. Dengan melakukan variasi fraksi volume, maka kecepatan fluida mengalami penurunan sedangkan temperatur fluida mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya fraksi volume.



Gambar 8 Kurva Kecepatan Variasi fraksi volume.



Gambar 9 Kurva Temperatur Variasi fraksi volume.

4. Simpulan

- Semakin meningkatnya parameter magnetik dan bilangan Prandl maka kecepatan dan temperatur fluida mengalami penurunan.
- Semakin meningkatnya parameter konveksi campuran dan fraksi volume maka temperatur fluida mengalami peningkatan. Sedangkan semakin meningkatnya parameter konveksi campuran maka kecepatan fluida mengalami penurunan. Sedangkan semakin meningkatnya parameter fraksi volume maka temperatur fluida mengalami peningkatan.

5. Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didukung oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, dengan nomor surat persetujuan pendanaan 970/PKS/ITS/2018. Kami mengucapkan terimakasih kepada LPPM-ITS yang telah memberikan kesempatan untuk menyajikan penelitian ini pada Seminar Nasional Matematika di Departemen Matematika Universitas Lampung sebagai salah satu *keynote speaker*.

6. Daftar Pustaka

- Widodo, B., *Pemodelan Matematika*, ITSpress, Surabaya, 2012.
- Ramadhan, A. I., *Analisis Perpindahan Panas Fluida Pendingin Nano fluida Di Teras Reaktor PWR (PressurizedWater Reactor) Dengan Computational Fluid Dynamics*, Tesis Program Magister, Universitas Pancasila, Jakarta, 2012.
- Ghani, M., Widodo, B. dan Imron, C. *Model Aliran Konveksi Campuran yang Melewati Permukaan Sebuah Bola*, Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan, Yogyakarta, 2014.
- Ismail, M. A., Mohammad, N. F., Ilias, M.R. dan Shafie, S. *MHD Effect on Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow past a Circular Cylinder with Constant Wall Temperature*, IOP Publishing, Malaysia, 2017.
- Widodo, B., Anggriani, I., Imron, C., *The Characterization Of Boundary Layer Flow in The Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past A Solid Sphere*, International Journal of Advances in Science Engineering and Technology, ISSN:2321-9009, 2016.
- Rabeti, M., *Mixed Convection Heat Transfer of Nanofluids about a Horizontal Circular Cylinder in Porous Media*, SOP Transaction on Nano Technology, vol. 1, no. 1, 2014.
- White, F. M., *Fluid Mechanics*, Seventh Edition, McGraw-Hill Companies, New York, 2011.

INFERENSI REGRESI SEMIPARAMETRIK UNTUK DATA HILANG MENGUNAKAN METODE *LIKELIHOOD* EMPIRIS DAN SIMULASINYA MENGGUNAKAN R

Yuana Sukmawaty¹, Nur Salam²

Statistika, FMIPA Universitas Lambung Mangkurat^{1,2}
Jl.Ahmad Yani Km 36.00 Kampus Unlam Banjarbaru Kalsel 70714
Penulis Korespondensi : nursalam2011@gmail.com¹

Abstrak

Paper ini akan membahas inferensi berkaitan dengan mean Y yaitu θ dalam model regresi semiparametrik dengan respon hilang menggunakan metode likelihood empiris. Suatu kelas estimator didefinisikan yang memuat kasus-kasus khusus yaitu estimator imputasi regresi semiparametrik, estimator rata-rata marginal dan estimator berbobot skor kecenderungan. Kelas estimator tersebut adalah normal secara asimtotik. Tiga estimator khusus kita mempunyai variansi asimtotik sama. Ketiga estimator ini mencapai batas efisiensi dalam kasus normal homoskedastik. Diperlihatkan bahwa metode jackknife dapat digunakan untuk mengestimasi variansi asimtotik secara konsisten. Metode likelihood empiris dikembangkan dalam penelitian ini memperlihatkan bahwa bila respons-respons yang hilang diimputasi menggunakan metode regresi semiparametrik maka log-likelihood empiris asimtotik merupakan suatu variabel chi-kuadrat. Menggunakan log-likelihood empiris diestimasi diperoleh suatu rasio log-likelihood empiris yang disesuaikan yang berdistribusi chi-kuadrat standar secara asimtotik. Selanjutnya dari rasio log-likelihood empiris yang disesuaikan digunakan untuk mengaproksimasi daerah kepercayaan dan pengujian hipotesis untuk θ . Suatu simulasi dilakukan untuk memilih model regresi semiparametrik terbaik dengan menggunakan bandwidth 0.1, 1 dan 10.

Kata kunci : *Likelihood empiris dan regresi semiparametrik.*

1. Pendahuluan

Model regresi semiparametrik merupakan model pendekatan baru dalam regresi diantara dua model regresi sudah populer yaitu regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Model regresi semiparametrik merupakan model gabungan yang memuat keduanya yaitu komponen parametrik dan komponen nonparametrik. Pendekatan model regresi semiparametrik ini menarik karena hanya ada sebagian informasi tentang hubungan antara variabel bebas (X) dengan variabel respon (Y) yang diketahui, sehingga penggunaan model regresi nonparametrik lengkap tidak lagi efisien dan penggunaan model regresi parametrik lengkap juga mungkin keliru. Setidaknya, ini merupakan motivasi penulis untuk membahas model regresi semiparametrik. Adapun model regresi semiparametrik adalah :

$$Y_i = X_i^T \beta + g(T_i) + \varepsilon_i, \quad (1)$$

dengan Y_i adalah variabel-variabel respon skalar yang *independent and identically distributed* (i.i.d), X_i adalah vektor-vektor kovariat random d-variabel i.i.d, T_i adalah vektor-vektor kovariat random d*-variabel i.i.d, β adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui, fungsi $g(\cdot)$ tidak diketahui, dan *error-error* model ε_i adalah independen dengan mean 0 dan variansi tetap σ^2 . (Wang et al. 2004)

Dalam praktek keseharian, sering kita berhadapan dengan tidak semuanya variabel respon tersedia karena berbagai alasan seperti kehilangan informasi yang disebabkan oleh faktor-faktor yang luar kontrol, kegagalan pada pihak investigator untuk menghimpun informasi yang benar, ketidakinginan beberapa unit yang disampel untuk menyediakan informasi yang diinginkan dan seterusnya. Dalam kasus ini, prosedur-prosedur inferensi dalam hal ini estimasi dan uji hipotesis tidak dapat diterapkan secara langsung. Suatu metode umum untuk menangani data yang hilang dalam suatu data set besar adalah mengimputasi (memasukkan) suatu nilai layak untuk setiap data yang hilang dan kemudian menganalisis hasil itu seolah-

olah mereka lengkap. Jika diandaikan X adalah suatu vektor dimensi- d dari faktor-faktor dan Y adalah suatu variabel respons yang dipengaruhi oleh X .

Diperoleh suatu sampel random data yang tidak lengkap :

$$(X_i, Y_i, \delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan X_i adalah semua data yang terobservasi dan $\delta_i = 0$ jika Y_i hilang dan kalau tidak $\delta_i = 1$. Secara spesifik, pada penelitian ini akan dibahas suatu kasus dimana beberapa nilai Y dalam suatu sampel berukuran n mungkin hilang, namun X dan T terobservasi secara lengkap. Yakni, diperoleh observasi tidak lengkap berikut :

$$(Y_i, \delta_i, X_i, T_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dari model (1), dimana semua X_i dan T_i terobservasi secara lengkap dan $\delta_i = 0$ jika Y_i hilang dan kalau tidak $\delta_i = 1$. Dalam paper ini kita tertarik dalam inferensi terhadap mean Y , katakanlah θ , bila ada respon yang hilang dalam model regresi semiparametrik (1).

Inferensi terhadap suatu model regresi semiparametrik tidak hanya berkaitan dengan persoalan estimasi dengan berbagai metode yang ada misalnya metode *penalized loglikelihood*, metode MSE (*mean square error*) dan lain-lain, tetapi juga berkaitan dengan pengujian hipotesis yang pada penelitian ini akan diturunkan uji hipotesis untuk data hilang dengan menggunakan metode *likelihood* empiris. Selain daripada itu untuk keperluan penjelasan dan penerangan konsep-konsep teoritis berkaitan dengan model regresi semiparametrik yang relatif sulit untuk dipahami secara langsung dilakukan metode simulasi. Oleh karena itu pada kesempatan penelitian ini, peneliti tertarik untuk membahas bagaimana inferensi model regresi semiparametrik untuk data hilang dengan menggunakan metode *likelihood* empiris dan simulasinya menggunakan R.

Sebelum membahas konsep estimasi dan normal asimtotik terlebih dahulu dibicarakan beberapa pengertian dasar yang merupakan konsep awal yang harus dipahami agar mudah mengikuti pembahasan yang dibicarakan.

Definisi 1.2.1 Data Hilang (Rubin, 1987)

Data hilang (*missing data*) merupakan sebuah nilai yang mengindikasikan bahwa tidak ada data apapun yang tersimpan pada variabel pengamatan saat ini. Kasus Data hilang ini akan mengakibatkan ketidaklengkapan data (*incomplete data*) dalam suatu model, sehingga akan menghambat analisis statistik yang akan dilakukan.

Definisi 1.2.2. Inferensi Statistika (Walpole 1995)

Inferensi statistika adalah mencakup semua metode yang berhubungan dengan analisis sebagian data untuk kemudian sampai pada peramalan atau penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan gugusan data induknya.

Definisi 1.2.3. Estimasi (Bain, J.L & Engelhardt, M, 1992)

Suatu statistik, $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yang digunakan untuk mengestimasi nilai $\tau(\theta)$ disebut estimator dari $\tau(\theta)$ dan suatu nilai observasi dari suatu statistik, $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ disebut hasil estimasi.

Definisi 1.2.4. Konvergen dalam probabilitas (Casela & Berger, 1990)

Barisan variabel random X_1, X_2, X_3, \dots konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ atau $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$ atau bisa juga ditulis $X_n \xrightarrow{P} X$.

Definisi 1.2. Konvergen dalam distribusi (Casella & Berger, 1990)

Barisan variabel random X_1, X_2, X_3, \dots konvergen dalam distribusi ke suatu variabel random X , jika $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pada setiap titik x , dimana $F_X(x)$ kontinu atau bisa ditulis $X_n \xrightarrow{d} X$.

2. Metodologi Penelitian

Adapun prosedur-prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan bahan-bahan penelitian yang berhubungan dengan model regresi semiparametrik, cara estimasi model regresi semiparametrik serta metode *likelihood* empiris.
2. Mempelajari bahan-bahan yang telah dikumpulkan pada point (1) di atas.
3. Menjelaskan model regresi parametrik dan bentuk modelnya dalam bentuk matriks.
4. Menjelaskan model regresi nonparametrik dan bentuk modelnya dalam bentuk matriks.
5. Mengkonstruksi model regresi semiparametrik untuk data hilang dan bentuk modelnya dalam bentuk matriks.
6. Menentukan metode estimasi model regresi semiparametrik untuk data hilang yang tepat.

7. Mengestimasi model regresi semiparametrik untuk data hilang dengan menggunakan metode *likelihood* empiris.
8. Menjelaskan uji hipotesis pada model linear parsial untuk data hilang dengan menggunakan metode *likelihood* empiris.
9. Membuat simulasi model regresi semiparametrik untuk data hilang dengan cara mengestimasi model regresi semiparametrik menggunakan metode *likelihood* empiris.
10. Menarik kesimpulan dari hasil pembahasan.

3. Hasil dan Pembahasan

Terlebih dahulu dideskripsikan bagaimana mengestimasi fungsi regresi. Melalui pramultiplikasi (1) dengan indikator observasi diperoleh :

$$\delta_i Y_i = \delta_i X_i^T \beta + \delta_i g(T_i) + \delta_i \varepsilon_i,$$

dan dengan mengambil ekspektasi bersyarat yang diberikan T, didapat :

$$E[\delta_i Y_i | T_i = t] = E[\delta_i X_i^T | T_i = t] \beta + E[\delta_i | T_i = t] g(t)$$

dari hal di atas diperoleh :

$$g(t) = g_2(t) - g_1(t)^T \tag{2}$$

dengan :

$$g_1(t) = \frac{E[\delta X | T=t]}{E[\delta | T=t]} \quad \text{dan} \quad g_2(t) = \frac{E[\delta Y | T=t]}{E[\delta | T=t]}$$

Sehingga dihasilkan:

$$\delta_i [Y_i - g_2(T_i)] = \delta_i [X_i - g_1(T_i)]^T \beta + \delta_i \varepsilon_i, \tag{3}$$

yang mengisyaratkan bahwa suatu estimator β dapat didasarkan pada suatu regresi kuadrat terkecil dengan menggunakan observasi $\delta_i = 1$ dan estimasi $g_j(\cdot)$, $j=1,2$.

Andaikan $K(\cdot)$ adalah suatu fungsi kernel dan andaikan h_n adalah suatu sekuens *bandwidth* yang cenderung ke 0 bila $n \rightarrow \infty$, dan didefinisikan bobot-bobot :

$$W_{nj}(t) = \frac{K((t - T_j)/h_n)}{\sum_{j=1}^n \delta_j K((t - T_j)/h_n)} \quad \text{kemudian} \quad \tilde{g}_{1n}(t) = \sum_{j=1}^n \delta_j W_{nj}(t) X_j \quad \text{dan} \quad \tilde{g}_{2n}(t) =$$

$\sum_{j=1}^n \delta_j W_{nj}(t) Y_j$ adalah estimator-estimator konsisten dari $g_1(t)$ dan $g_2(t)$, secara berturut-turut. Dari (3), estimator β kemudian didefinisikan sebagai estimator yang memenuhi :

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n \delta_i \{ (Y_i - \tilde{g}_{2n}(T_i)) - (X_i - \tilde{g}_{1n}(T_i))^T \beta \}^2 \tag{4}$$

Dari (4), dapat diperoleh bahwa estimator β diberikan oleh :

$$\hat{\beta}_n = \left[\sum_{i=1}^n \delta_i \{ (X_i - \tilde{g}_{1n}(T_i))(X_i - \tilde{g}_{1n}(T_i))^T \} \right]^{-1} \times \sum_{i=1}^n \delta_i \{ (X_i - \tilde{g}_{1n}(T_i))(Y_i - \tilde{g}_{2n}(T_i)) \}$$

berdasarkan pada triple yang diobservasi (X_i, T_i, Y_i) untuk itu $i \in \{i: \delta_i = 1\}$. Persamaan (2) mengisyaratkan bahwa suatu estimator $g(t)$ dapat didefinisikan sebagai :

$$\hat{g}_n(t) = \tilde{g}_{2n}(t) - \tilde{g}_{1n}^T(t) \hat{\beta}_n$$

dengan mengganti β , $g_1(t)$ dan $g_2(t)$ dalam (2) dengan $\hat{\beta}_n$, $\tilde{g}_{1n}(t)$ dan $\tilde{g}_{2n}(t)$.

Di dalam membahas mengenai estimasi θ , ditentukan kelas umum estimator-estimator θ yaitu :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i}{P_n^*(X_i, T_i)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\delta_i}{P_n^*(X_i, T_i)} \right) \{ X_i^T \hat{\beta}_n + \hat{g}_n(T_i) \}$$

dengan $P_n^*(x, t)$ adalah suatu sekuens kuantitas dengan limit-limit probabilitas $P^*(x, t)$.

Kita khususnya berkepentingan dalam beberapa hal khusus. Pertama, bila $P_n^*(x, t) = 1$, diperoleh estimator imputasi regresi θ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i Y_i + (1 - \delta_i) (X_i^T \hat{\beta}_n + \hat{g}_n(T_i)) \right\}$$

Bila $P_n^*(x,t) = \infty$, diperoleh estimator rata-rata marginal :

$$\hat{\theta}_{MA} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^T \hat{\beta}_n + \hat{g}_n(T_i))$$

yang hanya rata-rata atas fungsi regresi yang diestimasi. Didefinisikan skor kecenderungan marginal $P_1(t) = P(\delta=1 | T=t)$. Bila :

$$P_n^*(x,t) = \hat{P}_1(t) = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_j K\left(\frac{t - T_j}{h_n}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{t - T_j}{h_n}\right)}$$

Diperoleh estimator berbobot skor kecenderungan (marginal) :

$$\hat{\theta}_{p1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\delta_i Y_i}{\hat{P}_1(T_i)} + \left(1 - \frac{\delta_i}{\hat{P}_1(T_i)}\right) (X_i^T \hat{\beta}_n + \hat{g}_n(T_i)) \right]$$

Estimator $\hat{\theta}_{p1}$ berbeda dari metode pemberi bobot skor kecenderungan biasa yang menggunakan suatu estimator skor kecenderungan penuh. Andaikan $\hat{\theta}^*$ menunjukkan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_{MA}$ atau $\hat{\theta}_{p1}$. Estimator-estimator ini hanya berlandaskan pada operasi-operasi *smoothing* satu dimensi dan didefinisikan secara eksplisit. Dua sifat ini penting dari suatu sudut pandang komputasional dan statistika.

Selanjutnya diberikan beberapa sifat estimator $\hat{\theta}$ dan estimator-estimator variansi konsistennya. Andaikan $P_1(t) = p(\delta = 1 | T = t)$, $P(x, t) = p(\delta = 1 | X = x, T = t)$, $m(x, t) = x^T \beta + g(t)$ dan $\sigma^2(x, t) = E[(Y - X^T \beta - g(T))^2 | X = x, T = t]$. Kemudian didefinisikan $u(x,t) = x - g_1(t)$, $\Sigma = E[P(X,T) u(X,T) u(X,T)^T]$. $g_{1r}(\cdot)$ menunjukkan komponen ke- r dari $g_1(\cdot)$. Diberikan $\|\cdot\|$ adalah *norm Euclidean*. Asumsi-asumsi berikut diperlukan untuk normal asimtotik dari $\hat{\theta}$, yakni :

1. $\sup_t E[\|X\| | T = t] < \infty$.
2. Fungsi densitas T , katakanlah $r(t)$, ada dan memenuhi $0 < \inf_{t \in [0,1]} r(t) \leq \sup_{t \in [0,1]} r(t) < \infty$.
3. $\sup_{x,t} E[Y^2 | X = x, T = t] < \infty$.
4. $g(\cdot)$, $g_{1r}(\cdot)$ dan $g_2(\cdot)$ memenuhi syarat Lipschitz order 1.
5. (a) $P_1(t)$ memiliki derivatif-derivatif parsial terbatas hingga order 2 hampir pasti (*almost surely*).
(b) $\inf_{x,t} P(x,t) > 0$.
6. $\Sigma = E[P(X,T) u(X,T) u(X,T)^T]$ adalah suatu matrik definit positif.
7. (a) Ada konstanta $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ dan $P > 0$ sedemikian rupa sehingga :
$$M_1 I[\|u\| \leq \rho] \leq K(u) \leq M_2 I[\|u\| \leq \rho]$$

(b) $K(\cdot)$ adalah suatu fungsi kernel order 2.
(c) $K(\cdot)$ mempunyai derivatif-derivatif parsial terbatas hingga order 2 hampir pasti (*almost surely*).
8. (a) Fungsi kernel $W(\cdot)$ adalah suatu fungsi kernel terbatas dengan dukungan (*support*) terbatas dan variasi terbatas.
(b) $W(\cdot)$ adalah suatu kernel order $k (> d+1)$.

Teorema 3.1

Berdasarkan semua asumsi tersebut kecuali untuk 7 (c) diperoleh :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V)$$

dengan :

$V = E[(\pi_0(X,T) + \pi_1(X,T))^2 P(X,T) \sigma^2(X,T)] + \text{Var}[(X,T)]$ dengan $\pi_0(x,t) = 1/P_1(t)$ dan $\pi_1(x,t) = E[u(X,T)^T] \Sigma^{-1} u(x,t)$ bila $P_n^*(x,t) \in \{1, \infty, \hat{P}_1(t)\}$ dan $\pi_0(x,t) = 1/P(x,t)$ dan $\pi_1(x,t) = 0$ bila $P_n^*(x,t)$ diambil sebagai $\hat{P}(x,t)$.

Untuk mendefinisikan suatu estimator konsisten dari V , mungkin lebih dahulu didefinisikan estimator-estimator dari $P(x,t)$, $P_1(t)$, $\sigma^2(x,t)$ dan $g_1(t)$ oleh metode regresi kernel dan kemudian mendefinisikan suatu estimator konsisten dari V dengan suatu metode *plug in*. Namun demikian, metode ini mungkin tidak mengestimasi V dengan baik bila dimensi x tinggi. Ini bisa dihindari karena baik $P(x,t)$ dan $\sigma^2(x,t)$ hanya masuk dalam pembilang dan bisa diganti dengan residu-residu kuadrat atau fungsi indikator bila tepat.

Suatu alternatif adalah estimator variansi *jackknife*. Andaikan $\hat{\theta}(-)$ menjadi $\hat{\theta}$ didasarkan pada $\{(Y_j, \delta_j, X_j, T_j)\}_{j \neq i}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Andaikan ini adalah nilai-nilai pseudo *jackknife*. Yakni $J_{ni} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}^{(-i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Maka estimator variansi *jackknife* bisa didefinisikan sebagai :

$$\hat{V}_{nj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (J_{ni} - \bar{J}_n)^2$$

dengan $\bar{J}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n J_{ni}$.

Teorema 3.2

Berdasarkan asumsi-asumsi dari Teorema 3.1, diperoleh $\hat{V}_{nj} \xrightarrow{p} V$.

Dengan Teorema 3.1 dan 3.2, interval kepercayaan berdasarkan perkiraan normal dengan level kepercayaan $1 - \alpha$ adalah $\hat{\theta} \pm \sqrt{\hat{V}_{nj}/n} \times u_{1-\alpha/2}$, dengan $u_{1-\alpha/2}$ adalah kuantil $1-\alpha/2$ dari distribusi normal standar.

Di sini kita menderivasi suatu metode *likelihood* empiris yang diestimasi (*estimated*) untuk mengembangkan inferensi global untuk θ . Andaikan $\tilde{Y}_i = \delta_i Y_i + (1 - \delta_i)(X_i^T \beta + g(T_i))$ kita memiliki $E \tilde{Y}_i = \theta_0$ dibawah asumsi hilang secara random jika θ_0 merupakan nilai θ yang benar. Ini mengisyaratkan bahwa problem pengujian $H_0: \theta = \theta_0$ ekuivalen dengan pengujian $E \tilde{Y}_i = \theta_0$. Jika β dan $g(\cdot)$ diketahui, maka seseorang dapat menguji $E \tilde{Y}_i = \theta_0$ dengan menggunakan *likelihood* empiris Owen (1990) :

$$l_n(\theta) = -2 \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) \mid \sum_{i=1}^n P_i \hat{Y}_i = \theta, \sum_{i=1}^n P_i = 1, P_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Mengikuti dari Owen (1990) bahwa, dengan $H_0: \theta = \theta_0$, $l_n(\theta)$ memiliki distribusi chi-kuadrat asimtotik dengan 1 derajatbebas. Suatu kondisi esensial untuk hasil ini berlaku yakni \tilde{y}_i dalam kendala linear adalah variabel-variabelrandom i.i.d. Sayangnya, β dan $g(\cdot)$ tidak diketahui, dan karenanya $l_n(\theta)$ tidak dapat digunakan secara langsung untuk membuat inferensi atas θ . Untuk memecahkan problem ini, lazimnya menelaah suatu *log-likelihood* empiris yang diestimasi dengan mengganti β dan $g(\cdot)$ dengan estimator-estimatormereka. Secara spesifik, diperoleh : $\hat{Y}_{in} = \delta_i Y_i + (1 - \delta_i)(X_i^T \hat{\beta}_n + \hat{g}_n(T_i))$. Suatu *log-likelihood* empiris yang diestimasi dievaluasi di θ kemudian didefinisikan dengan :

$$\hat{l}_n(\theta) = -2 \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) \mid \sum_{i=1}^n P_i \hat{Y}_{in} = \theta, \sum_{i=1}^n P_i = 1, P_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \right\} \tag{5}$$

Dengan menggunakan metode penggandaan Lagrange, bila $\min_{1 \leq i \leq n} \hat{Y}_{in} < \theta < \max_{1 \leq i \leq n} \hat{Y}_{in}$ dengan probabilitas yang cenderung ke 1, $\hat{l}_n(\theta)$ dapat diperlihatkan sebagai :

$$\hat{l}_n(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda(\hat{Y}_{in} - \theta)), \tag{6}$$

dimana λ adalah pemecahan persamaan

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{Y}_{in} - \theta)}{1 + \lambda(\hat{Y}_{in} - \theta)} = 0. \tag{7}$$

Tidak seperti *log-likelihood* empiris standar $l_n(\theta)$, $\hat{l}_n(\theta)$ didasarkan pada \hat{Y}_{in} yang tidak independen. Konsekuensinya, $\hat{l}_n(\theta)$ tidak memiliki suatu distribusi chi-kuadrat yang standar asimtotik. Secara aktual, $\hat{l}_n(\theta)$ berdistribusi secara asimtotik sebagai suatu variabel chi-kuadrat berskala dengan 1 derajat bebas. Hal ini akan dijelaskan dalam bahasan berupa teorema selanjutnya.

Sebelum membahas uji hipotesis menggunakan metode *likelihood* empiris yang disesuaikan (*adjusted*) akan diberikan beberapa sifat-sifat penting dari *likelihood* empiris yang berupa teorema-teorema berikut :

Teorema 3.5.

Asumsikan syarat-syarat memenuhi Teorema 3.1 kecuali untuk (8). Maka, dengan $H_0: \theta = \theta_0$,

$$\hat{l}_n(\theta) \xrightarrow{d} \frac{V(\theta)}{\tilde{V}(\theta)} \chi_1^2,$$

Dengan χ_1^2 adalah suatu variabel chi-kuadrat standar dengan 1 derajat bebas, $V(\theta)$ didefinisikan dalam Teorema 3.1, dan $\tilde{V}(\theta) = E[P(X, T)\sigma^2(X, T)] + Var(X^T\beta + g(T))$

Dengan Teorema 3.5, kita peroleh $H_0: \theta = \theta_0$ dan $\gamma(\theta) \hat{I}_n(\theta) \xrightarrow{d} \chi_1^2$, (8)

Dimana $\gamma(\theta) = \tilde{V}(\theta)/V$. Jika kita dapat mendefinisikan suatu estimator konsisten, katakanlah $\gamma_n(\theta)$ untuk $\gamma(\theta)$, maka suatu rasio *log-likelihood* empiris yang disesuaikan didefinisikan sebagai :

$$\hat{I}_{n,ad}(\theta) = \gamma_n \hat{I}_n(\theta) \quad (9)$$

dengan faktor penyesuaian $\gamma_n(\theta)$. Ini tanpa kesulitan mengikuti dari (8) dan (9) di mana $\hat{I}_{n,ad}(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_1^2$ dengan $H_0: \theta = \theta_0$.

Suatu estimator konsisten $\gamma_n(\theta)$ dapat didefinisikan sebagai :

$$\gamma_n(\theta) = \frac{\tilde{V}_n(\theta)}{\hat{V}_n}, \quad \text{dimana } \tilde{V}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_{in} - \theta) \quad \text{dan} \quad \hat{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (J_{ni} - \bar{J}_n)^2 \text{ dengan}$$

$$\bar{J}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n J_{ni}.$$

Harus ditunjukkan bahwa ini mungkin meningkatkan efisiensi bahwa jika kita membiarkan θ dalam $\gamma_n(\theta)$ untuk tidak diestimasi. Untuk itu perhatikan teorema berikut :

Teorema 3.6.

Asumsikan syarat sesuai dengan Teorema 3.1 kecuali untuk (8). Kemudian, diperoleh bahwa $H_0: \theta = \theta_0$,

$$\hat{I}_{n,ad}(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi_1^2.$$

Dari Teorema 3.6, secara otomatis berlaku bahwa suatu perkiraan daerah kepercayaan $1 - \alpha$ untuk θ diberikan oleh $\{\theta: \hat{I}_{n,ad}(\theta_0) \leq \chi_{1,\alpha}^2\}$, di mana $\chi_{1,\alpha}^2$ adalah persentil α dari distribusi χ_1^2 . Teorema 3.6 juga dapat digunakan untuk menguji hipotesis $H_0: \theta = \theta_0$. Kita dapat melakukan penolakan H_0 atau penerimaan $H_1: \theta > \theta_0$ pada tingkat α jika $\hat{I}_{n,ad}(\theta_0) > \chi_{1,\alpha}^2$.

Berikut ini akan dilakukan simulasi model regresi semiparametrik untuk data hilang dengan metode *likelihood* empiris yang disesuaikan dengan menggunakan paket program *open sources R* version 3.5.1. Simulasi ini menggunakan model regresi semiparametrik :

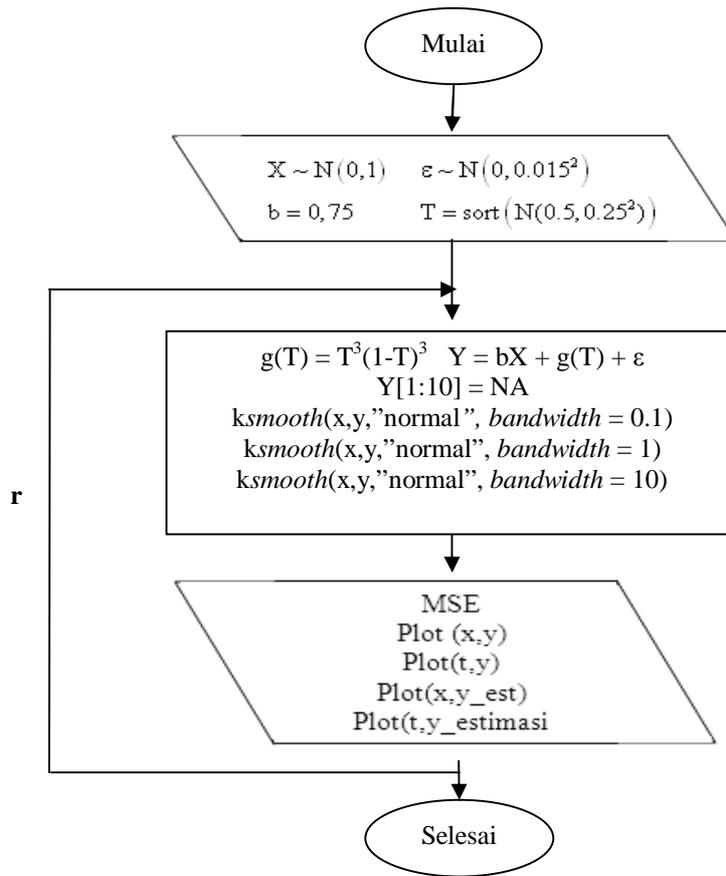
$$Y = bX + g(T) + \varepsilon \quad (10)$$

dimana :

$$X \sim N(0,1) \quad b = 0,75 \quad Y[1:10] = NA \quad \varepsilon \sim N(0,0.015^2)$$

$$g(T) = T^3(1-T)^3 \text{ dengan } T = \text{sort}(N(0.5,0.25^2))$$

Model regresi semiparametrik terbaik adalah model yang memberikan nilai *mean square error* (MSE) terkecil. Berikut ini disajikan algoritma pemograman simulasi untuk memperoleh model regresi semiparametrik terbaik dengan menggunakan fungsi kernel normal dengan *bandwidth* 0.1, 1, dan 10.



Gambar 1

Berdasarkan algoritma tersebut dapat disusun program dan setelah dijalankan dengan ukuran sampel (n) 120 dan tanpa perulangan (r) atau perulangan sebanyak 1 kali, diperoleh *output* sebagai berikut :

Tabel 1. Ringkasan *output*

Model	MSE
Model kernel normal dengan b:0.1	1.277164
Model kernel normal dengan b:1	1.086475
Model kernel normal dengan b:10	0.4923487

Dari tabel di atas diperoleh bahwa model regresi semiparametrik untuk data hilang dengan menggunakan fungsi kernel normal memiliki MSE semakin kecil jika nilai *bandwidth*-nya semakin besar.

4. Kesimpulan

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa inferensi pada mean Y yaitu θ dalam model regresi semiparametrik untuk data hilang adalah sebagai berikut :

1. Estimasi *log-likelihood* empiris yang diestimasi di θ diberikan oleh:

$$\hat{l}_n(\theta) = -2 \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) \mid \sum_{i=1}^n P_i \hat{Y}_{in} = \theta, \sum_{i=1}^n P_i = 1, P_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

dengan menggunakan metode penggandaan Lagrange, bila:

$\min_{1 \leq i \leq n} \hat{Y}_{in} < \theta < \max_{1 \leq i \leq n} \hat{Y}_{in}$ dengan probabilitas menuju 1 atau dapat juga dituliskan dalam bentuk :

$$\hat{I}_n(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda(\hat{Y}_{in} - \theta)), \text{ dengan } \lambda \text{ adalah pemecahan persamaan :}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{Y}_{in} - \theta)}{1 + \lambda(\hat{Y}_{in} - \theta)} = 0.$$

2. Estimasi rasio *log-likelihood* empiris yang disesuaikan di θ diberikan oleh: $\hat{I}_{n,ad}(\theta) = \gamma_n \hat{I}_n(\theta)$ dengan faktor penyesuaian $\gamma_n(\theta) = \frac{\tilde{V}_n(\theta)}{\hat{V}_n}$.
3. Aproksimasi daerah kepercayaan $1 - \alpha$ untuk θ diberikan oleh: $\{\theta : \hat{I}_{n,ad}(\theta_0) \leq \chi_{1,\alpha}^2\}$, dengan $\chi_{1,\alpha}^2$ adalah persentil α dari distribusi χ_1^2 .
4. Uji hipotesis $H_0: \theta = \theta_0$, dimana H_0 ditolak atau H_1 diterima pada: $\theta > \theta_0$ pada tingkat $\hat{I}_{n,ad}(\theta_0) > \chi_{1,\alpha}^2$.
5. Model regresi semiparametrik untuk data hilang menggunakan metode *likelihood* empiris dengan menggunakan fungsi kernel normal memiliki nilai MSE semakin kecil jika nilai *bandwidth* semakin besar.

5. Daftar Pustaka

- Bain, L.J., & Engelhardt, M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition, Duxbury Press, California.
- Casella, G., & Berger, L.R. (2002). *Statistical Inference*, Duxbury, USA.
- Rubin, D. B. (1987). *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*. NY: John Wiley & Sons. New York.
- Wang, Q., Linton, O., & Hardle, W. (2004). *Semiparametric Regression Analysis with Missing Response at Random*, *Journal of the American Statistical Association*; 99; 334-345.
- Walpole, E.R (1995). *Pengantar Statistik*, PT, Gramedia Pustaka Utama.

PENENTUAN STRUKTUR DAN KADAR FLAVONOID EKSTRAK POLAR DAUN GAMAL (*Gliricidia maculata*) KULTIVAR LAMPUNG BARAT SEBAGAI INSEKTISIDA NABATI PADA KUTU PUTIH TANAMAN KOPI (*Planococcus citri*, Hemiptera: Pseudococcidae)

Hona Anjelina Putri¹, Nismah Nukmal²

Jurusan Biologi FMIPA Universitas Lampung^{1,2}
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : nnukmal@yahoo.com¹

ABSTRAK

Peringkat Indonesia sebagai negara penghasil kopi menurun menjadi keempat di dunia. Penurunan tersebut disebabkan oleh beberapa faktor, salah satunya adalah hama kutu putih tanaman kopi (*Planococcus citri*). Pengendalian yang aman dan ramah lingkungan memanfaatkan insektisida nabati. Tanaman gamal (*Gliricidia maculata*) mengandung senyawa flavonoid yang berpotensi sebagai insektisida nabati. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan struktur dan kadar flavonoid serbuk daun gamal Kultivar Lampung Barat (KLB) yang efektif mematikan hama kutu putih tanaman kopi (*P. citri*) dengan cara pemurnian ekstrak polar serbuk daun gamal menggunakan Medium Pressure Liquid Chromatography (MPLC), bioassay dan analisis spektrokopis (FTIR dan UV-Vis). Data yang didapatkan dianalisis menggunakan analisis probit untuk menentukan nilai LC_{50} , uji Anara, uji lanjut Tukey's dan uji LSD serta analisis paired T test untuk efektifitas ekstrak. Hasil yang didapatkan adalah ekstrak murni air mengandung senyawa flavonoid golongan flavonol dengan struktur dasar 3 – hidroksi-2-fenil-1,4 benzopiron dan kadar flavonoid ekstrak kasar metanol sebesar 7,4 mg/L kuersetin sedangkan, ekstrak kasar air sebesar 3,8 mg/L kuersetin. Hasil uji bioassay dalam mematikan hama kutu putih tanaman kopi (*P. citri*) dengan ekstrak kasar air lebih efektif dibandingkan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB dengan nilai LC_{50} 72 jam lebih kecil 0,041% (0,107%:0,148%).

Kata Kunci: Struktur, flavonoid, *Planococcus citri*, daun gamal

1. Pendahuluan

Indonesia merupakan negara penghasil kopi terbesar ketiga di dunia setelah Brasil dan Vietnam. Pada tahun 2012, Indonesia memproduksi kopi robusta dan arabika sebanyak 748.000 ton dari produksi kopi dunia (Kementerian Perindustrian Republik Indonesia, 2013).

Produksi kopi tahun 2015 menurun menjadi 637.000 ton. Penurunan ini terjadi salah satunya karena adanya serangan organisme pengganggu tanaman (OPT) sehingga Indonesia turun menjadi peringkat keempat negara penghasil kopi di dunia (Kementerian Pertanian, 2017).

Banyak jenis hama yang menyerang tanaman kopi di Indonesia. Salah satunya adalah hama kutu putih (*Planococcus citri*) (Rahardjo, 2012). Hama kutu putih menyerang tanaman kopi dengan mengisap cairan tanaman kopi menggunakan mulut yang berbentuk jarum dan hama ini mensekresikan embun madu yang merupakan media pertumbuhan jamur pada daun kopi yang juga dapat mengganggu pertumbuhan kopi (Direktorat Perlindungan Perkebunan, 2002).

Penggunaan insektisida kimia yang tidak benar dapat menimbulkan dampak yang tidak diinginkan seperti terjadinya resistensi dan resurgensi pada hama (Dadang dan Prijono, 2011). Penggunaan pestisida kimia di Indonesia telah memusnahkan 55% jenis hama dan 72% agen pengendali hayati. Oleh karena itu, diperlukan pengganti pestisida yang ramah lingkungan. Salah satu alternatif pilihannya adalah penggunaan pestisida nabati. Pestisida nabati adalah salah satu pestisida yang bahan dasarnya berasal dari tumbuhan. (Dinas Kehutanan, 2009).

Salah satu tumbuhan yang dapat digunakan sebagai insektisida nabati ialah Tanaman gamal. Menurut hasil uji fitokimia ekstrak serbuk daun gamal kering yang dilakukan oleh Nukmal, dkk (2009) dengan maserasi bertingkat daun gamal diketahui banyak mengandung golongan senyawa flavonoid.

Beberapa penelitian mengenai daya insektisida serbuk daun gamal sudah dilakukan. Menurut Apriliyani (2016), ekstrak metanol dan air daun gamal kultivar Lampung Utara yang mengandung senyawa flavonoid bersifat sebagai insektisida nabati pada kutu putih tanaman kopi (*Planacoccus citri*) dengan nilai $LC_{5072 \text{ jam}}$ ekstrak metanol 0,039% dan nilai $LC_{50 72 \text{ jam}}$ ekstrak air 0,033%. Penelitian lainnya menunjukkan bahwa ekstrak metanol dan air daun gamal kultivar Lampung Barat berpotensi sebagai insektisida nabati untuk mengendalikan kutu putih sirsak (*Pseudococcus cryptus*) dengan nilai LC_{50} 0,061% pada ekstrak metanol dan nilai $LC_{50 72 \text{ jam}}$ ekstrak air 0,096% (Aksah, 2016).

Walaupun beberapa penelitian telah dilakukan guna pemanfaatan senyawa flavonoid ekstrak daun gamal sebagai insektisida nabati, namun struktur dan kadar flavonoid ekstrak polar daun gamal Kultivar Lampung Barat (KLB) sebagai insektisida nabati belum diketahui, untuk itu dilakukan penelitian ini.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan alat spektrofotometer FTIR dan UV – Vis dalam menentukan struktur dan kadar flavonoid ekstrak polar serbuk daun gamal, yang dibagi menjadi 7 tahapan kerja.

Pembuatan ekstrak kasar metanol dan air serbuk daun gamal KLB. Sebanyak 1.000 g serbuk daun gamal dimaserasi bertingkat menggunakan pelarut heksana, DCM, Metanol dihasilkan ekstrak metanol dan tambahan akuabides untuk menghasilkan ekstrak air. Maserasi dilakukan selama 3x24 jam, kemudian dipisahkan antara filtrat dan endapan. Filtrat metanol dan air selanjutnya di evaporasi. Kemudian, dipekatkan dengan metode rekristalisasi menggunakan freeze dryer 18 jam hingga berbentuk pasta. Kemudian di KLT menggunakan plat KLT flourensensi dengan eluen etanol : heksana (3:7) dan (1:1) larutan identifikasi $AlCl_3$ 10%.

Pemurnian menggunakan *Medium Pressure Liquid Chromatography* (MPLC). Ekstrak kasar metanol dan air dimurnikan dengan MPLC. Fraksi – fraksi yang didapatkan dari kromatogram dikelompokkan berdasarkan puncak tertinggi, selanjutnya hasil fraksi dievaporasi dan dipantau kembali dengan KLT hingga didapatkan fraksi aktif yang kaya flavonoid yang digunakan untuk bioassay lanjut. Pelarut yang digunakan untuk pemurnian ekstrak kasar metanol dengan MPLC adalah etanol: heksana dan aquapure untuk ekstrak kasar air.

Pemurnian menggunakan Kolom C-18. Fraksi yang didapatkan dari pemurnian menggunakan MPLC dimurnikan kembali menggunakan kromatografi kolom C-18. Pelarut yang digunakan yaitu aquapure, metanol 10% dan metanol 20%. Hasil fraksi – fraksi yang didapatkan kemudian di KLT untuk mendapatkan fraksi yang aktif.

Identifikasi struktur senyawa aktif flavonoid. Analisis dilakukan menggunakan fraksi aktif hasil pemurnian kolom C-18. Sebanyak 6 mg fraksi aktif ditetesi dengan aquapure. Kemudian diukur puncak – puncak serapannya dengan metode spektrofotometri FTIR. Selanjutnya, 6 mg fraksi aktif tersebut diencerkan hingga 100 x pengenceran dan diukur panjang gelombang maksimum dengan metode spektrofotometri UV-Vis.

Penentuan kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol dan air. Analisis kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol dan air menggunakan spektrofotometer UV- Vis. Larutan standar yang digunakan adalah asam galat. Konsentrasi larutan standar yang digunakan ialah 0, 2, 5, 8, 10, 12 dan 15 mg/L. Larutan standar diukur dengan panjang gelombang 747 nm. Sedangkan, sampel yang digunakan adalah ekstrak kasar metanol dan air yang ditimbang sebanyak 5 mg kemudian dilarutkan 5 mL akuabides. Kemudian larutan standar dan sampel direaksikan dengan 1 mL folin dan didiamkan selama 5 menit. Selanjutnya, ditambahkan 4 mL Na_2CO_3 7,5% dan didiamkan 90 menit. Larutan standar yang digunakan adalah kuersetin. Konsentrasi yang digunakan 0, 2, 5, 8, 10, 12 dan 15 mg/L. Larutan standar diukur pada panjang gelombang 314 nm. Sedangkan, sampel yang digunakan adalah ekstrak kasar metanol dan air yang ditimbang sebanyak 5 mg kemudian dilarutkan 5 mL akuabides. Kemudian larutan standar dan sampel direaksikan dengan 0,3 mL $NaNO_2$ 5% dan didiamkan 5 menit. Selanjutnya, ditambahkan 0,3 mL $AlCl_3$ 10% dan diamkan 5 menit serta ditambahkan kembali 2 mL

NaOH 1 M.

Bioassay senyawa bioaktif terhadap hama kutu putih tanaman kopi (*P. citri*). Setiap senyawa aktif yang ditemukan pada tahapan isolasi ekstrak dilakukan bioassay terhadap hama kutu putih tanaman kopi (*P. citri*). Serangga uji yang digunakan yaitu imago *P. citri* betina dan kopi bebas hama yang digunakan sebagai media uji. Bioassay dilakukan dengan merendam media uji dengan ekstrak kasar metanol dan air selama 10 menit dengan 5 taraf konsentrasi ekstrak kasar metanol 0%, 0,10%, 0,20%, 0,30% dan 0,40%. Sedangkan, 5 taraf konsentrasi ekstrak kasar air 0%, 0,06%, 0,12%, 0,18% dan 0,24%. Kemudian diletakkan 10 ekor serangga uji pada media uji yang sudah dikering anginkan. Pengamatan mortalitas serangga uji dilakukan pada 24, 48 dan 72 jam setelah perlakuan. Percobaan ini dilakukan masing – masing 3 ulangan. Bioassay

ekstrak murni dilakukan dengan cara yang sama seperti pada bioassay ekstrak kasar. Namun, menggunakan ekstrak yang sudah dimurnikan dan 5 taraf konsentrasi yang berbeda yaitu 0%, 0,053%, 0,107%, 0,160% dan 0,213%.

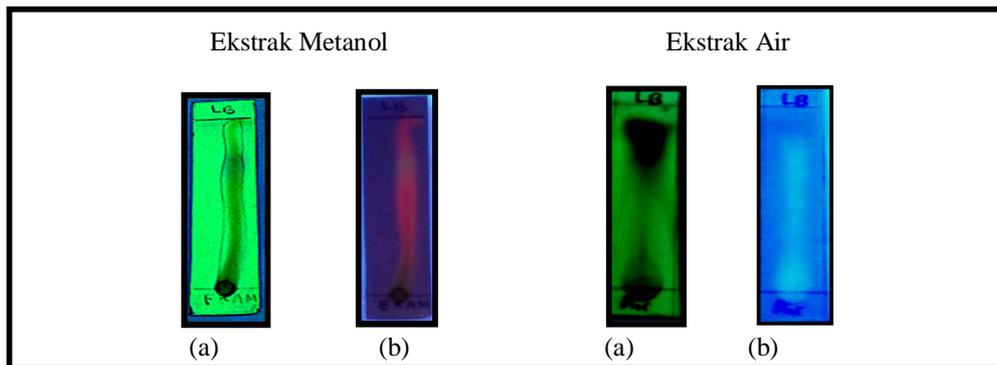
Analisis data. Data yang diperoleh dianalisis menggunakan analisis probit untuk menentukan nilai LC_{50} , uji Anara, uji lanjut Tukey's dan uji LSD seta *Paired t Test* untuk menentukan ekstrak yang efektif sebagai insektisida nabati.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil maserasi bertingkat dari 1.000 g serbuk daun gamal Kultivar Lampung Barat (KLB), didapatkan sebanyak 4.165 mL filtrat metanol kemudian dievaporasi dan didapatkan ekstrak pekat metanol sebanyak 75 g, selanjutnya dilakukan freeze dryer didapatkan 17,6 g ekstrak kasar metanol berupa pasta.

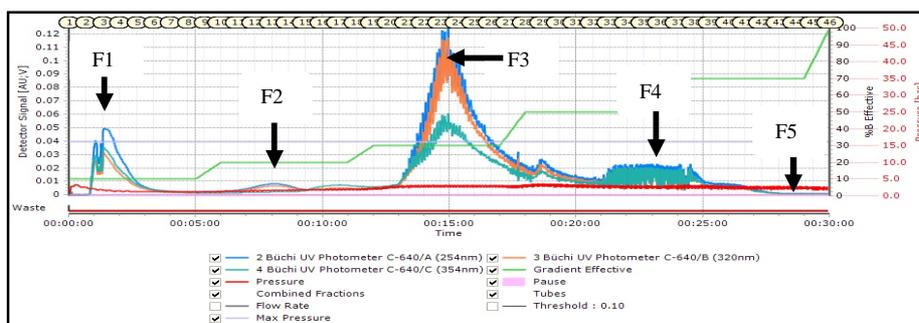
Hasil analisis KLT ekstrak kasar metanol KLB dengan larutan identifikasi $AlCl_3$ 10 % dengan eluen etanol: heksana perbandingan 3:7 menunjukkan adanya noda yang berwarna hijau dan kuning dibawah sinar UV λ 245 nm dan noda yang berpendar berwarna oranye dan kuning dibawah sinar UV λ 366 nm (Gambar 1).

Menurut Siregar (2010), adanya noda berwarna oranye yang berpendar dibawah sinar UV λ 366 nm menunjukkan keberadaan senyawa flavonoid pada ekstrak kasar serbuk daun gamal KLB. Keberadaan noda yang masih banyak dan panjang menandakan bahwa ekstrak kasar metanol serbuk daun gamal KLB masih belum terpisah secara sempurna (Aksah, 2016). Sedangkan, hasil filtrat air sebanyak 6.180 mL kemudian dievaporasi dan didapatkan 178 g ekstrak pekat, selanjutnya dilakukan freezdrayer didapatkan 66,1 g ekstrak kasar air berupa pasta. Sedangkan, hasil analisis KLT pada ekstrak kasar air serbuk daun gamal KLB dengan yang telah diamati dibawah sinar UV λ 366 nm dihasilkan noda berwarna biru muda dengan nilai Rf nya adalah 0,95 (Gambar 1).



Gambar 1. Kromatogram hasil KLT dari ekstrak kasar metanol dan ekstrak air serbuk daun gamal KLB dibawah sinar UV (a) λ 245 nm (b) λ 366 nm

Menurut Mabry dkk (1970), adanya noda biru muda yang berpendar dibawah sinar UV menunjukkan ekstrak kasar air serbuk daun gamal KLB (Gambar 1) mengandung senyawa flavonoid. Noda yang berpendar berwarna biru muda dibawah sinar UV menunjukkan flavonoid tersebut diduga golongan flavon dan flavonol (Markham, 1998). Hasil partisi 10 g ekstrak kasar metanol didapatkan fraksi etil asetat sebanyak 3,7 g dan fraksi air sebanyak 3,5 g. Hasil pemurnian fraksi etil asetat dengan MPLC menggunakan kolom silika 40 μ m dikelompokkan berdasarkan puncak tertinggi hasil serapan sinar UV yang dilihat dari kromatogram berikut ini.

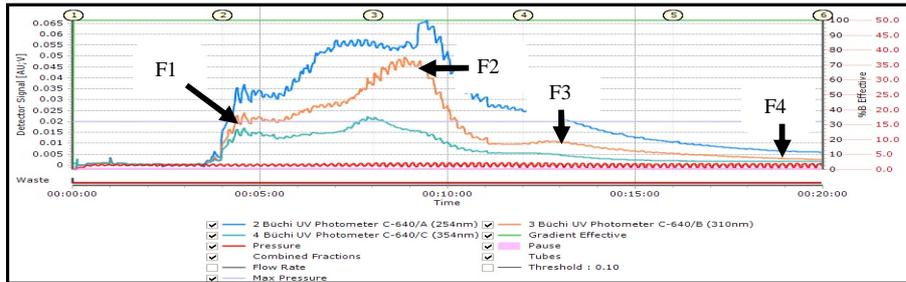


Gambar 2. Kromatogram MPLC ekstrak metanol serbuk daun gamal KLB

Hasil pengelompokan berdasarkan puncak tertinggi yang dilihat dari kromatogram didapatkan sebanyak 5 fraksi. Hasil pemilihan fraksi aktif berdasarkan absorbansi tertinggi dari puncak pada kromatogram, terpilih fraksi 3 (F3) sebagai fraksi yang aktif (Gambar 2).

Menurut Saifudin (2014), pemurnian ekstrak menggunakan MPLC jarang dihasilkan senyawa tunggal sehingga perlu pemurnian lanjutan pada fraksi 3. Pada penelitian Siregar (2010), ekstrak metanol yang digunakan untuk pemurnian lanjutan sebesar 3 g sedangkan, berat fraksi 3 setelah dievaporasi sebesar 0,5 g sehingga fraksi ini tidak cukup untuk dilakukan pemurnian lanjutan.

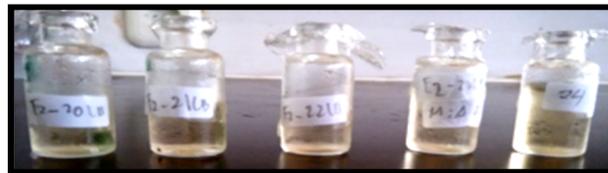
Hasil pemurnian ekstrak kasar air serbuk daun gamal KLB sebanyak 5,2 g menggunakan MPLC dengan kolom Sephadex LH - 20 didapatkan 4 fraksi, yang dibedakan berdasarkan puncak tertinggi yang dihasilkan pada panjang gelombang 310 nm (berwarna oranye) yang terlihat pada kromatogram (Gambar 3).



Gambar 3. Kromatogram ekstrak air serbuk daun gamal KLB

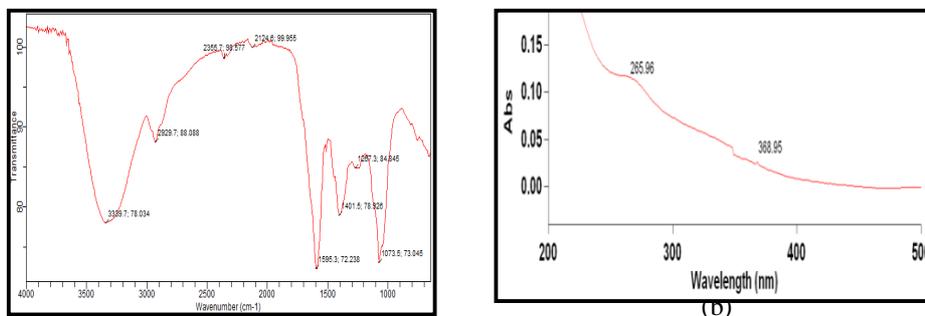
Fraksi yang memiliki puncak tertinggi adalah fraksi 2 (F2). Berat fraksi 2 yang dihasilkan sebesar 1 g. Hasil pemurnian kembali ekstrak air serbuk daun gamal KLB sebanyak 0,1 gram dengan kromatografi kolom menggunakan kolom C18 didapatkan sebanyak 28 fraksi.

Hasil analisis KLT pada masing – masing fraksi, didapatkan 5 fraksi memiliki noda tunggal dan nilai Rf yang sama yaitu 0,5. Menurut Khopkar (1990), nilai Rf yang sama besar dan noda yang sama dari hasil analisis KLT dapat disimpulkan bahwa senyawa yang teridentifikasi memiliki karakteristik yang sama. Berdasarkan hal tersebut 5 fraksi tersebut digabungkan (Gambar 4) karena dianggap memiliki karakteristik yang sama dan digunakan untuk analisis spektrofotometri FTIR dan UV – Vis. Gabungan fraksi ini diberi nama F2RM air serbuk daun gamal KLB (Gambar 4).



Gambar 4. F2RM air serbuk daun gamal KLB.

Sampel yang digunakan pada analisis ini adalah F2RM air serbuk daun gamal KLB. Hasil yang didapatkan dari analisis ini berupa spektrum (Gambar 5).



Gambar 5. Spektrum spektrofotometer (a) FTIR dan (b) UV-Vis dari isolat F2RM air serbuk daun gamal KLB

Dari data spektrum FTIR pada (Gambar 5) menunjukkan senyawa hasil isolat F2RM ekstrak air serbuk daun gamal KLB dapat diketahui adanya pita yang melebar pada daerah bilangan gelombang 3339,7 cm⁻¹, hal ini menunjukkan vibrasi uluran untuk gugus hidroksil (OH). Pada serapan bilangan gelombang 2929,7 cm⁻¹ menunjukkan adanya serapan C-H alifatik karena ada disebalah kanan 3000 cm⁻¹ (Sukadana, 2010).

Adanya serapan pada bilangan gelombang 1595,3 cm⁻¹ dan 1401,1 cm⁻¹ menunjukkan adanya gugus C=C aromatik. Serapan pada bilangan gelombang 1267,3 cm⁻¹ dan 1073, 5 cm⁻¹ diperikarakan adanya gugus C-O alkohol (Arisandy, 2010).

Hasil serapan pada F2RM ekstrak air serbuk daun gamal KLB memberikan serapan maksimum pada panjang gelombang 265 nm (pita II) dan 368 nm (pita I) (Gambar 5). Berdasarkan interpretasi spektrum UV –Vis mendukung hasil KLT dan FTIR bahwa ekstrak air serbuk daun gamal KLB adalah flavonoid. Golongan flavonoid yang memiliki panjang gelombang 250 – 280 nm (pita II) dan 330-385 nm (pita I) termasuk kedalam golongan senyawa flavonoid jenis flavonol (Neldawati dkk., 2013).

Menurut Tazzini (2014) flavonol sering ditemukan di daun tanaman sebagai glikosida, biasanya 3-glikosida dan aglikon flavonol. Susunan stuktur dasar dari flavonol adalah 3- hidroksi-2 fenil-1,4 benzopiron.

Hasil analisis terhadap kurva kalibrasi asam galat menghasilkan persamaan regresi linear $y = 0,040x + 0,002$ dengan koefisien korelasi (R²) 0,9993 dan hasil analisis kurva kalibrasi kuersetin didapatkan hasil persamaan regresi $y = 0,071x + 0,002$ dengan koefisien relasi (R²) 0,99563. Nilai R² yang mendekati 1 menunjukkan persamaan regresi tersebut linear dan dihasilkan pengukuran dengan ketetapan yang tinggi (Andayani dkk., 2008).

Hasil perhitungan nilai absorbansi sampel yang dimasukkan ke dalam kurva kalibrasi asam galat dan kurva kalibrasi kuersetin dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol dan air serbuk daun gamal KLB

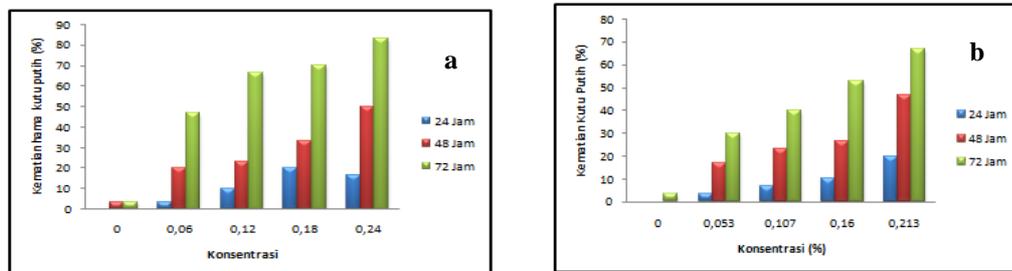
Jenis Ekstrak	Rata – rata Kadar Fenolik (mg/L Asam Galat ± SD)	Rata – rata Kadar Flavonoid (mg/L Kuersetin ±SD)
Metanol	3,6 ± 0,0000	7,4 ± 0,0500
Air	1,5 ± 0,0578	3,8 ± 0,3000

Berdasarkan perhitungan kadar fenolik dan flavonoid menggunakan spektrofotometri UV -Vis menunjukkan kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol lebih tinggi dibandingkan dengan ekstrak air. Hal ini terjadi mungkin disebabkan karena sifat pelarut yang digunakan dalam ekstraksi.

Menurut Suryani dkk. (2015), sifat pelarut mempengaruhi perbedaan senyawa yang diperoleh pada suatu ekstrak, sesuai dengan prinsip *likedissolves like*, suatu pelarut akan cenderung melarutkan senyawa yang mempunyai tingkat kepolaran yang sama.

Hasil bioassay dilakukan dengan ekstrak kasar metanol dan air serbuk daun gamal KLB didapatkan nilai LC₅₀ sebesar 0,171 % dan ekstrak kasar air KLB sebesar 0,107%. Nilai LC₅₀ ini digunakan sebagai penentuan rentang konsentrasi pengujian lanjut menggunakan ekstrak metanol dan ekstrak air KLB terhadap kematian hama kutu putih.

Hasil bioassay ekstrak kasar air dan ekstrak murni air daun gamal KLB dapat memberikan efek kematian terhadap kutu putih tanaman kopi (*P. citri*). Rata – rata kematian tersebut dapat dilihat pada Gambar7.



Gambar 7. Rata – rata persentase kematian dengan (a) ekstrak kasar air dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB.

Rata-rata persentase kematian kutu putih pada ekstrak kasar air dan ekstrak murni air mengalami peningkatan seiring lamanya waktu perlakuan dan konsentrasi ekstrak yang digunakan (Gambar 7). Semakin lama waktu perlakuan dan pemberian konsentrasi yang meningkat, maka rata-rata persentase kematian kutu putih semakin tinggi.

Menurut Raini (2017), semakin lama waktu perlakuan akan membuat zat toksik menumpuk dalam tubuh organisme sehingga menyebabkan keracunan kronik hingga menimbulkan kematian dan semakin tinggi pemberian konsentrasi ekstrak juga akan mempengaruhi kecepatan dalam mematikan serangga (Ningsih dkk., 2017).

Rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar air dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB setelah dilakukan uji lanjut Tukey's pada taraf α 5% pada konsentrasi dapat dilihat pada Tabel 2 dan uji LSD pada waktu pengamatan dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 2. Rata-rata kematian kutu putih dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB setelah perlakuan 72 jam dan pada konsentrasi yang berbeda

Ekstrak Kasar Air		Ekstrak Murni Air	
Konsentrasi	Rata-rata \pm SD	Konsentrasi	Rata-rata \pm SD
0,000	0,333 \pm 0,57a	0,000	0,333 \pm 0,577 a
0,060	4,667 \pm 0,57b	0,053	3,000 \pm 1,000 ab
0,120	6,667 \pm 1,15bc	0,107	4,000 \pm 1,732 bc
0,180	7,000 \pm 1,73c	0,160	5,333 \pm 0,577 bc
0,240	8,333 \pm 1,53c	0,213	6,667 \pm 1,155 c

Keterangan : Nilai rata-rata yang diikuti huruf kecil sama pada kolom yang sama tidak berbeda nyata pada taraf α = 5% dengan uji lanjut Tukey's

Tabel 3. Rata-rata kematian kutu putih dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB pada pengamatan waktu yang berbeda

Waktu setelah perlakuan (Jam)	Rata-rata Kematian Kutu Putih (Ekor \pm SD)	
	Ekstrak Kasar Air	Ekstrak Murni Air
24	1,000 \pm 1,000 a	0,867 \pm 0,256 a
48	2,600 \pm 1,957 a	2,267 \pm 0,463 b
72	5,400 \pm 3,066 b	3,867 \pm 0,624 c

Keterangan : Nilai rata-rata yang diikuti huruf kecil yang sama pada kolom yang sama tidak berbeda nyata pada taraf α = 5% dengan uji LSD

Secara statistik ekstrak kasar air dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB tidak menunjukkan perbedaan nyata, tetapi jika dilihat dari keefektifan kedua ekstrak dengan analisis probit LC₅₀ menunjukkan perbedaan nyata setelah 72 jam perlakuan (Tabel 4).

Tabel 4. Nilai LC₅₀ hasil analisis probit dan *paired T test* ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB pada 24 -72 jam setelah perlakuan

Waktu (Jam)	Nilai LC 50 %		Selisih (%)	Sig (2-tailed)
	Ekstrak Kasar Air	Ekstrak Murni Air		
24	-	-	-	0,164
48	-	-	-	0,417
72	0,107	0,148	0,041	0,003*

Keterangan - : Tidak dapat terdeteksi karena kematian kutu putih kurang dari 50%.

* : Signifikan *paired T test* (α = 0,05)

Nilai LC₅₀ ekstrak kasar air daun gamal KLB lebih kecil 0,041% dibandingkan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB (Tabel 4). Hal ini menunjukkan ekstrak kasar air serbuk daun gamal KLB lebih efektif dari ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB. Diduga senyawa flavonoid yang terkandung di dalam ekstrak kasar air bekerja secara sinergis dengan senyawa-senyawa lain dalam mematikan hama kutu putih tanaman kopi (*P. citri*). Menurut Tunjung (2013), senyawa metabolit sekunder pada tumbuhan ada yang bekerja secara sinergis (saling menguatkan) dalam menghasilkan aktivitasnya.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- Ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB mengandung senyawa flavonoid golongan flavonol dan struktur jenisnya terdiri dari susunan struktur dasar 3-hidroksi-2-fenil-1,4 benzopiron.
- Ekstrak kasar metanol serbuk daun gamal KLB memiliki kadar flavonoid sebesar 7,4 mg/L kuersetin. Sedangkan, ekstrak kasar air serbuk daun gamal KLB memiliki kadar flavonoid sebesar 3,8 mg/L kuersetin.
- Ekstrak kasar air lebih efektif dibandingkan ekstrak murni air serbuk daun gamal KLB dengan nilai LC_{50} 72 jam lebih kecil 0,041% (0,107%:0,148%).

5. Daftar Pustaka

- Aksah, F. (2016). Perbandingan Daya Racun Isolat Murni Ekstrak Metanol dan Ekstrak Air Daun Gamal (*Gliricidia maculata*) terhadap Mortalitas Kutu Putih (*Pseudococcus cryptus*) pada Tanaman Sirsak (*Annona muricata*). Tesis. Universitas Lampung. Bandar Lampung.
- Andayani, R., Lisawati, Y., dan Maimunah. (2008). Penentuan Aktivitas Antioksidan, Kadar Fenolat Total dan Likopen pada Buah Tomat (*Solanum lycopersicum L.*) *Jurnal Sains dan Teknologi Farmasi*, 13: 3-4.
- Apriliyani. (2016). Pengembangan Insektisida Nabati Dari Senyawa Flavonoid Ekstrak Daun Gamal (*Gliricidia maculata*, Hbr.) untuk Mengendalikan Hama Kutu Putih (*Planococcus citri* Risso.) Pada Tanaman Kopi (*Coffea robusta*, L.) Tesis. Universitas Lampung. Bandar Lampung.
- Arisandy. (2010). Senyawa Flavonoid dari Daun Sirih Merah (*Piper betle L. var Rubrum*). Skripsi. Universitas Islam Malang.
- Dadang dan Prijono D. (2011). Pengembangan Teknologi Formulasi insektisida Nabati untuk Menghasilkan Produk Sayuran Sehat. *Jurnal Ilmu Pertanian Indonesia*.
- Dinas Kehutanan. (2009). Penggunaan Pestisida Nabati dalam Bidang Kehutanan. [Diakses pada 25 Oktober 2017] <http://dishut.jabarprov.go.id>.
- Direktorat Perlindungan dan Perkebunan. (2002). Musuh Alami dan Hama Penyakit Tanaman Kopi Dapertemen Pertanian. Jakarta.
- Kementerian Perindustrian Republik Indonesia. (2013). Produksi Kopi Nusantara Ketiga Terbesar di Dunia. [Diakses pada 9 September 2017] <http://www.kemenperin.go.id>.
- Kementerian Pertanian Direktorat Jendral Perkebunan. (2017). Pengembangan Kopi Nasional Antisipasi Dampak Perubahan Iklim. [Diakses 21 Oktober 2017] <http://tanhun.ditjenbun.pertanian.go.id>.
- Khopkar, S. M. (1990). Konsep Dasar Kimia Analitik. Alih bahasa A. Saptoraharjo. UI-Press.
- Mabry, T. J., Markham, K.R., dan Thomas. (1970). The Systematic Identification of Flavonoid, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Markham, K. R. (1988). Cara Mengidentifikasi Flavonoid. Alih bahasa Kosasih Padmawinata. Penerbit ITB, Bandung.
- Neldawati, Ratnawulan, dan Gusnedi. (2013). Analisis Nilai Absorbansi dalam Penentuan Kadar Flavonoid untuk Berbagai Jenis Daun Tanaman Obat. *Journal Pillar of phycis* (2): 76-38.
- Ningsih, D. R., Zusfahair, dan Dwi, K. (2017). Identifikasi Senyawa Metabolit Sekunder serta Uji Aktivitas Ekstrak Daun Sirsak sebagai Antibakteri. *Jurnal Molukel* (1) (1) 101 – 111.

- Nukmal, N., Widiastuti, E.L., dan Sumiyani, E. (2009). Uji Efikasi Ekstrak Daun Gamal (*Gliricidia maculata*) terhadap Imago Hama Bisul Dadap (*Quadrastichus erythrinae*). Prosiding Seminar Nasional XX dan Kongres Biologi Indonesia XIV. Malang 24 -25 Juli 2009.
- Rahardjo, P. (2012). Kopi. PT. Penebar Swadaya. Jakarta.
- Raini, M. (2007). Toksikologi Pestisida Nabati dan Penangan Akibat Keracunan Pestisida. Media Litbang Kesehatan (17) (3). Dapertemen Kesehatan. Jakarta.
- Saifudin, A. (2014). Senyawa Alam Metabolit Sekunder. Teori, Konsep dan Teknik Pemurnian. Deepublish. Yogyakarta.
- Siregar, R. H. (2010). Isolasi Senyawa Flavonoid dari Ekstrak Metanol Daun Gamal (*Gliricidia maculata*) dan Uji sebagai Insektisida Nabati terhadap Hama Kutu Putih Tanaman Pepaya (*Paracoccus marginatus*). Skripsi. Universitas Lampung. Bandar Lampung.
- Sukadana, I. M. (2010). Aktivitas Senyawa Flavonoid dari Kulit Akar Awar – Awar (*Ficus septica*). *Jurnal Kimia* (4) (1):63-67.
- Suryani, N. C., Dewa, G. M. P, dan Anom, J., (2015). Pengaruh Jenis Pelarut terhadap Kandungan Total Flavonoid dan Aktivitas Antioksidan Ekstrak Daun Matoa (*Pometia pinnata*). *Jurnal Teknologi Pangan*. Universitas Udayana.
- Tazzini, N. (2014). Flavonols: Defenition. Structure, Food Sources. [Diakses pada 10 Agustus 2018] <https://www.tuscany-diet.net/2014/01/22/flavonoids-definition-structure-classification/amp/>.
- Tunjung, W. A. S., (2013). Obat Tradisional Herbal dan Metabolit Sekunder. *Artikel Kimia*. [Diakses pada 10 Agustus 2018] <https://majalah1000guru.net/2013>.

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE PADA SUATU CAKRAM

Yulia Novita¹, Suharsono S.², Agus Sutrisno³, dan Dorrah Azis⁴

Jurusan Matematika FMIPA UNILA^{1,2,3,4}
Jl. Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, B.Lampung 35145
Penulis Korespondensi : yulianovita976@gmail.com¹

ABSTRAK

Matematika merupakan ilmu yang memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Persamaan Laplace banyak digunakan pada ilmu kimia, biologi dan fisika. Diantaranya digunakan dalam suatu cakram (disk) berbentuk lingkaran piring dengan titik pusat (0,0). Penelitian ini bertujuan untuk menentukan solusi analitik persamaan Laplace dua dimensi pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar. Untuk memperlihatkan solusi dari persamaan Laplace dengan koordinat polar digunakan metode pemisahan peubah.

Kata kunci; Persamaan Laplace, Koordinat Polar, Cakram, Pemisahan Peubah, Solusi Analitik.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ratu ilmu artinya matematika merupakan sumber dari ilmu lain. Banyak cabang ilmu pengetahuan yang pengembangan teori-teorinya didasarkan pada pengembangan konsep matematika, seperti teori-teori dalam cabang fisika, biologi dan kimia yang ditemukan dan dikembangkan melalui konsep kalkulus khususnya tentang diferensial, contoh lain dalam bidang ekonomi seperti permintaan dan penawaran yang dikembangkan melalui konsep fungsi dan kalkulus tentang diferensial dan integral. Persamaan Laplace merupakan persamaan dasar dari teori potensial dan memegang peranan penting dalam ilmu fisika maupun teknik. Persamaan Laplace digunakan pada potensial listrik, potensial gravitasi, potensial fluida, maupun suatu aliran suhu yang tidak bergantung pada waktu. Pemodelan persamaan Laplace serta penentuan penyelesaian permasalahan syarat batas dengan metode pemisahan peubah. Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas *Dirichlet*. Bentuk umum persamaan Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Terdapat dua sistem koordinat yang bersesuaian dengan persamaan diferensial yang berdimensi dua yaitu sistem persamaan kartesius dan koordinat polar. Dalam hal ini untuk cakram dengan menggunakan persamaan koordinat polar. Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas dilempeng logam. Gagasan Fourier merupakan model sumber panas sebagai kombinasi linear dari gelombang sinus dan kosinus sederhana dan menulis pemecahan sebagai solusi eigen. Deret Fourier saat ini banyak memiliki penerapan dalam bidang teknik elektro, analisis vibrasi, akustika, optika, mekanika kuantum dan lain-lain.

Menurut Hartanto (2008) bahwapersamaan Laplace merupakan satu jenis persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan permasalahan dalam bidang sains. Persamaan ini merupakan persamaan eliptik dan merupakan jenis persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan dua peubah. Persamaan Laplace bentuk umumnya $\Delta v = 0$ sering ditemukan pada perpindahan panas, mekanika fluida, elastisitas, masalah mekanika dan fisika lainnya. Masalah penyelesaian persamaan $\Delta^2 v = 0$ didalam daerah D sering disebut *Dirichlet problem* dengan v sebagai fungsi yg diketahui di D . Persamaan Laplace dapat dituliskan dalam beberapa bentuk bergantung pada sistem koordinat yang digunakan yaitu :

Menurut Purcell (2010) bahwa persamaan Laplace dalam dua dimensi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pada sistem koordinat kartesius dan}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{pada sistem koordinat polar}$$

Dengan $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

Persamaan diferensial linear homogen dengan variabel bebas x dan t , serta variabel tak bebas u yang dilengkapi dengan syarat batas tertentu. Diasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $u(x, t) = X(x)T(t)$. Bila fungsi penyelesaian dapat difaktorkan menjadi suatu fungsi x dikali, fungsi nilai

$u(x, t) = X(x)T(t)$. Dimana $X(x)$ dan $T(t)$ adalah independent variabel X hanya fungsi dari x dan T hanya fungsi dari t (Miller, 1992).

Ketika mencari penyelesaian terhadap persamaan diferensial, seringkali menjumpai penyelesaian yang masih dalam bentuk umum. Namun, jika akan mencari suatu penyelesaian khusus, maka diperlukan suatu kondisi tertentu. Pada persamaan diferensial biasa yang hanya mengandung satu variabel bebas, satu bentuk kondisi tertentu saja sudah cukup mendapatkan penyelesaian khusus. Berbeda dengan persamaan diferensial parsial. Khusus persamaan ini diperlukana dua bentuk kondisi tertentu karena terdapat lebih dari satu variabel bebas. Kondisi yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah kondisi awal dan kondisi batas (Strauss, 1992). Nilai awal pada persamaan diferensial parsial berhubungan dengan waktu awal t_0 . Contohnya, suatu persamaan gelombang mempunyai nilai awal $u(x, t_0) = u(x, 0) = f(x)$ dan $u_t(x, 0) = 0$. Nilai awal $u(x, t_0) = f(x)$ menyatakan bahwa pada saat $t_0 = 0$ bentuk gelombangnya $f(x)$, sedangkan $u_t(x, 0) = 0$ menyatakan bahwa kecepatan awal yang diberikan pada gelombang adalah 0 (Miller, 1992).

2. Bahan dan Metode

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar dan mendapatkan solusi analitiknya adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi pustaka seperti buku dan jurnal dari perpustakaan dan internet.
2. Merumuskan masalah dalam bentuk persamaan Laplace pada koordinat polar.

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan solusi analitik persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar

- a. Menulis persamaan Laplace pada wilayah lingkaran dengan mempertimbangkan radius cakram.
- b. Menulis persamaan Laplace menggunakan koordinat polar.
- c. Mencari nilai turunan parsial pertama dan kedua pada koordinat polar.
- d. Mencari persamaan diferensial homogen menggunakan koordinat polar.
- e. Mencari solusi persamaan diferensial homogen menggunakan metode pemisahan peubah.
- f. Mencari solusi Masalah Syarat Batas menggunakan deret Fourier.

3. Hasil dan Pembahasan

Langkah-langkah penyelesaian persamaan Laplace pada suatu cakram (solusi persamaan Laplace dua dimensi pada koordinat polar) dengan menggunakan metode masalah syarat batas dan deret Fourier.

Dengan menggunakan persamaan dibawah ini akan mendapatkan hasil akhirnya

$$D = u_{xx} + u_{yy} = 0, \forall [x, y] \in D \quad (1)$$

$$u(a \cos \theta, a \sin \theta) = h(\theta) 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2)$$

Maka didapat persamaan Laplace pada koordinat polar

$$D = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad (3)$$

Pada persamaan (3) akan dilakukan pemisahan peubah dan masalah syarat batas untuk mendapatkan solusi analitiknya. Dengan menggunakan pemisahan peubah didapat persamaan :

$$\frac{r^2}{R}R'' + \frac{r'}{R}R' = -\frac{T''}{T} \quad (4)$$

Didapat dua persamaan

$$T'' = \lambda^2 T \quad (5)$$

$$r^2 R'' + rR' = \lambda^2 R \quad (6)$$

Untuk persamaan (5) didapat hasilnya

$$T(\theta) = A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta \quad (7)$$

Dan persamaan (6) hasilnya

$$R(r) \begin{cases} cr^\lambda + dr^{-\lambda} (\lambda \neq 0) \\ c \ln|r| + d (\lambda = 0) \end{cases} \quad (8)$$

Apabila persamaan (5) dan persamaan (6) digabungkan maka diperoleh

$$u_{\lambda}(r, \theta) = \begin{cases} (A_{\lambda} \cos(\lambda\theta) + B_{\lambda} \sin(\lambda\theta))r^{\lambda} + (C_{\lambda} \cos(\lambda\theta) + D_{\lambda} \sin(\lambda\theta))r^{-\lambda} & (\lambda \neq 0) \\ A_0 + C_0 \ln|r| & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (9)$$

Sehingga pada persamaan Laplace dengan koordinat polar mempunyai nilai bahwa ketika $\lambda = 0$ maka $\cos(\lambda\theta) = 1$ dan $\sin(\lambda\theta) = 0$. Untuk $\lambda = n \in \mathbb{Z} : \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, sehingga nilai λ tidak berlaku maka persamaan dari C dan D dibuang. Sehingga menjadi

$$u_n(r, \theta) = \begin{cases} A_n \cos(n\theta)r^n + B_n \sin(n\theta)r^n & n = 1, 2, 3, \dots \\ A_0 & n = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Dengan menyederhanakan persamaan (10) diperoleh

$$u_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta)r^n \quad n = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Dari teori Fourier diketahui bahwa setiap fungsi kontinu pada lingkaran mempunyai persamaan Fourier yang unik dengan persamaan deret Fouriernya yaitu

$$h(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \quad (12)$$

Dengan persamaan (12) akan dicari nilai a_0, a_n, b_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \quad (13)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (15)$$

$$h(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \quad (16)$$

Kombinasi persamaan (11) dan persamaan (16) diperoleh

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta)r^n \quad (17)$$

Dengan

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \quad n = 0$$

$$A_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jadi persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar mendapatkan solusi analitiknya yaitu deret Fourier.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah yang telah dikerjakan dalam persamaan Laplace ini, diperoleh kesimpulan bahwa solusi dari persamaan Laplace $D = u_{xx} + u_{yy}$ yang diperoleh berdasarkan masalah syarat batas dan deret Fourier dengan hasil

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta)r^n \text{ dengan}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta, \quad n = 0$$

$$A_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

5. Daftar Pustaka

- Hartanto, S. A. (2008). *Penyelesaian Numerik Persamaan Laplacedan PersamaanPoisson dalam PelatPersegiPanjangdanPelatCakramDengan MetodeBeda-Hingga*. UniversitasSanata Dharma. Yogyakarta.
- L.Ross, S. (1984). *Differential Equations*. 3rd Ed. John Wiley&Sons, Inc. New York.
- Miller, William B., dan Humi M. (1992). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. PWS-KENT Publishing Company. Boston.
- Mufidah, F., dan Jauhuri, M. (2015). Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Pada Koordinat Polar. *Jurnal Matematika dan Aplikasi*. 3(4): 46-47.

Purcell, Dale V., dan Edwin J. (2010). *Calculus Kalkulus Jilid 1 (Alih Bahasa Indonesia oleh I Nyoman Susila)*. Binarupa Aksara. Tangerang.

Strauss, dan Walter A. (1992). *Partial Differential Equations (An Introduction)*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

KAJIAN *BEST-FIT* DISTRIBUSI PROBABILITAS UNTUK CURAH HUJAN HARIAN DAN APLIKASINYA DALAM MITIGASI HUJAN EKSTRIM DI PULAU SUMATERA

Achmad Rafli Pahlevi¹, Warsono²

Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung^{1,2}
Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika¹
Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat, Universitas Lampung²
Penulis Korespondensi : achmad.raflie@bmkg.go.id¹

Abstrak

Kejadian hujan ekstrim, sebagai salah satu dari kejadian cuaca ekstrim dalam hidrometeorologi yang paling sering terjadi, sehingga mendapatkan perhatian yang lebih karena dampaknya yang besar pada perekonomian dan kehidupan manusia. Kajian distribusi probabilitas menjadi penting dalam menentukan model yang paling sesuai dalam mengantisipasi kejadian ekstrim dari fenomena alam, seperti hujan ekstrim dan banjir. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan *best-fit* distribusi probabilitas pada kasus hujan harian maximum selama 5 tahun dari tahun 2013-2017 di Sumatera dengan menggunakan data curah hujan harian yang didapatkan dari 8 stasiun pengamatan cuaca. Distribusi yang digunakan adalah distribusi normal, gamma, weibull, *generalized extreme value*, dan *generalized pareto*. Pendugaan parameter dilakukan dengan metode *maximum likelihood* dan distribusi terbaik ditentukan dengan menggunakan tes Kolmogrov-Smirnov dan Andersen-Darling. Distribusi terbaik berdasarkan tes statistik tersebut adalah distribusi *generalized pareto*, yang menunjukkan kecocokan yang baik dalam memodelkan curah hujan di Pulau Sumatera. Aplikasi penggunaan distribusi Pareto menunjukkan potensi hujan ekstrim di Pesisir Barat Lampung 1.1%, Bengkulu 1.1%, Padang 1.5%, Sibolga 1.7%, Kerinci 0.3%, Medan 0.5%, Palembang 0.7%, dan Bandar Lampung 0.4%.

Kata kunci: *Distribusi Probabilitas, Best-Fit, Maximum Likelihood Estimation, Hujan Ekstrim*

1. Pendahuluan

Hujan total tahunan dan variabilitas hujan tahunan merupakan variabel iklim yang penting untuk kajian keseimbangan air, pengembangan klimatologi regional, perencanaan dan manajemen sumber air (Meier, 2016). Variabilitas tahunan hujan disebabkan oleh beberapa factor seperti anomali atmosfer jangka panjang (Higgins dkk., 1999)(Barlow dkk., 2001), ketahanan musim (Faticchi dan Ivanov, 2014), serta cuaca dan pembentukan hujan yang acak. Variasi tahunan hujan merupakan sebuah gambaran penting dari iklim lingkungan yang berdampak langsung pada kekeringan (Dai dkk, 2004), produktivitas tanaman dalam ekosistem dengan air yang terbatas (Knapp dan Smith, 2001), serta distribusi hujan ekstrim.

Kejadian hujan ekstrim, sebagai salah satu dari kejadian cuaca ekstrim dalam hidrometeorologi yang paling sering terjadi, sehingga mendapatkan perhatian yang lebih karena dampaknya yang besar pada perekonomian dan kehidupan manusia. Kajian distribusi probabilitas menjadi penting dalam menentukan model yang paling sesuai dalam mengantisipasi kejadian ekstrim dari fenomena alam, seperti hujan ekstrim dan banjir. Membangun sebuah distribusi probabilitas yang memenuhi kecocokan yang baik untuk intensitas curah hujan harian telah lama menjadi topik penelitian dalam bidang hidrologi dan meteorologi. Model probabilitas telah diaplikasikan dalam banyak fenomena alam seperti kecepatan angin, debit sungai, dan kualitas udara (Oguntunde dkk., 2014).

Untuk menentukan distribusi probabilitas yang paling cocok untuk lokasi tertentu, penentuan model distribusi probabilitas menjadi penting. Alam dkk (2018) menyatakan bahwa distribusi probabilitas yang sering digunakan dalam hidrometeorologi adalah distribusi normal, weibull, eksponensial, pearson-6, *generalized extreme value*, dan *generalized pareto*.

Distribusi Normal atau yang sering disebut gaussian sering digunakan untuk menggambarkan curah hujan. Penggunaan distribusi normal untuk mengevaluasi jumlah curah hujan harian di Australia telah dilakukan oleh Fu dkk (2009). Fungsi kepekatan peluang (*Probability Density Function*), $f(x)$ dan fungsi

distribusi kumulatif (*Cumulative Distribution Function*), $F(X)$ untuk variabel x acak normal dijelaskan dengan,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]\right) dx \quad (2)$$

dengan x adalah $-\infty < x < \infty$.

Distribusi Weibull atau distribusi nilai ekstrim tipe 3 digunakan oleh Zhan dkk (2018) untuk menggambarkan curah hujan harian dan perubahan iklim di China selama 1961-2011. PDF dan CDF dijelaskan sebagai berikut,

$$f(x) = \left(\frac{k}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k\right] \quad (3)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k\right] \quad (4)$$

dengan rentang dari $x > 0; \alpha, k > 0$.

Salah satu distribusi yang sering digunakan dalam hidrologi adalah distribusi pearson tipe 5 (P5) yang merupakan distribusi gamma 2 parameter dengan parameter ketiga adalah lokasi. PDF dan CDF dari P5 adalah,

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta}{x-\gamma}\right)}{\beta\Gamma(\alpha)\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha+1}} \quad (5)$$

$$F(x) = 1 - \frac{\Gamma_{\beta/(x-\gamma)}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad (6)$$

Distribusi GEV dan GP adalah distribusi nilai ekstrim yang belakangan ini sering digunakan dalam klimatologi (Mudelsee, 2014). Distribusi GEV menggunakan *block maxima* dalam menentukan nilai ekstrim dari suatu distribusi. Ashoori dkk (2017) menggunakan distribusi GEV untuk memodelkan curah hujan maksimum di Iran PDF dan CDF dijelaskan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{\xi}} \quad (7)$$

$$F(x) = \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \quad (8)$$

Distribusi GP menggunakan *peaks-over-threshold* dalam menentukan nilai ekstrim. Pendekatan POT digunakan karena efektif dalam menjelaskan informasi kejadian ekstrim (Acero dkk., 2010). PDF dan CDF dijelaskan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{\xi}} \quad (9)$$

$$F(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (10)$$

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan distribusi terbaik dalam menggambarkan curah hujan harian di Pulau Sumatera. Penentuan distribusi terbaik akan dilakukan dengan menggunakan tes statistic, yaitu tes *Kolmogrov-Smirnof* (KS) dan *Andersen-Darling* (AD). Distribusi terbaik akan diaplikasikan untuk menentukan probabilitas terjadinya hujan ekstrim harian di Pulau Sumatera.

2. Bahan dan Metode

Data yang digunakan adalah data intensitas curah hujan harian selama 6 tahun dari tahun 2012-2017 (2192 data/lokasi). Lokasi penelitian dilakukan di Pulau Sumatera dengan menggunakan data dari 8 lokasi di Pulau Sumatera yaitu Pesisir Barat Lampung, Bandar Lampung, Bengkulu, Kerinci, Padang, Sibolga, Medan, dan Palembang. Data hujan tersebut didapatkan dari Pos Hujan Krui, Stasiun Meteorologi Maritim Lampung, Stasiun Meteorologi Bengkulu, Stasiun Meteorologi Kerinci, Stasiun Meteorologi Padang, Stasiun Meteorologi Sibolga, Stasiun Meteorologi Kualanamu Medan, dan Stasiun Meteorologi Palembang.

Data hujan dari 8 stasiun di Pulau Sumatera akan digunakan untuk *best-fit* (kecocokan terbaik) dengan distribusi probabilitas. Proses pencocokan data menggunakan teknik statistik tertentu, sehingga dapat menentukan parameter terbaik berdasarkan sampel data. Salah satu keuntungan menggunakan perangkat lunak untuk pencocokan data dan interpretasi probabilitas, bahwa dapat secara otomatis mencocokkan data dengan berbagai distribusi secara terus-menerus. Metode ini digunakan pada kasus dimana terdapat sangat sedikit atau tidak adanya informasi terkait pola distribusi data dan ingin mendapatkan tipe distribusi terbaik

(Mehranian, 2014). Salah satu perangkat lunak yang digunakan dalam proses pencocokan data adalah *EasyFit*.

EasyFit adalah perangkat lunak penganalisis data dan simulasi yang memungkinkan untuk pencocokan pada distribusi probabilitas dari data sampel yang ada dan disimulasikan. *EasyFit* dapat juga digunakan untuk mengidentifikasi parameter pada fungsi model eksplisit, sistem keadaan tetap, transformasi Laplace, sistem persamaan differensial biasa, persamaan differensial aljabar, atau sistem persamaan diferensial parsial bergantung waktu dengan atau tanpa persamaan aljabar (Schittkowski, 2002).

Proses penyocokan data (*best-fit*) dilakukan dengan menggambarkan grafik *probability density function* (PDF) dan *cumulative distribution function* (CDF) dari masing-masing distribusi probabilitas, serta melakukan tes *goodness of fit*. Tes *goodness of fit* yang digunakan adalah tes KS dan AD, dengan nilai tes yang paling kecil menunjukkan kecocokan distribusi paling baik dengan data.

Tes statistik untuk KS tes adalah,

$$D \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \left(F(X_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(X_i) \right) \quad (14)$$

Tes statistik untuk Anderson-Darling adalah,

$$A^2 = -N - S \quad (15)$$

dimana,

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)}{N} \left[\ln F(X_i) + \ln(1 - F(X_{N+1-i})) \right] \quad (16)$$

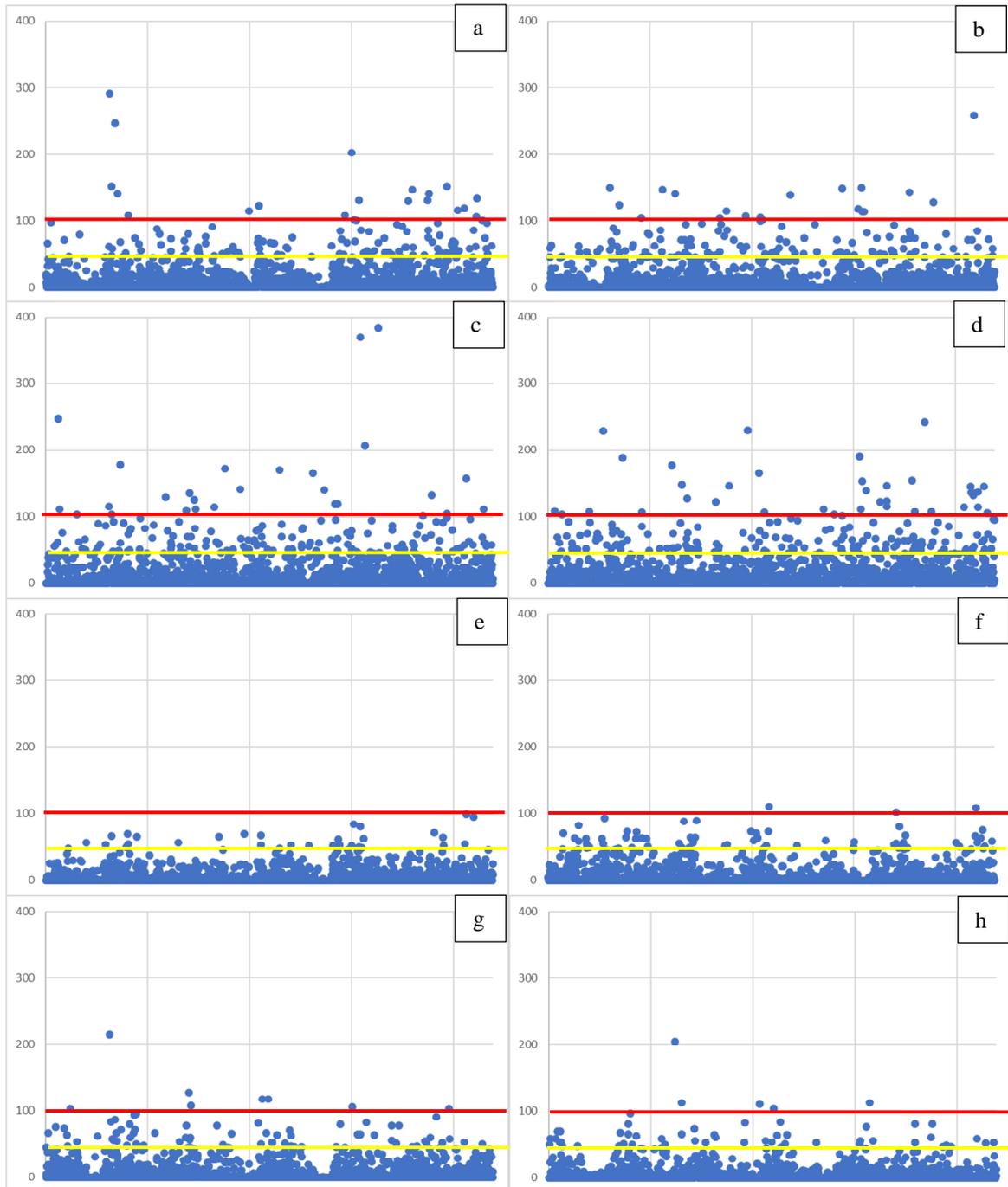
3. Hasil dan Pembahasan

Pada Gambar 1 menunjukkan sebaran data intensitas curah hujan dalam milimeter selama 5 tahun di enam lokasi di Pulau Sumatera. Berdasarkan Perka BMKG No.9 Tahun 2010, hujan lebat adalah hujan dengan intensitas hujan lebih dari 50 mm dalam satu hari, sedangkan hujan sangat lebat adalah hujan dengan intensitas lebih dari 100 mm. Pada gambar 1, garis kuning menunjukkan intensitas hujan lebat (>50 mm) dan garis merah menunjukkan intensitas hujan sangat lebat (>100 mm).

Berdasarkan Gambar 1, frekuensi intensitas hujan sangat lebat yang tinggi terjadi di wilayah Pesisir Barat Lampung, Bengkulu, Padang, dan Sibolga (gambar 1. a,b,c, dan d) dengan frekuensi kejadian lebih dari 10 kali kejadian selama 6 tahun. Frekuensi intensitas hujan sangat lebat yang rendah terjadi di Medan, Palembang, dan Bandar Lampung (Gambar 1. f, g, dan h) dengan frekuensi kejadian hujan lebat kurang dari 10 kali kejadian. Wilayah Kerinci merupakan satu-satunya wilayah di Pulau Sumatera yang tidak ada kejadian hujan sangat lebat dalam 6 tahun terakhir.

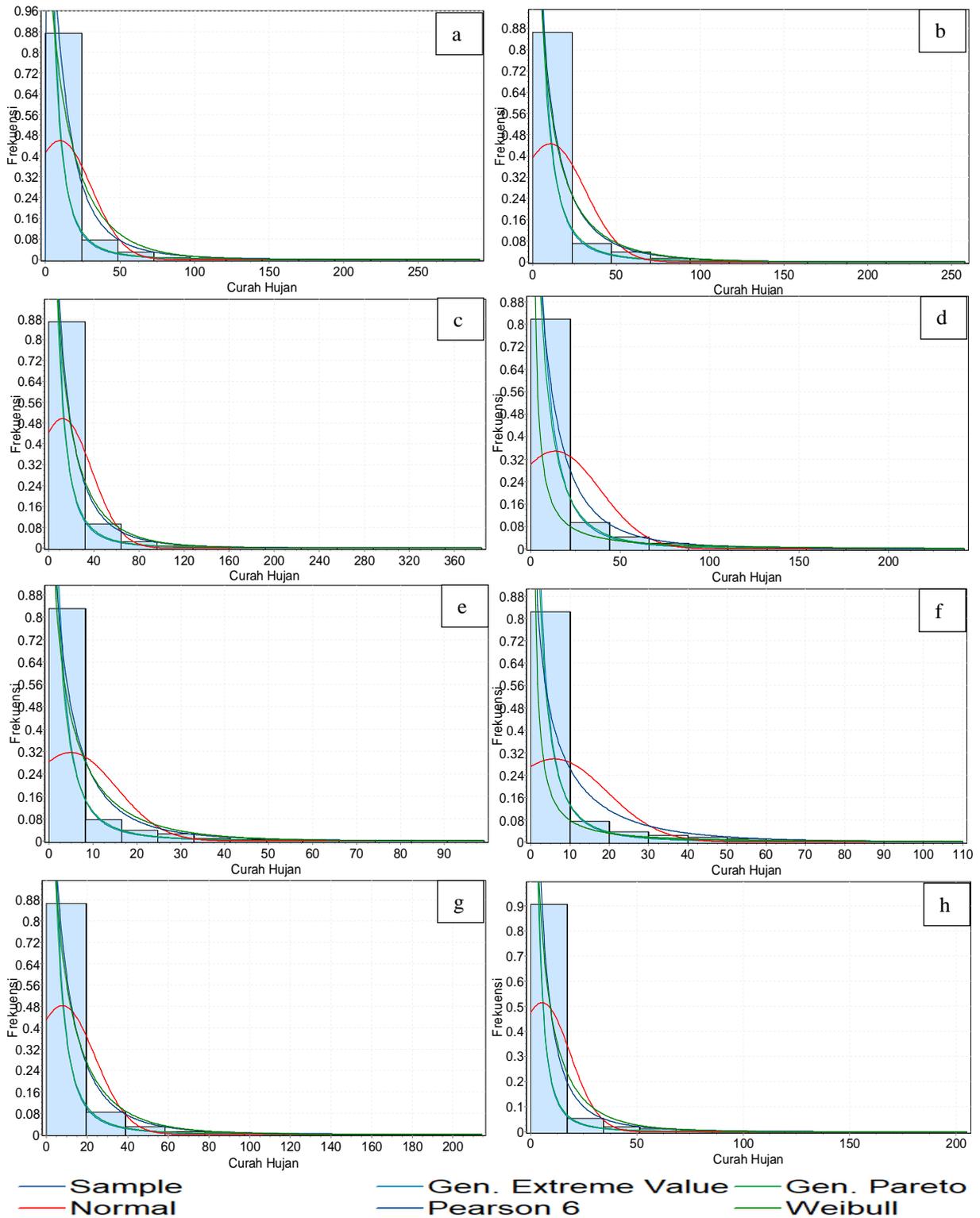
Pada Gambar 2, data intensitas curah hujan di Pulau Sumatera adalah *positively skewed* (miring ke arah positif) dan memiliki modus dengan nilai 0 mm. Berdasarkan Gambar 2, penulis mendapatkan alasan dalam menggunakan model distribusi miring ke arah positif (*positively skewed*) pada tulisan ini. Kemiringan grafik ke arah positif menunjukkan bahwa frekuensi tertinggi terjadi pada curah hujan 0-20 mm, sedangkan curah hujan di atas 50 mm memiliki frekuensi yang sangat rendah dan semakin ke kanan frekuensi semakin mendekati 0.

Berdasarkan Gambar 2, fungsi kepekatan peluang (FKP) digambarkan dengan baik oleh distribusi-distribusi nilai ekstrim seperti distribusi weibull, pearson 6, GEV, dan GP, sedangkan distribusi normal tidak dapat menggambarkan dengan baik. Pada Gambar 2.a-h, distribusi GEV dan GP merupakan distribusi terbaik dalam menggambarkan hujan. Pada Gambar 2.a, b, c, e, g,dan h, distribusi Weibull dan Pearson 6 menunjukkan grafik fkp yang lebih condong ke arah kanan. Hal ini dapat berdampak pada penentuan yang lebih besar (*overstimate*) terhadap kejadian ekstrim. Pada Gambar 2.e dan f, distribusi Pearson tetap menunjukkan grafik FKP yang condong ke kanan, sedangkan distribusi Weibull lebih condong ke arah kiri. Grafik yang lebih condong ke kiri dibandingkan datanya akan berdampak pada penentuan yang lebih rendah (*understimate*) terhadap kejadian ekstrim.



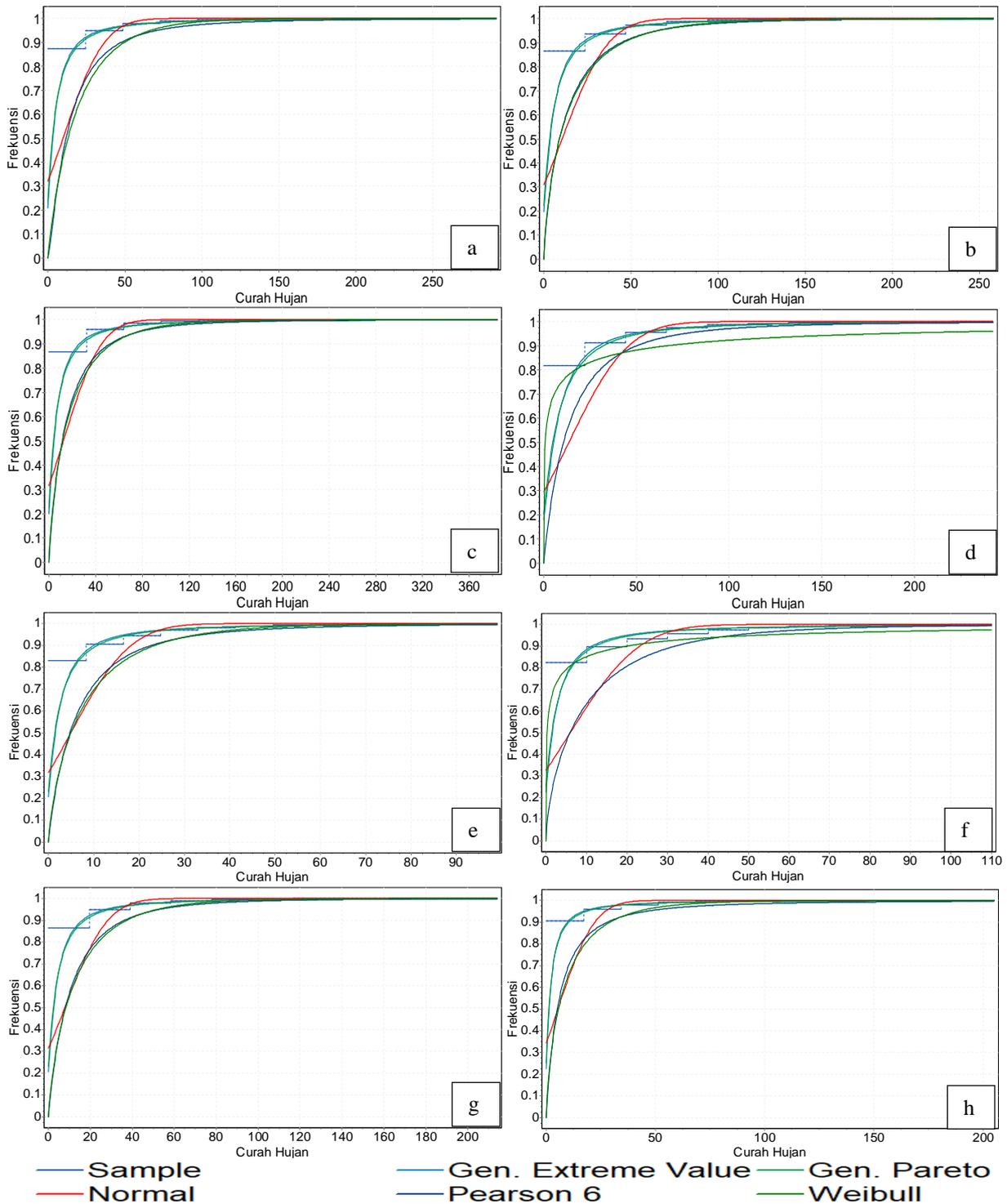
Gambar 1. Sebaran data (*scatter plot*) curah hujan di a) Perairan Barat Lampung, b) Bengkulu, c) Padang, d) Sibolga, e) Kerinci, f) Medan, g) Palembang, dan h) Bandar Lampung

Pada Gambar 3, grafik fungsi distribusi kumulatif (FDK) curah hujan dengan menggunakan distribusi pearson 6, normal, weibull, GEV, dan GP dapat dilihat distribusi mana yang paling cocok dalam menggambarkan distribusi curah hujan. Berdasarkan Gambar 3, distribusi GEV dan GP merupakan distribusi terbaik yang dapat menggambarkan distribusi kumulatif dari hujan, sedangkan distribusi normal, weibull, dan pearson 6, memiliki kecocokan yang rendah.



Gambar 2. Grafik fungsi kepekatan peluang di a) Perairan Barat Lampung, b) Bengkulu, c) Padang, d) Sibolga, e) Kerinci, f) Medan, g) Palembang, dan h) Bandar Lampung

Grafik FDK dari distribusi pearson 6 dan normal memiliki grafik yang lebih condong ke kanan. Hal ini akan berdampak pada prediksi terjadinya kejadian hujan ekstrim yang lebih tinggi dibandingkan dengan kejadian sebenarnya. Grafik FDK dari distribusi weibull memiliki grafik yang condong ke kanan di Pesisir Barat Lampung, Padang, Bengkulu, Kerinci, Palembang, dan Bandar Lampung, sedangkan untuk wilayah Sibolga dan Medan, grafik FDK lebih condong ke kiri.



Gambar 2. Grafik fungsi distribusi kumulatif di a) Perairan Barat Lampung, b) Bengkulu, c) Padang, d) Sibolga, e) Kerinci, f) Medan, g) Palembang, dan h) Bandar Lampung

Selain menggunakan grafik, pencocokan distribusi dengan data sampel dilakukan melalui tes *goodness of fit*. Berdasarkan tabel 1, tipe distribusi terbaik yang dites menggunakan kolmogrov-smirnov (KS) dan anderson-darling (AD) adalah tipe distribusi GP, karena memiliki hasil nilai tes terendah. Pada tes menggunakan KS, tipe distribusi GP memiliki nilai terendah di Pesisir Barat Lampung (0.29313), Bengkulu (0.22245), Padang (0.22355), Kerinci (0.24343), Kualanamu (0.26626), Palembang (0.24896), dan Bandar Lampung (0.28915). Tes KS di wilayah Sibolga dari distribusi GEV memiliki nilai terendah yaitu 0.18505 dan distribusi GP di peringkat kedua yaitu 0.20093.

Tabel 1. Tes *goodness of fit* dengan tes Kolmogorof-Smirnov (KS) dan Anderson Darling(AD)

Wilayah	Distribusi	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling
Pesisir Barat Lampung	Gen Extreme Value	0.31862	213.27
	Weibull	0.52653	-351.88
	Gen Pareto	0.29313	186.28
	Normal	0.32048	343.95
	Pearson 6	0.52653	1794.1
Bengkulu	Gen Extreme Value	0.22697	136.64
	Weibull	0.41724	51.197
	Gen Pareto	0.22245	118.21
	Normal	0.30974	285.22
	Pearson 6	0.41724	1109.8
Padang	Gen Extreme Value	0.23553	157.42
	Weibull	0.43443	-13.723
	Gen Pareto	0.22355	135.37
	Normal	0.31675	310.68
	Pearson 6	0.43443	1288.8
Sibolga	Gen Extreme Value	0.18505	104.87
	Weibull	0.35082	328.18
	Gen Pareto	0.20093	87.815
	Normal	0.29596	272.18
	Pearson 6	0.35252	986.78
Kerinci	Gen Extreme Value	0.2684	180.19
	Weibull	0.47548	-178.4
	Gen Pareto	0.24343	157.31
	Normal	0.31843	342.72
	Pearson 6	0.47548	1456.9
Kualanamu	Gen Extreme Value	0.29367	227.44
	Weibull	0.51729	-182.67
	Gen Pareto	0.26626	200.93
	Normal	0.32765	371.88
	Pearson 6	0.51729	1607.5
Palembang	Gen Extreme Value	0.27439	174
	Weibull	0.4815	-235.4
	Gen Pareto	0.24896	151.6
	Normal	0.31461	310.83
	Pearson 6	0.4815	1411
Bandar Lampung	Gen Extreme Value	0.31444	226.81
	Weibull	0.53994	-176.58
	Gen Pareto	0.28915	202.25
	Normal	0.34426	407.38
	Pearson 6	0.53994	1778.4

Pada tes menggunakan AD, tipe distribusi GP memiliki nilai terendah di Pesisir Barat Lampung (186.28), Padang (135.37), Sibolga (87.815), Kerinci (157.31), Kualanamu (200.93), Palembang (151.6), dan Bandar Lampung (202.25), sedangkan di Bengkulu nilai tes AD distribusi weibull memiliki nilai terendah yaitu 51.197. Berdasarkan tabel 1, dapat ditunjukkan bahwa distribusi terbaik dalam menggambarkan data observasi curah hujan yaitu distribusi GP.

Pada tabel 2 ditunjukkan estimasi parameter dari distribusi GP dengan parameter sebagai berikut, ξ adalah parameter bentuk kontinu, σ adalah parameter skala kontinu, dan μ adalah parameter lokasi kontinu. Dengan menggunakan persamaan 9 maka didapatkan fkp dari masing-masing wilayah,

$$f(x) = \frac{1}{4.9723} \left(1 + 0.55763 \frac{(x + 1.4246)}{4.9723} \right)^{-1 - \frac{1}{0.55763}}$$

untuk wilayah Pesisir Barat Lampung,

$$f(x) = \frac{1}{5.5584} \left(1 + 0.53383 \frac{(x + 1.4968)}{5.5584} \right)^{-1 - \frac{1}{0.53383}}$$

Tabel 2. Estimasi Parameter dari model distribusi *Generalized Pareto*

Wilayah	k	σ	μ
Pesisir Barat Lampung	0.55763	4.9723	-1.4246
Bengkulu	0.53383	5.5584	-1.4968
Padang	0.52625	6.6518	-1.8003
Sibolga	0.46875	8.2153	-1.9431
Kerinci	0.5711	2.3984	-0.6835
Kualanamu	0.63058	2.5042	-0.794
Palembang	0.55465	3.9579	-1.1283
Bandar Lampung	0.66151	2.0095	-0.6393

Tabel 3. Fungsi distribusi kumulatif (FDK) dari distribusi GP

Wilayah	P(X≤10)	P(X>10)	P(X>50)	P(X>100)
Pesisir Barat Lampung	77.2	22.8	3.2	1.1
Bengkulu	75.2	24.8	3.5	1.2
Padang	71.4	28.6	4.5	1.5
Sibolga	67	33	5.3	1.7
Kerinci	89	11	1.1	0.4
Kualanamu	87.5	12.5	1.6	0.6
Palembang	81.6	18.4	2.3	0.7
Bandar Lampung	89.7	10.3	1.3	0.5

untuk wilayah Bengkulu,

$$f(x) = \frac{1}{6.6518} \left(1 + 0.52625 \frac{(x + 1.8003)}{6.6518} \right)^{-1 - \frac{1}{0.52625}}$$

untuk wilayah Padang,

$$f(x) = \frac{1}{8.2153} \left(1 + 0.46875 \frac{(x + 1.9431)}{8.2153} \right)^{-1 - \frac{1}{0.46875}}$$

untuk wilayah Sibolga,

$$f(x) = \frac{1}{2.3984} \left(1 + 0.5711 \frac{(x + 0.68348)}{2.3984} \right)^{-1 - \frac{1}{0.5711}}$$

untuk wilayah Kerinci,

$$f(x) = \frac{1}{2.5042} \left(1 + 0.63058 \frac{(x + 0.79402)}{2.5042} \right)^{-1 - \frac{1}{0.63058}}$$

untuk wilayah Kualanamu,

$$f(x) = \frac{1}{3.9579} \left(1 + 0.55465 \frac{(x + 1.1283)}{3.9579} \right)^{-1 - \frac{1}{0.55465}}$$

untuk wilayah Palembang, dan

$$f(x) = \frac{1}{2.0095} \left(1 + 0.66151 \frac{(x + 0.63931)}{2.0095} \right)^{-1 - \frac{1}{0.66151}}$$

untuk wilayah Bandar Lampung.

Maka dengan persamaan tersebut di atas akan didapatkan probabilitas dengan x pada Tabel 3. Pada Tabel 3, probabilitas hujan dengan kategori sangat lebat (ekstrem) atau curah hujan dengan intensitas hingga melebihi 100 mm relatif rendah. Probabilitas hujanlebat di wilayah Pulau Sumatera berturut-turut yaitu Pesisir Barat Lampung (3.2%), Padang (4.5%), Sibolga (5.3%), Kerinci (1.1%), Kualanamu (1.6%), Palembang (2.3%), dan Bandar Lampung (1.3%). Probabilitas hujan sangat lebat (ekstrem) di 8 wilayah di Pulau Sumatera berturut-turut Pesisir Barat Lampung (1.1%), Bengkulu (1.2%), Padang (1.5%), Sibolga (1.7%), Kerinci (0.4%), Kualanamu (0.6%), Palembang (0.7%), dan Bandar Lampung (0.5%). Berdasarkan tabel 3, potensi terjadinya hujan ekstrem tertinggi di Sibolga dan terendah di Kerinci.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan observasi data hujan di 8 wilayah di Pulau Sumatera bahwa data hujan *positively skewed* (miring ke arah positif). Distribusi *generalized pareto* (GP) adalah distribusi terbaik dalam menggambarkan curah hujan dengan nilai terendah pada tes KS dan AD. Distribusi terbaik setelah distribusi GP adalah distribusi GEV dan distribusi paling buruk dalam menggambarkan curah hujan adalah distribusi normal. Probabilitas hujan ekstrim di 8 wilayah di Pulau Sumatera berturut-turut Pesisir Barat Lampung (1.1%), Bengkulu (1.2%), Padang (1.5%), Sibolga (1.7%), Kerinci (0.4%), Kualnamu (0.6%), Palembang (0.7%), dan Bandar Lampung (0.5%).

Perlu adanya kajian mengenai pendugaan parameter dari distribusi GP yang berkaitan dengan ketakbiasan, varians minimum, dan konsistensi. Distribusi GP dapat digunakan untuk pengaplikasian curah hujan ekstrim.

5. Daftar Pustaka

- Acero, F.J., J.A. García, dan M.C. Gallego. (2011). *Peaks-over-Threshold Study of Trends in Extreme Rainfall over the Iberian Peninsula*. J. Climate, 24, 1089–1105, <https://doi.org/10.1175/2010JCLI3627.1>
- Alam, M.A.; Emura, K.; Farnham, C.; Yuan, J. (2018). Best - Fit Probability Distributions and Return Periods for Maximum Monthly Rainfall in Bangladesh. *Climate* 2018, 6, 9.
- Ashoori, F., Ebrahimpour, M., dan Bozorgnia, A. (2017). *Modeling of maximum precipitation using maximal generalized extreme value distribution*, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 46:6, 3025-3033, DOI: 10.1080/03610926.2015.1034325
- Barlow, M., S. Nigam, dan E.H. Berbery. (2001). *ENSO, Pacific Decadal Variability, and U.S. Summertime Precipitation, Drought, and Stream Flow*. J. Climate, 14, 2105–2128, [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2001\)014<2105:EPDVAU>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2001)014<2105:EPDVAU>2.0.CO;2)
- Dai, Aiguo & E. Trenberth, Kevin dan Qian, TT. (2004). *A Global Dataset of Palmer Drought Severity Index for 1870–2002: Relationship with Soil Moisture and Effects of Surface Warming*. JOURNAL OF HYDROMETEOROLOGY. 5. 1117-1130. 10.1175/JHM-386.1.
- Fatichi, S., dan V. Y. Ivanov (2014), *Interannual variability of evapotranspiration and vegetation productivity*, *Water Resour. Res.*, 50, 3275–3294, doi: 10.1002/2013WR015044.
- Fu, G., Viney, NR., dan Charles, SP. (2009). *Evaluation of various root transformations of daily precipitation amounts fitted with a normal distribution for Australia*. *Theoretical and Applied Climatology*. 2010; 99(no. 1-2):229-238. <https://doi.org/10.1007/s00704-009-0137-6>
- Higgins, R.W., Y. Chen, dan A.V. Douglas. (1999). *Interannual Variability of the North American Warm Season Precipitation Regime*. *J. Climate*, 12, 653–680
- Knapp, A dan Smith, M.D. (2001). *Variation Among Biomes in Temporal Dynamics of Aboveground Primary Production*. *Science*. 291. 481-484. 10.1126/science.291.5503.481.
- Mehrannia, H., dan Pakgozar, A. (2014). *Using Easy Fit Software For Goodness of Fit Test and Data Generation*. *International Journal of Mathematical Archive* Vol. 5 118-124
- Meier, C. (2016). *Describing the interannual variability of precipitation with the derived distribution approach: Effects of record length and resolution*. *Hydrology and Earth System Sciences*. 20. 1477. 10.5194/hess-20-1477-2016.
- Oguntunde, P., Odetunmbi, O., dan Adejumo, A.O. (2014). *A Study of Probability Models in Monitoring Environmental Pollution in Nigeria*. *Journal of Probability and Statistics*. 2014. 10.1155/2014/864965.
- Schittkowski, K. (2002). *EASY-FIT: A Software System for Data Fitting in Dynamical Systems*. *Struct Multidisc Optim* 23: 153. <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0174-6>

Zhan, C., Cao, W., Fan, J., dan Tse, C.K. (2018). *Impulse Weibull distribution for daily precipitation and climate change in China during 1961–2011*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, vol. 512(C), pages 57-67.

KUANTIFIKASI DAN PENENTUAN STRUKTUR SENYAWA FLAVONOID EKSTRAK POLAR DAUN GAMAL (*Gliricidia maculata*) KULTIVAR PRINGSEWU DAN UJI TOKSISITAS TERHADAP KUTU PUTIH SIRSAK (*Pseudococcus cryptus*, Hemiptera: Pseudococcidae)

Yayang Anas Persada¹, Nismah Nukma^{1,2}

^{1,2}Jurusan Biologi Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145

Penulis Korespondensi : nukmal@yahoo.com²

Abstrak

Produksi buah sirsak mengalami penurunan akhir-akhir ini, salah satu penyebabnya adalah serangan hama kutu putih (*Pseudococcus cryptus*). Penggunaan insektisida sintetik yang tidak tepat akan berdampak buruk. Oleh sebab itu, perlu dicarikan alternatif pengganti. Tanaman gamal (*Gliricidia maculata*) merupakan salah satu tanaman yang dapat dijadikan insektisida nabati karena mengandung senyawa kimia flavonoid. Penelitian ini bertujuan untuk mengkuantifikasi dan menentukan struktur senyawa flavonoid ekstrak polar daun gamal serta uji toksisitas terhadap mortalitas *P. cryptus*. Ekstraksi serbuk daun gamal dilakukan dengan cara maserasi bertingkat. Analisis penentuan struktur dan kuantifikasi senyawa flavonoid menggunakan Spektrofotometri UV-Vis dan FTIR dilakukan di Laboratorium Terpadu Sentra Inovasi Teknologi. Bioassay dilakukan di Laboratorium Zoologi Unila. Analisis LC_{50} ditentukan dengan analisis probit dan efektivitas ekstrak dengan Paired sampel Test. Hasil yang didapat yaitu ekstrak metanol serbuk daun gamal kultivar Pringsewu memiliki kadar flavonoid sebesar 4,5 mg/L kuersetin dan kadar fenolik sebesar 3,2 mg/L asam galat. Sedangkan ekstrak air memiliki kadar flavonoid sebesar 3,6 mg/L kuersetin dan kadar fenolik sebesar 1,7 mg/L asam galat. Senyawa flavonoid yang terkandung dalam serbuk daun gamal kultivar Pringsewu termasuk dalam golongan flavonol dengan struktur 3-hidroksi-2-fenil-1,4-benzopiron. Ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu lebih efektif dibandingkan ekstrak murni air dengan nilai (0,106% : 0,164%).

Kata kunci: Flavonoid;kuantifikasi;kutu putih; penentuan struktur.

1. Pendahuluan

Sirsak (*Annona muricata L.*) merupakan tanaman buah yang berasal dari Karibia, Amerika Tengah dan Amerika Selatan. Tanaman ini hidup pada daerah yang cukup berair. Di Indonesia penyebaran tanaman sirsak terdapat di daerah Jawa Barat, terutama Bandung Barat dan Bandung Selatan serta Jawa Tengah (Muizuddin dan Zubaidah, 2015).

Produksi buah sirsak di Indonesia mengalami penurunan hingga 17% pada tahun 2011 (Statistik Pertanian, 2014). Faktor penyebabnya adalah serangan hama dan penyakit pada tanaman buah sirsak sehingga kualitas dan kuantitas buah menurun. Salah satu hama yang menyebabkan turunnya produksi sirsak adalah kutu putih (*Pseudococcus cryptus*). Kutu putih dapat menurunkan produksi buah sirsak hingga 58% (Ivakkdalam, 2010). Pengendalian hama kutu putih saat ini umumnya dilakukan petani dengan menggunakan insektisida sintesis karena lebih efektif, cepat diketahui hasilnya dan penerapannya relatif mudah. Namun penggunaan insektisida sintesis dapat menimbulkan kerusakan, seperti timbulnya resistensi dan resurgensi pada hama sasaran dan terjadi pencemaran lingkungan (Oka, 1995).

Guna mengurangi pemakaian insektisida sintetik perlu pemanfaatan intektisida nabati dari tanaman sebagai pengendalian hama kutu putih yang ramah lingkungan dan aman untuk kesehatan. Insektisida nabati memiliki fungsi untuk mematikan serangga pengganggu. Salah satu tanaman yang dapat digunakan sebagai insektisida nabati adalah daun gamal (*Gliricidia maculata*). Daun gamal mengandung senyawa kimia antara lain flavonoid, saponin dan steroid (Lebang, dkk., 2016).

Analisis kuantifikasi dan struktur senyawa yang berpotensi sebagai insektisida nabati pada tanaman gamal (*G. maculata*) dapat dilakukan dengan menggunakan spektrofotometri UV-Vis. Spektrum serapan ultra violet dan serapan tampak merupakan cara tunggal yang paling bermanfaat untuk mengidentifikasi struktur flavonoid.

2. Metode Penelitian

Alat yang akan digunakan dalam penelitian ini ialah, Rotavapor merk Buchi R-220 SE Rotavapor merk Buchi R-210 SE, lampu UV 254 nm dan 366 nm, MPLC, Spektrofotometri UV- Vis, FTIR.

Bahan yang digunakan yaitu serbuk daun gamal, pelarut heksana dan diklorometana (DCM), metanol dan akuades, plat KLT fluorensensi, pelarut visualisasi CeSO_4 (10%), AlCl_3 (15%), dan NaOH, etanol, etil asetat, isopropanol dan *aquapure*, asam galat, folin, Na_2CO_3 *aquabidest*, kolom C-19, kolom *sphadex*, dan kolom silika. Kutu putih sirsak (*P. cryptus*) betina dewasa beserta buah sirsak, dan buah sirsak muda.

Maserasi bertingkat ekstrak metanol dan air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu. Sebanyak 500 gram serbuk daun gamal dimaserasi secara bertingkat menggunakan pelarut heksana, diklorometana, metanol dan air untuk memisahkan senyawa-senyawa polar dan non polar yang terkandung didalamnya. Maserasi dilakukan selama 1x24 jam dengan 4 kali pengulangan pada masing-masing pelarut. Filtrat metanol dan filtrat air selanjutnyadi evaporasi hinggatidak adalah kandungan pelarutnya. Hasil evaporasi maserasat metanol dan air kemudian dipekatkan dengan metoderekristalisasi menggunakan *freeze dryer* hinggamembentuk ekstrak kasar dalam bentuk pasta. Kromatografi Lapis Tipis dilakukan menggunakan eluen kombinasi, eluen digolongkan menurut ukuran kekuatan teradsorpsinya pelarut atau campuran pelarut tersebut pada adsorben. Hasil evaporasi ekstrak kasar metanol dan air di KLT menggunakan plat KLT silika fluorensensi (5x2 cm), dengan larutan identifikasi CeSO_4 10% dan AlCl_3 15% dengan perbandingan 1:1. Eluen yang digunakan yaitu heksana dan etanol dengan perbandingan 7:3, 1:1, dan 3:7.

Medium Pressure Liquid Chromatography (MPLC). Untuk pemurnian ekstrak metanol dan air dilakukan dengan cara fraksinasi menggunakan Medium Pressure Liquid Chromatography (MPLC). Fraksi-fraksi yang sudah didapat kemudian dikelompokkan berdasarkan warna dan hasil MPLC yang didapat lalu dievaporasi. Hasil evaporasi dianalisis KLT kembali hingga didapatkan fraksi aktif kaya flavonoid yang dapat digunakan untuk Bioassay. MPLC ekstrak kasar metanol menggunakan pelarut etanol dan heksana sedangkan untuk ekstrak kasar air menggunakan pelarut *aquapure*.

Kromatografi Kolom Grafitasi (KKG). Fraksi yang didapat dari pemurnian menggunakan MPLC dimurnikan kembali menggunakan kromatografi kolom grafitasi. Proses KKG diawali dengan kolom C-18 dilarutkan menggunakan air terlebih dahulu, kemudian dimasukkan kedalam wadah untuk pemisahan. Pelarut yang digunakan yaitu *aquapure* dan metanol 10%. Hasil yang didapatkan dari pemisahan kemudian di KLT dan dilihat senyawa yang mempunyai nilai R_f yang sama.

Spektrofotometri UV-Vis dan Spektrofotometri Inframerah Transformasi Fourier (FTIR). Analisis dilakukan dengan tahapan pembuatan larutan standar dan persiapan analisis ekstrak. Sampel ditimbang sebanyak 0,4 gram kemudian diencerkan hingga 500x. Kemudian sampel dianalisis dan ditentukan panjang gelombang maksimum dengan melihat nilai absorbansi pada ekstrak. Selanjutnyasenyawa flavonoid yang analisis menggunakan FTIR, di ambil sebanyak 0,1 g. Sampel dipekatkan dan diteteskkan pada alat kemudian diukur puncak serapannya untuk mendeteksi gugus-gugus fungsional yang terdapat dalam struktur senyawa isolat.

Penentuan kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol dan air. Analisis kadar fenolik dan flavonoid ekstrak metanol dan air menggunakan spektrofotometer UV- Vis. Kadar fenolik, larutan standar yang digunakan adalah asam galat. Konsentrasi larutan standar yang digunakan ialah 0, 2, 5, 8, 10, 12 dan 15 mg/L. Larutan standar diukur dengan panjang gelombang 747 nm. Sedangkan, sampel yang digunakan adalah ekstrak kasar metanol dan air yang ditimbang sebanyak 5 mg kemudian dilarutkan 5 mL akuabides. Kemudian larutan standar dan sampel direaksikan dengan 1 mL folin dan didiamkan selama 5 menit. Selanjutnya, ditambahkan 4 mL Na_2CO_3 7,5% dan didiamkan 90 menit.

Kadar flavonoid, larutan standar yang digunakan adalah kuersetin. Konsentrasi yang digunakan 0, 2, 5, 8, 10, 12 dan 15 mg/L. Larutan standar diukur pada panjang gelombang 314 nm. Sedangkan sampel yang digunakan adalah ekstrak kasar metanol dan air yang ditimbang sebanyak 5 mg kemudian dilarutkan 5 mL akuabides. Kemudian larutan standar dan sampel direaksikan dengan 0,3 mL NaNO_2 5% dan didiamkan 5 menit. Selanjutnya, ditambahkan 0,3 mL AlCl_3 10% dan diamkan 5 menit serta ditambahkan kembali 2 mL NaOH 1 M.

Bioassay Fraksi Yang Didapat Terhadap Hama Kutu Putih Sirsak (*Pseudococcus cryptus*). Bioassay yang dilakukan adalah uji mortalitas terhadap hama kutu putih dengan pengaruh residu (*residual effect*). Setiap senyawa yang ditemukan pada tahapan fraksinasi dilakukan bioassay terhadap hama kutu putih betina stadium dewasa dengan media uji yang digunakan adalah buah sirsak tempat hama *P. cryptus* hidup. Hal ini dilakukan untuk mengetahui senyawa aktif insektisida. Uji residu dilakukan dengan merendam buah sirsak dengan 5 taraf konsentrasi ekstrak metanol dan ekstrak air dengan konsentrasi (0%, 0,05%, 0,10%, 0,15%

dan 0,20%) (Aksah, 2016) selama 10 menit, 10 ekor (*P. cryptus*) betina dewasa yang sudah diaklimatisasi selama 1 hari sebelum perlakuan diletakkan pada buah sirsak yang sudah direndam dengan ekstrak daun gamal dan dipelihara pada wadah uji. Pengamatan mortalitas serangga uji dilakukan pada 24, 48 dan 72 jam setelah perlakuan. Percobaan ini dilakukan masing-masing 3 kali ulangan.

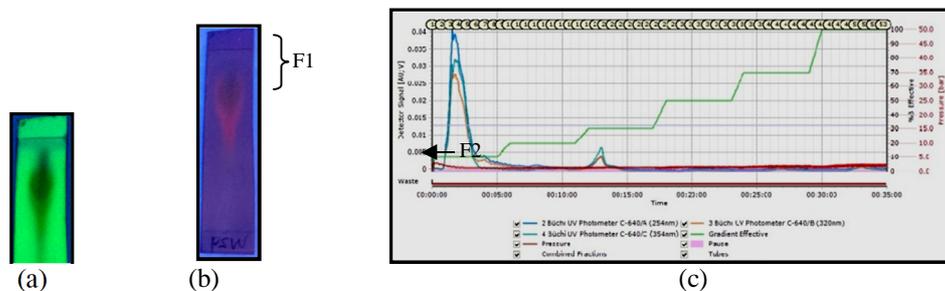
Larutan uji dikatakan efektif bila larutan tersebut memberikan nilai $LC_{50} \leq 5\%$ (Prijono, 2005). *Bioassay* ekstrak kasar dan ekstrak murni menggunakan cara kerja yang sama tetapi, *bioassay* ekstrak murni menggunakan konsentrasi dari nilai LC_{50} hasil *bioassay* ekstrak kasar sebagai nilai tengah dengan range dua tingkat keatas dan dua tingkat kebawah.

Analisis data, data yang diperoleh selanjutnya dianalisis menggunakan analisis probit untuk menentukan nilai LC_{50} dan uji *paired* sampel *test* digunakan untuk menentukan larutan yang efektif sebagai insektisida nabati.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil maserasi bertingkat 500 gram serbuk daun gamal kultivar Pringsewu berupa filtrat metanol sebanyak 1.560 mL. Hasil evaporasi filtrat metanol dievaporasi dan didapat sebanyak 10,5 gram ekstrak pekat dalam bentuk pasta yang berwarna hijau pekat. Ekstrak kasar tersebut sudah tidak mengandung pelarut yang digunakan pada saat maserasi sehingga sudah dapat diujikan pada serangga uji.

Kromatogram hasil analisis KLT ekstrak kasar metanol dengan larutan identifikasi $AlCl_3$ dan eluen etanol banding heksana (3:7) pada cahaya lampu UV dengan panjang gelombang 254 nm menunjukkan noda warna hijau kehitaman (Gambar 1a) dan pada panjang gelombang 366 nm berwarna jingga (Gambar 1b). Noda warna jingga menunjukkan bahwa ekstrak kasar metanol mengandung senyawa flavonoid (Aksah, 2017). Nilai R_f ekstrak kasar metanol yaitu 0,67.

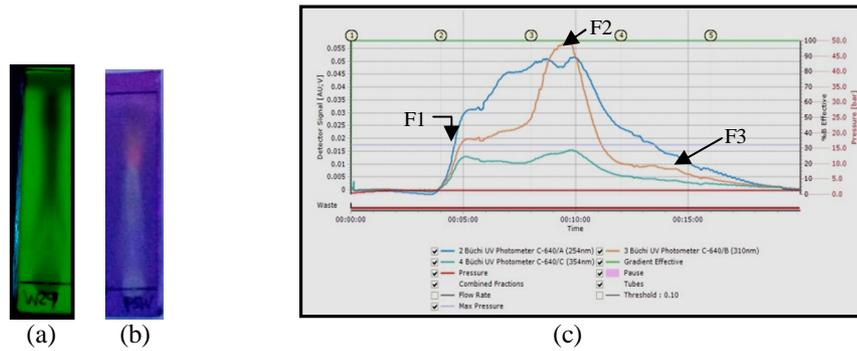


Gambar 1. Kromatogram KLT ekstrak kasar metanol kultivar Pringsewu dengan menggunakan cahaya UV (a) λ 254 nm (b) λ 366 nm (c) Kromatogram MPLC ekstrak kasar metanol kultivar Pringsewu

Hasil partisi 5 gram, ekstrak kasar metanol kultivar Pringsewu menggunakan pelarut etil asetat dan air menghasilkan 3 gram fraksi etil asetat. Kromatogram hasil MPLC ekstrak kasar metanol kultivar Pringsewu dikelompokkan berdasarkan puncak tertinggi dari kromatogram yang dapat dilihat pada Gambar 1c. Hasil pengelompokan fraksi berdasarkan puncak pada kromatogram MPLC diperoleh 2 fraksi yaitu (F1) dan (F2). Dari 2 fraksi yang didapatkan hanya terdapat 1 fraksi yang menunjukkan puncak tertinggi yaitu (F1).

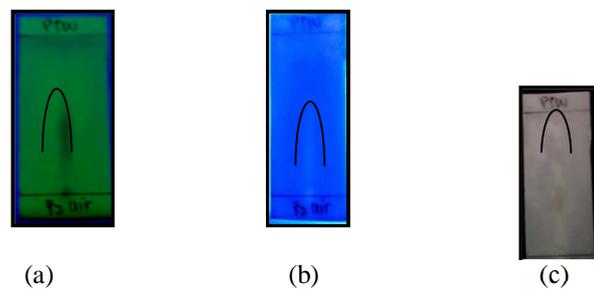
Hasil maserasi bertingkat 500 g serbuk daun gamal kultivar Pringsewu berupa filtrat air sebanyak 2.900 mL. Filtrat air dievaporasi dan di *freeze dryer* menghasilkan 59,5 g ekstrak kasar air dalam bentuk pasta yang berwarna coklat. Ekstrak kasar tersebut dapat langsung diujikan pada serangga uji.

Hasil analisis KLT ekstrak kasar air dengan larutan identifikasi $AlCl_3$ dan eluen etanol dan heksana (1:1) pada cahaya lampu UV dengan panjang gelombang 254 nm menunjukkan noda berwarna hijau kehitaman dan pada gelombang 366 nm menunjukkan noda warna biru pada kromatogram (Gambar 2a dan 2b). Noda warna biru pada panjang gelombang 366 nm menunjukkan bahwa ekstrak mengandung senyawa flavonoid (Nuari dkk., 2017). Nilai R_f dari kromatogram menunjukkan nilai 0,88.



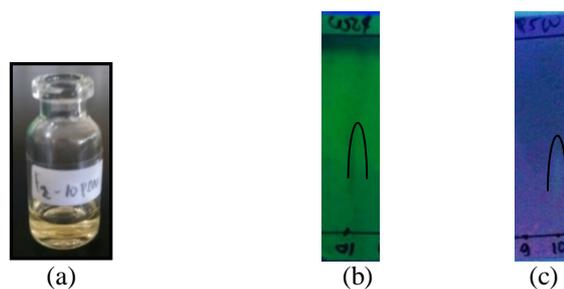
Gambar 2. Kromatogram KLT ekstrak kasar air dengan menggunakan cahaya UV (a) λ 254 nm (b) λ 366 nm (c) Kromatogram MPLC ekstrak kasar air kultivar Pringsewu

Hasil fraksinasi 6 gram ekstrak kasar air menggunakan MPLC diperoleh 3 fraksi (Gambar 2c). Diantara ketiga fraksi tersebut, fraksi 2 (F2) memiliki titik puncak paling tinggi, hasil evaporasinya diperoleh berat fraksi 2 sebesar 1,5 g. Hasil analisis KLT fraksi 2 hasil MPLC dengan eluen etanol: heksana (1:1) dapat dilihat pada kromatogram Gambar 3. Nilai R_f dari Fraksi 2 yaitu 0,57.



Gambar 3. Kromatogram KLT dari fraksi 2 hasil MPLC ekstrak air (a) panjang gelombang 254 nm (b) panjang gelombang 366 nm (c) AlCl_3

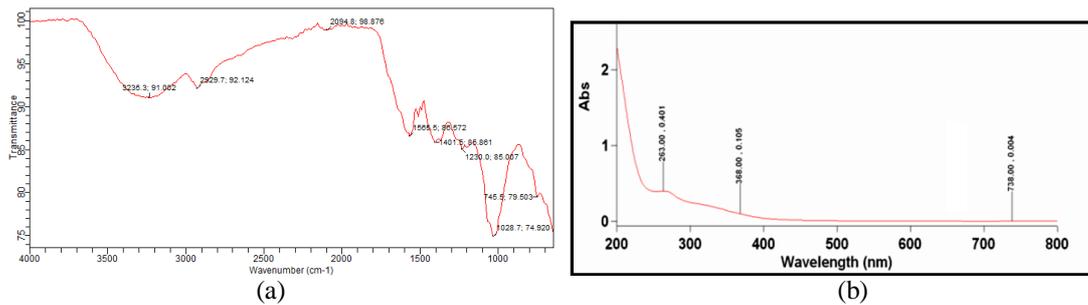
Hasil permurnian menggunakan kolom C-18, sebanyak 0,1 gram F2 yang dilarutkan dengan 1 mL aquapure didapatkan berupa 19 fraksi. Sampel didalam botol yang memiliki warna kuning pekat kemudian dianalisis menggunakan KLT untuk melihat senyawa yang mempunyai karakter dominan yang ada didalam ekstrak. Fraksi 2 nomor 10 atau disebut (F2-10) merupakan fraksi 2 yang memiliki warna kuning paling pekat (Gambar 4a).



Gambar 4. (a) F2-10 hasil kromatografi gravitasi Kromatogram KLT F2-10 hasil kromatografi gravitasi (b) λ 254 nm AlCl_3 (c) λ 366 nm AlCl_3

Hasil analisis KLT (F2-10) mempunyai warna biru saat diamati menggunakan lampu panjang gelombang 366nm dan pelarut visualisasi AlCl_3 . Nilai R_f dari kromatogram yaitu 0,63 (Gambar 4c). Fluoresensi pada kromatogram hasil KLT menunjukkan adanya senyawa flavonoid pada ekstrak (Afryorawan, 2013). F2-10 dievaporasi hingga ekstrak tidak mengandung pelarut.

Hasil analisis spektrum FTIR fraksi F2-10 yang sudah dipekatkan dan sudah murni pada rentang gelombang 200-800 nm disajikan dan hasil Spektrum UV-Vis fraksi senyawa flavonoid ekstrak murni air F2-10 kultivar Pringsewu dalam pelarut air disajikan pada (Gambar 5a) dan (Gambar 5b)



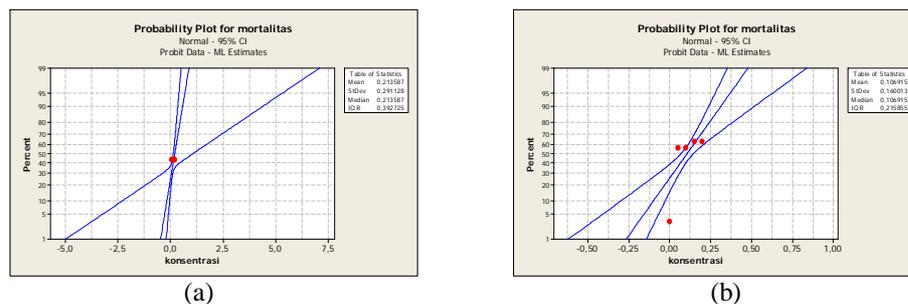
Gambar 5. (a) Spektrum FTIR fraksi F2-10ekstrak air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu
(b) Hasil spektrofotometer UV-Vis ekstrak murni air F2-10 kultivar Pringsewu

Spektrum FTIR (Gambar 5a) memberikan informasi pita melebar pada daerah $3235,3 \text{ cm}^{-1}$ yang menunjukkan adanya vibrasi ulur untuk gugus hidroksil (OH) dapat membentuk ikatan hidrogen dalam molekul. Pada serapan gelombang $2929,7 \text{ cm}^{-1}$ menunjukkan adanya C-H alifatik karena berada disebelah kanan 3000 cm^{-1} (Ghafur dkk., 2013). Pada serapan bilangan gelombang $1565,5 \text{ cm}^{-1}$ dan $1401,5 \text{ cm}^{-1}$ menunjukkan adanya serapan C=C aromatik. Tetapi, puncak serapan C=O pada bilangan rendah disebabkan oleh terbentuknya ikatan hidrogen internal dan molekul, dibandingkan karbonil pada keton (Afriyawan, 2013).

Menurut Afriyawan (2013), adanya serapan bilangan gelombang $1230,0 \text{ cm}^{-1}$ dan $1028,7 \text{ cm}^{-1}$ menunjukkan serapan dari C-O alkohol, sedangkan pada serapan gelombang $745,5$ adalah serapan dari C-H aromatik. Hasil spektro UV-Vis ekstrak air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada Gambar 5b, diduga termasuk senyawa flavonoid golongan flavonol. Karena memiliki panjang gelombang puncak (pita II) adalah 263 nm dan puncak pada (pita I) 386 nm . Neldawati dkk (2013) mengungkapkan bahwa panjang gelombang dengan puncak (pita II) $250 - 280 \text{ nm}$ dan pada (pita I) $330 - 385$ merupakan senyawa flavonoid golongan flavonol. Berdasarkan hasil analisis dari spektrum FTIR dan UV-Vis diketahui senyawa flavonoid ekstrak murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu adalah golongan flavonol. Senyawa dari golongan flavonol memiliki struktur 3-Hydroxy-2-phenyl-chromen-4-one.

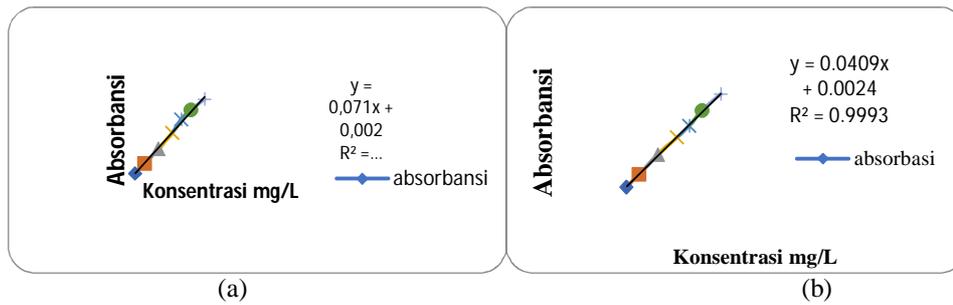
Pada umumnya senyawa flavonol akan mengalami pergeseran puncak absorpsi kearah panjang gelombang yang lebih besar (batokromik) karena memiliki gugus hidroksil (Darmawati dkk., 2015).

Nilai LC_{50} ekstrak kasar metanol yang didapatkan sebesar $0,213\%$ (Gambar 6a) dan ekstrak kasar air sebesar $0,106\%$ (Gambar 6b). Nilai LC_{50} ini digunakan sebagai penentuan rentang konsentrasi pada pengujian ekstrak metanol dan ekstrak air daun gamal kultivar Pringsewu terhadap mortalitas hama kutu putih serta untuk *bioassay* pada ekstrak murni metanol dan air.



Gambar 6. (a) Hasil analisis probit ekstrakkasar metanol kultivar Pringsewu terhadap mortalitashama kutu putih (*P. cryptus*) (b)Hasil analisis probit ekstrakkasar air kultivar Pringsewu terhadap mortalitas hamakutu putih (*P. cryptus*)

Hasil analisis kurva kalibrasi kuersetin didapatkan kurva baku dengan persamaan regresi linear $y = 0,071x + 0,002$ dengan harga koefisien korelasi (R^2) $0,995$ (Gambar 7a) dan hasil analisis terhadap larutan asam galat didapatkan kurva kalibrasi dengan persamaan regresi linear $y = 0,040x + 0,002$ dengan harga koefisien korelasi (R^2) $0,999$ (Gambar 7b). Nilai R^2 yang mendekati satu menunjukkan persamaan regresi linear (Kusuma, 2012)



Gambar 7. (a) Kurva kalibrasi kuersetin (b) Kurva kalibrasi asam galat

Hasil analisis kadar flavonoid ekstrak kasar metanol dan air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu yang diperoleh dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kadar Flavonoid Ekstrak Kasar Metanol dan Air Daun Gamal Kultivar Pringsewu

Ekstrak	Absorbansi	Kadar flavonoid (mg/L kuersetin)	Kadar rata-rata flavonoid (mg/L kuersetin) ± SD
Metanol	0,3788	5,3	4,5 ± 0,6928
	0,2937	4,1	
	0,2965	4,1	
Air	0,2569	3,6	3,6 ± 0,0577
	0,2598	3,6	
	0,2672	3,7	

Hasil perhitungan kadar flavonoid ekstrak serbuk daun gamal dapat dilihat ekstrak metanol memiliki kadar flavonoid lebih tinggi dibandingkan dengan ekstrak air (Tabel 1). Perbedaan kadar flavonoid yang dihasilkan dapat disebabkan karena perbedaan pelarut yang digunakan pada waktu ekstraksi. Tingginya kadar flavonoid pada ekstrak metanol menjelaskan bahwa karakteristik senyawa flavonoid pada ekstrak serbuk daun gamal kultivar Pringsewu mempunyai kepolaran yang sama dengan metanol, sehingga ekstrak dengan pelarut metanol menghasilkan kandungan senyawa flavonoid yang tinggi (Suryani, 2016).

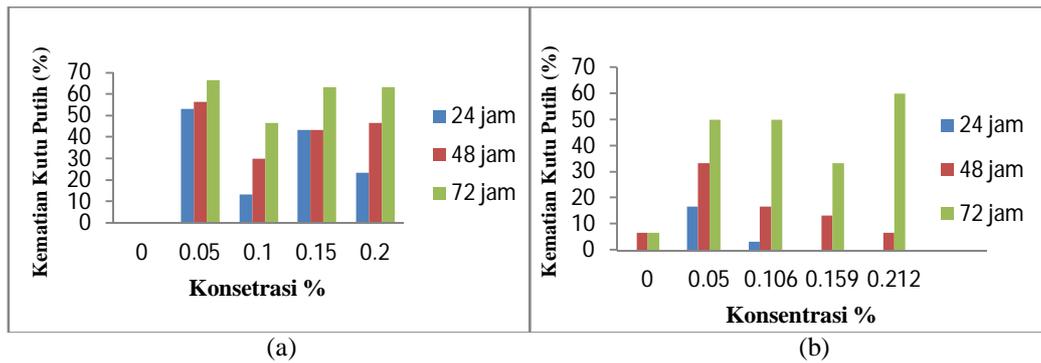
Hasil perhitungan yang diperoleh dari nilai absorbansi sampel ke dalam persamaan kurva baku asam galat dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Kadar Fenolik Ekstrak Kasar Metanol dan Air Serbuk Daun Gamal Kultivar Pringsewu

Ekstrak	Absorbansi	Kadar fenolik (mg/L asam galat)	Kadar rata-rata fenolik (mg/L asam galat) ± SD
Metanol	0,1353	3,2	3,2 ± 0,6557
	0,1331	3,2	
	0,1388	3,3	
Air	0,0737	1,7	1,7 ± 0
	0,0736	1,7	
	0,0739	1,7	

Hasil perhitungan kadar fenolik ekstrak kasar metanol serbuk daun gamal lebih tinggi dibandingkan dengan ekstrak kasar air. Adanya perbedaan tersebut dikarenakan perbedaan pelarut yang digunakan sangat mempengaruhi jumlah kadar fenolik dan senyawa fenol yang larut dipengaruhi oleh kepolaran pelarut. Jika tingginya kadar fenolik pada ekstrak metanol serbuk daun gamal kultivar Pringsewu mempunyai kepolaran yang sama dengan senyawa fenolik. Suryani dkk. (2016) menyatakan bahwa senyawa polar akan larut pada pelarut polar dan senyawa non-polar akan larut dengan pelarut non-polar.

Persentase mortalitas hama kutu putih pada buah sirsak dengan perlakuan ekstrak kasar air dan ekstrak murni air daun gamal dapat dilihat pada Gambar 8a dan Gambar 8b.



Gambar 8. (a) Persentase kematian hama kutu putih (*P. cyptus*) pada buah sirsak dengan perlakuan ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada konsentrasi dan waktu yang berbeda. (b) Persentase kematian hama kutu putih (*P. cyptus*) pada airserbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada konsentrasi dan waktu yang berbeda.

Hasil bioassay ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu memberikan efek kematian terhadap kutu putih sirsak. Kematian kutu putih sirsak dengan persentase tertinggi menggunakan perlakuan ekstrak kasar air pada konsentrasi 0,05% dengan kematian mencapai 66,6% pada 72 jam setelah perlakuan. Sedangkan pada perlakuan menggunakan ekstrak murni air persentase kematian tertinggi pada konsentrasi 0,212% dengan kematian mencapai 60%.

Hasil uji *paired T test* pada taraf ($\text{sig} < 0,05$) rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal pada konsentrasi ekstrak yang berbeda dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil analisis *paired T test* kematian kutu putih (ekor \pm sd) setelah diperlakukan dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni airserbuk daun gamal kultivar Pringsewu 72 jam setelah perlakuan

Ekstrak kasar air		Ekstrak murni air		Sig.(2-tailed)
Konsentrasi	Rata-rata \pm SD	Konsentrasi	Rata-rata \pm SD	
0,00	0,11 \pm 0,33	0,00	0,44 \pm 0,88	0,34
0,05	6,00 \pm 1,11	0,05	3,33 \pm 2,00	0,00
0,10	3,00 \pm 1,65	0,11	2,33 \pm 2,50	0,28
0,15	4,88 \pm 1,45	0,16	1,55 \pm 2,18	0,00
0,20	4,44 \pm 2,35	0,21	2,22 \pm 2,90	0,23

Rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu konsentrasi 0,05% dan 0,15% berbeda nyata dengan ekstrak murni air ($p < 0,05$). Rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar air lebih banyak dibandingkan ekstrak murni air untuk semua tingkatan konsentrasi (Tabel 3), mungkin hal ini disebabkan karena adanya kerja sinergisme berbagai komponen senyawa bioaktif pada ekstrak kasar air.

Menurut Safirah (2016) senyawa metabolit sekunder memiliki berbagai mekanisme kerja yang bekerja secara sinergis. Kombinasi antara kandungan senyawa seperti tanin, flavonoid, saponin, dan alkaloid menyebabkan efek sinergisme dalam mematikan serangga.

Hasil uji *paired T test* ($\text{sig} < 0,05$) rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada waktu pengamatan yang berbeda dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil analisis *paired T test* rata-rata kematian kutu putih setelah diberi perlakuan dengan ekstrak kasar dan ekstrak murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada waktu pengamatan berbeda

Waktu setelah perlakuan (Jam)	Rata-rata kematian kutu putih (ekor \pm sd)		Sig. (2-tailed)
	Ekstrak kasar air	Ekstrak murni air	
24	3,33 \pm 1,77	0,50 \pm 1,00	0,00
48	4,41 \pm 1,78	1,75 \pm 1,21	0,00
72	6,00 \pm 1,41	4,83 \pm 2,24	1,47

Rata-rata kematian hama kutu putih yang diperlakukan dengan ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada 24 jam dan 48 jam setelah perlakuan berbeda nyata dengan ekstrak murni air ($p < 0,05$), tetapi tidak berbeda nyata pada 72 jam setelah perlakuan (Tabel 4), meskipun ekstrak kasar air dan ekstrak murni serbuk daun gamal kultivar Pringsewu pada perlakuan 72 jam memiliki waktu yang lebih lama dibandingkan dengan ekstrak kasar air dan ekstrak murni air pada perlakuan 24 jam dan 48 jam. Hal ini mungkin dikarenakan rentang waktu yang lebih lama dapat menyebabkan mortalitas kutu putih meningkat. Apabila zat toksik yang terakumulasi dalam waktu yang lama dapat menyebabkan kematian serangga (Raini, 2007).

Wirasuta dan Niruri (2006), mengungkapkan bahwa konsentrasi yang rendah tetapi dengan waktu kontak lama dapat menimbulkan efek toksik yang sama dengan zat yang terpapar pada konsentrasi tinggi dengan waktu kontak yang singkat, hal ini bergantung kepada konsentrasi dan lamanya ekposisi zat racun.

Keefektifan dari ekstrak kasar dan murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu juga dapat dilihat dari hasil analisis probit kedua ekstrak pada 24 - 72 jam setelah perlakuan dan pada konsentrasi berbeda (Tabel 5).

Tabel 5. Nilai LC_{50} hasil analisis probit ekstrak kasar dan murni air serbukdaun gamal kultivar Pringsewupada 24 - 72 jam setelah perlakuan

Waktu (Jam)	Nilai LC_{50} (%)		Selisih (%)
	Ekstrak Kasar Air	Ekstrak Murni Air	
24	0,290	-	-
48	0,478	-	-
72	0,106	0,164	0,058

Pada 24 jam dan 48 jam setelah perlakuan nilai LC_{50} ekstrak murni air tidak bisa ditentukan, karena kematian serangga uji belum mencapai 50%. Nilai LC_{50} ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu lebih rendah 0,058% dibandingkan dengan ekstrak murni air pada waktu perlakuan yang sama. Hal ini menunjukkan bahwa ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu lebih efektif dibandingkan dengan ekstrak murni air, karena untuk mematikan 50% serangga uji dibutuhkan konsentrasi ekstrak kasar air yang lebih kecil dibandingkan dengan ekstrak murni air.

Rimijuna dkk (2017) menyatakan bahwa, setiap senyawa metabolit sekunder memiliki kemampuan yang berbeda dalam mengendalikan hama. Flavonoid merupakan senyawa pertahanan tumbuhan yang bersifat menghambat nafsu makan serangga, tanin dapat menurunkan kemampuan mencerna makanan pada serangga dengan cara menurunkan aktifitas enzim pencernaan (Dinata, 2008). Saponin dapat menghambat kerja enzim proteolitik yang menyebabkan penurunan aktifitas enzim pencernaan dan penggunaan protein (Suparjo, 2008).

Sinaga (2009) berpendapat bahwa kandungan metabolit sekunder seperti glikosida flavonoid pada tanaman bersifat racun perut. Kasumbogo (2006) menambahkan, hama kutu putih mendapatkan makanan dengan menghisap cairan yang ada pada tanaman inangnya, sehingga senyawa masuk melalui saluran pencernaan oleh karena itu kutu putih akan mati akibat racun perut yang terhisap saat kutu putih menghisap tanaman inang. Senyawa toksik menembus dinding usus selanjutnya akan mengganggu metabolisme serangga sehingga menyebabkan kematian pada serangga tersebut.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan didapat kesimpulan sebagai berikut :

1. Ekstrak metanol serbuk daun gamal kultivar Pringsewu memiliki kadar flavonoid sebesar 4,5 mg/L kuersetin dan kadar fenolik sebesar 3,2 mg/L asam galat. Sedangkan ekstrak air memiliki kadar flavonoid sebesar 3,6 mg/L kuersetin dan kadar fenolik sebesar 1,7 mg/L asam galat.
2. Ekstrak murni air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu mengandung senyawa flavonoid dari golongan flavonol dan struktur senyawanya terdiri dari kerangka struktural 3-hidroksi-2-fenil-1,4-benzopiro
3. Ekstrak kasar air serbuk daun gamal kultivar Pringsewu lebih efektif terhadap mortalitas hama kutu putih pada tanaman sirsak berdasarkan nilai LC_{50} ekstrak kasar air sebesar 0,106% dibandingkan ekstrak murni air daun gamal LC_{50} sebesar 0,164%.

5. Daftar Pustaka

Afriyorawan, N. 2013. Karakterisasi senyawa Flavonoid Hasil Isolasi Ekstrak Metanol Daun Gamal (*Gliricidia maculata*) [Skripsi]. Universitas Lampung. Lampung.

- Aksah, F. 2016. Perbandingan Daya Racun Isolat Murni Ekstrak Metanol dan Ekstrak Air Daun Gamal (*Gliricidia Maculata*) Terhadap Mortalitas Kutu Putih (*Pseudococcus Cryptus*) pada Tanaman Sirsak (*Annona muricata*) [Tesis]. Program Study Pascasarjana Biologi. Universitas Lampung. Lampung.
- Darmawati, A.A.S.K., Bawa, I.G.A, dan Suitra.I.W. 2015. Isolasi dan Identifikasi Senyawa Golongan Flavonoid pada Daun Nangka (*Artocarpus heterophyllus* Lmk) dan Aktifitas Antibakteri terhadap Bakteri *Staphylococcus aureus*. *Jurnal Kimia*. 9 (2): 203-2010
- Dinata. 2008. Basmi lalat dengan jeruk manis. Semarang, Restrieved from <http://arda.studentsblog.indip.ac.id/2008>. Diakses pada tanggal 16 Agustus 2018 pukul 20.00 Wib.
- Hermawan, G.P. 2013. Ekstraksi Daun Sirsak (*Annona muricata* L.) Menggunakan Pelarut Etanol. *Jurnal Teknologi Kimia dan Industri*. Jurusan Teknik Kimia. Universitas Diponegoro, Tembalang, Semarang.
- Ivakdalam, L. M. 2010. Dampak Ekonomi Serangan Hama Asing Invasif (*Paracoccus marginatus*) (Hemiptera: Pseudococcidae) pada Usaha Tani Pepaya di Kabupaten Bogor [Tesis]. Bogor (ID): Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor. *Jurnal Pharmasience*, 3.
- Kasumbogo, U. 2006. *Konsep Pengendalian Hama Terpadu*. Yogyakarta: Gajah Mada Press.
- Kusuma, R. A dan Andarwulan, N. 2012. Aktifitas Antioksidan dan Ekstrak Buah Takokak (*Solanum torvum*). [Skripsi] Bogor. Department of food Science and Technology Institusi Pertanian Bogor. Halaman 1-6.
- Lebang, M. S., Taroreh D., dan Rimbing. 2016. *Efektifitas Daun Sirsak (Annona muricata L.) dan Daun Gamal (Gliricidia sepium) dalam Pengendalian Hama Walang Sangit (Leptocorisa acuta T) pada Tanaman Padi*. Program Study Entomologi Pascasarjana Universitas Sam Ratulangi. Manado.
- Muizuddin, M dan Zubaidah, E. 2015. Studi Aktifitas Antibakteri Kefir Teh Daun Sirsak (*Annona muricata* L.) dari Berbagai Merk Teh Daun Sirsak Dipasaran. *Jurnal Pangan dan Agroindustri*. 3 (4): 1662 – 1672, September 2015. Jurusan Teknologi Hasil Pertanian, FTP Universitas Brawijaya Malang. Malang.
- Neldawati, Ratnawulan dan Gusnedi. 2013. Analisa Nilai Absorbansi dalam Penentuan Kadar Flavonoid untuk Berbagai Jenis Daun Tanaman Obat. Jurusan Fisika. Universitas Negeri Padang. *Jurnal fisika*, 2 (76-83).
- Nuari, S., Anam, S., dan Khumaidi, A. 2017. Isolasi dan Identifikasi Senyawa Flavonoid Ekstrak Etanol Buah Naga Merah (*Hylocereus polyrhizus*) (F.A.C.Weber) Brinton & Rose). *Jurnal farmasi*. Fakultas MIPA, Universitas Tadulako. Palu.
- Oka, IN. 1995. *Penggunaan, Permasalahan Serta Prospek Peptisida Nabati dalam Pengendalian Hama Terpadu*. Bogor.
- Prijono, D. 2005. *Pemanfaatan dan Pengembangan Pestisida Nabati*. Makalah Seminar Ilmiah. Jurusan Proteksi Tanaman Fakultas Pertanian. Universitas Lampung.
- Raini, M. 2007. *Toksikologi Peptisida dan Penanganan Akibat Keracunan Peptisida*. Media Litbang Kesehatan Vol XVII.17 (3). Departemen Kesehatan. Jakarta
- Rimijuna, I., Yenie, E., Elystia, S. 2017. *Pembuatan Peptisida Nabati Menggunakan Metode Ekstraksi dari Kulit Jengkol dan Umbi Bawang Putih*. Program Studi Teknik Lingkungan S1. Fakultas Teknik Universitas Riau Kampus Binawidya. Pekanbaru.
- Safirah, R., Widodo, N., Budiyanto, M. A. K. 2016. Uji Efektifitas Insektisida Nabati Buah *Crescentia cujete* dan Bunga *Syzygium aromaticum* Terhadap Mortalitas *Spodoptera litura* secara In Vitro Sebagai Sumber Belajar Biologi. Program Studi Pendidikan Biologi FKIP. Universitas Muhammadiyah Malang. Malang.

- Safitri, M. 2018. Penetapan Kadar Fenol dan Flavonoid Total serta Aktifitas Antioksidan Fraksi n-Butanol Umbi Tawas UT (*Ampelocissus rubiginosa* Lauterb.). [Skripsi]. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Lambung Mangkurat,
- Sinaga, I. L. H. 2009. Skrining Fitokimia dan Uji Aktifitas Antikoksidan dari Ekstrak Etanol Buah Terong Belanda (*Solanum betaceum*). [Skripsi]. Fakultas Farmasi Universitas Sumatra Utara. Medan.
- Statistik Pertanian. 2014. *Statistik Produksi Holtikultura Tahun 2014*. Direktorat Holtikultura Kementerian Pertanian. Jakarta.
- Suryani, C. NC., D. G., Mayun Permana. dan A.A.G.N. Anom Jambe. 2016. Pengaruh Jenis Pelarut Terhadap Kandungan total Flavonoid Dan Aktivitas Antioksidan Ekstra Daun Maota (*Pometia pinnata*). Program Studi Ilmu dan teknologi Pangan. Fakultas Teknologi Pertanian. Universitas Udayana. 4 (2): 43-50.
- Suparjo. 2008. Saponin, Peran dan Pengaruhnya bagi Ternak dan Manusia [*Karya Tulis Ilmiah*]. Fakultas Peternakan Universitas Jambi. Jambi
- Wirasuta, M.A.G dan Niruri, R. 2006. *Toksikologi Umum*. Fakultas MIPA. Jurusan Farmasi. Universitas Udayana. Bali. Hal 66

BARISAN BILANGAN FIBONACCI n -BEBAS

Irmawati¹, Amanto¹, Agus Sutrisno¹, Muslim Ansori¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : irmawati0337@gmail.com¹

Abstrak

Penelitian ini menjelaskan barisan yang dalam banyak hal mirip dengan barisan Fibonacci: diberikan n , jumlahkan dua suku sebelumnya dan bagi dengan pangkat dari n . Pada abad ke-13, Leonardo da Pisa (yang juga dikenal dengan nama Fibonacci) menuliskan suatu problem dibukunya Liber Abaci. Problemnya adalah menghitung populasi pasangan kelinci pada bulan tertentu dimana sepasang kelinci yang melahirkan pasangan kelinci muda. Kemudian pasangan kelinci yang sudah beranak ini beranak lagi dan seterusnya. Barisan bilangan Fibonacci n -bebas dimulai dengan dua bilangan bulat, didefinisikan oleh relasi rekurensi khusus dimana setelah menambahkan dua suku sebelumnya, pangkat n yang mungkin dapat segera dihapus dari suku terbaru dalam barisan. Hasil dari pembuktian barisan bilangan Fibonacci n -bebas untuk n : 2, 3, 4 dan 5 memiliki sifat yang berbeda-beda, hal ini berdasarkan karakteristik masing-masing n yang dituliskan berdasarkan teorema dan lemma.

Kata kunci: bilangan Fibonacci; keterbagian; modulo; bilangan bulat positif.

1. Pendahuluan

Didalam matematika terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan merupakan salah satu cabang ilmu matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti.

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giuseppe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Sebagai seorang pangeran matematika, Gauss begitu terpesona terhadap keindahan dan kecantikan teori bilangan, dan untuk melukiskannya, ia menyebut teori bilangan sebagai The Queen of Mathematics. Pada masa ini, teori bilangan tidak hanya berkembang sebatas konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pemanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer, dan lain sebagainya (Burton, 1980).

Pada abad ke-13, Leonardo da Pisa (yang juga dikenal dengan nama Fibonacci) menuliskan suatu problem dibukunya Liber Abaci. Problemnya adalah menghitung populasi pasangan kelinci pada bulan tertentu dimana sepasang kelinci yang melahirkan pasangan kelinci muda. Kemudian pasangan kelinci yang sudah beranak ini beranak lagi dan seterusnya. Dengan asumsi tidak ada kelinci yang mati, pada bulan pertama dan kedua terdapat satu pasang kelinci. Pada akhir bulan ketiga bertambah satu menjadi dua pasang kelinci, pada bulan keempat, sepasang pasangan kelinci dilahirkan sehingga menjadi tiga pasang kelinci, pada akhir bulan kelima dua pasang kelinci melahirkan sehingga menjadi lima pasang kelinci, dan seterusnya. Banyaknya pasangan kelinci setiap awal bulan berturut-turut terlihat pada barisan di bawah ini:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

yang dikenal dengan barisan Fibonacci, dan suku-sukunya disebut bilangan Fibonacci.

Barisan bilangan Fibonacci n -bebas dimulai dengan dua bilangan bulat, namun didefinisikan oleh relasi rekurensi khusus dimana setelah menambahkan dua suku sebelumnya, pangkat maksimum n dapat segera dihapus dari suku terbaru dalam barisan. Dalam penelitian ini, akan dikaji dan dibuktikan barisan bilangan Fibonacci n -bebas, yaitu untuk n kecil: 2, 3, 4, dan 5 berdasarkan lemma-lemma yang telah dituliskan.

2. Bahan dan Metode Penelitian

Metode-metode yang digunakan untuk membuktikan barisan bilangan Fibonacci n -bebas ini yaitu mengumpulkan bahan literature seperti buku dan jurnal:

1. Keterbagian atau *divisibility* artinya, sudut pandang matematika yang mempelajari suatu bilangan yang habis dibagi oleh bilangan lain. Misalkan suatu bilangan bulat b dikatakan terbagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$, dapat ditulis $a \mid b$. Notasi \nmid digunakan untuk menyatakan tidak habis terbagi oleh a (Sukirman, 1997).
2. Modulo adalah suatu metode dalam ilmu matematika yang menyatakan suatu sisa bilangan bulat jika dibagi dengan bilangan bulat yang lain. Misalkan didefinisikan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0 . Operasi $a \bmod m$ (dibaca “ a modulo m ”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m . Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$ (Grillet, 2007).
3. Relasi Kongruensi, misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m bilangan bulat $m > 0$, a kongruen dengan $b \bmod m$, dituliskan dengan $a \equiv b \pmod{m}$ jika m habis membagi $a - b$ (Grillet, 2007).
4. Faktor Persekutuan Terbesar, misalkan a dan b dua bilangan bulat dimana minimal salah satunya tidak nol. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) atau *Greatest Common Divisor* (GCD) dari a dan b adalah bilangan bulat d yang memenuhi:
 - 1) $d \mid a$ dan $d \mid b$
 - 2) Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \leq d$ (Sukirman, 1997).
5. Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 2$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; n \geq 3$$

Simbol F_n untuk menyatakan jumlah n suku pertama barisan Fibonacci.

$$F_n, F_3 = F_1 + F_2; F_4 = F_2 + F_3 \text{ dan seterusnya.}$$

Penjelasan: barisan ini berawal dari 0 dan 1, kemudian angka berikutnya didapat dengan cara menambahkan kedua

bilangan yang berurutan sebelumnya. Dengan aturan ini, maka barisan Fibonacci yang pertama adalah:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, dan seterusnya.

Lucas mengembangkan barisan yang mempunyai sifat seperti barisan Fibonacci, yang selanjutnya disebut barisan Lucas. Sifat dasar barisan Lucas sama dengan barisan Fibonacci, yang berbeda adalah suku keduanya. Barisan Fibonacci kedua yang paling terkenal adalah *barisan bilangan Lucas* L_i yang dimulai dengan $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$. Barisan Lucas yaitu 2, 1, 3, 4, 7, 11, . . . dst (Avila, 2014).

6. Barisan *Fibonacci n-bebas* dimulai dengan dua bilangan bulat, a_1 dan a_2 , dan didefinisikan oleh pengulangan rekurensi $a_k = (a_{k-1} + a_{k-2})/n^k$ dimana k adalah pangkat dari n . Untuk dilanjutkan, dikatakan bilangan dalam barisan yang dimulai dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$ merupakan bilangan Fibonacci n -bebas. Selanjutnya, akan dibahas barisan yang dimulai dengan dua bilangan bulat non-negatif. Ini tidak berarti bahwa tidak mengabaikan tentang pasangan awal lainnya, tetapi barisan positif mencakup semua kasus penting. Memang, jika dimulai dengan dua bilangan negatif, barisan bisa kalikan oleh -1 dan didapatkan semua barisan positif. Jika dimulai dengan dua angka nol, didapatkan semua barisan nol. Jadi hanya akan dibahas barisan yang tidak memiliki dua angka nol di awal. Perhatikan bahwa barisan non-negatif dapat memiliki nol hanya dalam salah satu dari dua posisi awal, tidak selanjutnya (Avila, 2014).

Berikut adalah langkah-langkah penelitian yang dilakukan:

1. Mengkaji barisan bilangan Fibonacci n -bebas yang dituliskan dalam bentuk, teorema dan lemma.
2. Membuktikan barisan bilangan Fibonacci n -bebas untuk $n = 2, 3, 4$, dan 5 berdasarkan teorema dan lemma.
3. Membandingkan barisan bilangan Fibonacci n -bebas yang didapat pada langkah nomor (2).
4. Menarik kesimpulan terhadap barisan bilangan Fibonacci yang telah dibuktikan.

3. Hasil dan Pembahasan

Lemma 3.1.1 Setiap barisan Fibonacci 2-bebas akhirnya berubah menjadi siklus panjang 1: x, x, x, \dots , untuk x ganjil.

Bukti:

Mengikuti dari bukti ini bahwa untuk berurutan dimulai dengan a_1, a_2 , jumlah langkah sampai siklus tercapai tidak lebih dari maks (a_1, a_2). Di sisi lain, bagian barisan sebelum siklus dapat berubah-ubah panjangnya. Ini diikuti dari lemma berikut.

Lemma 3.1.2 Untuk setiap dua angka ganjil a_1, a_2 , sebelumnya angka ganjil a_0 dapat ditemukan sehingga a_0, a_1 , dan a_2 membentuk barisan Fibonacci 2-bebas.

Bukti:

Dipilih bilangan bulat positif k sehingga $2^k a_2 > a_1$ dan atur a_0 untuk menjadi sama dengan $2^k a_2 - a_1$. Ada banyak cara untuk membuat awalan untuk barisan Fibonacci 2-bebas. Barisan tersebut minimal dibuat ketika memilih pangkat dari 2 yang masih memungkinkan untuk memiliki anggota yang positif dalam barisan. Secara eksplisit dibuat seperti contoh dimulai dengan $a_1 = 3$, dan $a_2 = 1$.

Contoh:

Didapatkan barisan 2-bebas (A233526):

1, 3, 1, 5, 3, 7, 5, 9, 1, 17, 15, 19, 11, 27, 17, 37, 31, 43, 19, 67, 9, 125, 19, 231, 73, 389, 195, 583, 197, 969, 607, 1331, 1097, 1565, 629, 2501, ..., dst.

Berdasarkan contoh barisan diatas, barisan bisa dibuat mundur.

Lemma 3.2.1 Setiap siklus panjang 3 di barisan Fibonacci-3 bebas adalah dalam bentuk $k, k, 2k$.

Bukti.

Pertimbangkan panjang 3 siklus a, b, c . Dari definisi barisan Fibonacci 3-bebas, diketahui hubungan berikut:

$$a + b = 3^x c \quad (1)$$

$$b + c = 3^y a \quad (2)$$

$$c + a = 3^z b \quad (3)$$

Tanpa kehilangan bentuk umum, ambil $a \equiv b \pmod{3}$. Kemudian $a + b \not\equiv 0 \pmod{3}$, sehingga kita memiliki $x = 0$ dan $a + b = c$. Substitusikan c dan tambahkan persamaan (2) dan (3) untuk mendapatkan $a + b = 3^{y-1}a + 3^{z-1}b$. Sejak $3 \nmid a + b$, antara $y = 1$ atau $z = 1$. Jika $y = 1$, maka $b = 3^{z-1}b$, karenanya $z = 1$. Demikian pula, $z = 1$ menyatakan $y = 1$. Dalam kedua kasus, $y = z = 1$. Kemudian dapat dipecahkan untuk variabel awal ditunjukkan bahwa $a = b$ dan $c = a + b$. Dituliskan kembali, $a = k, b = k$, dan $c = 2k$.

Akibat 3.2.1 Bilangan k dalam siklus Lemma 3.2.1 adalah pembagi umum terbesar dari barisan.

Bukti:

Karena Fibonacci sifat tambahan, jika sejumlah bilangan membagi dua atau lebih elemen dari barisan (tidak termasuk dua bilangan awal, yang mungkin dibagi 3), harus membagi semua bilangan dalam barisan. Demikian, k harus membagi setiap elemen. Yang paling sedikit dari elemen ini, maka, hanya k itu sendiri, sehingga menjadikannya pembagi umum terbesar.

Lemma 3.2.2 Setiap siklus dalam barisan Fibonacci 3-bebas adalah panjang $3n$ untuk suatu bilangan bulat n positif.

Bukti:

Mulailah dengan barisan Fibonacci 3-bebas, dan dibagi pangkat FPB dari semua elemen. Barisan yang dihasilkan adalah barisan Fibonacci-3 bebas dengan setidaknya satu elemen ganjil. Jelas bahwa membagi atau mengalikan jumlah apapun oleh 3 tidak mengubah paritasnya. Dengan demikian, setiap barisan, terlepas dari berapa banyak faktor dari 3 dibagi dari setiap suku, akan memiliki struktur dasar yang sama dalam paritasnya.

Lemma 3.2.3 Dalam barisan Fibonacci 3-bebas, pembagian terjadi untuk setiap suku atau untuk setiap suku lainnya. Dengan kata lain, tidak bisa memiliki bagian barisan panjang 3 sehingga setiap suku adalah jumlah dari dua suku sebelumnya.

Lemma 3.2.4 Ada bagian barisan pembagi yang sangat panjang.

Bukti.

Buktinya dilakukan dengan konstruksi eksplisit. Pertimbangkan definisi dari pembagi-bagian barisan besar. Dalam hal ini, dibagi oleh pangkat 3 setelah setiap langkah tambahan, selain itu sehingga $3^k \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $k > 0$. Ekuivalen, $a_{n-2} = 3^k \cdot a_n - a_{n-1}$. Dengan demikian, dengan dipilih a_n dan a_{n-1} , dan dipilih barisan yang terpenuhi pada hubungan ini, barisan dapat dengan mudah dibuat mundur. Hanya satu persyaratan yaitu bahwa setiap suku barisan positif, dan setiap langkah memuat pembagi, maka akan cukup untuk memberi barisan seperti $3^k \cdot a_n - a_{n-1} > 0$ dan $k > 0$ untuk semua n .

Contoh:

Didapatkan barisan 3-bebas (A233525):

1, 1, 2, 1, 5, 4, 11, 1, 32, 49, 47, 100, 41, 259, 110, 667, 323, ..., dst.

Lemma 3.3.1 Barisan Fibonacci 4-bebas memuat bilangan ganjil.

Bukti.

Misalkan ada barisan Fibonacci 4-bebas yang hanya memuat angka genap. Kemudian abaikan persyaratan awal, semua elemen dari barisan yang kongruen modulo 4. Oleh karena itu, dibagi oleh pangkat 4 setiap waktu. Hal ini tidak bisa berlangsung selamanya.

Lemma 3.3.2 *Setelah kejadian pertama bilangan ganjil, barisan Fibonacci 4-bebas tidak dapat memiliki dua bilangan genap berturut-turut.*

Bukti.

Mulailah dengan jumlah ganjil pertama. Langkah-langkah yang tidak termasuk pembagian menghasilkan pola paritas: ganjil, ganjil, genap, ganjil, ganjil, genap dan seterusnya. Jadi tidak ada dua bilangan genap berturut-turut. Itu berarti bisa didapatkan perkalian 4 setelah menjumlahkan dua bilangan ganjil. Mungkin didapatkan angka genap setelah pembagian, tapi bilangan berikutnya harus ganjil lagi.

Contoh:

Didapatkan barisan (A224382):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 7, 9, 1, 10, 11, 21, 2, 23, 25, 3, 7, 10, 17, 27, 11, 38, 49, 87, 34, 121, 155, 69, ..., dst.

3.4 Barisan Bilangan Fibonacci 5-bebas

Lihat barisan Lucas modulo 5: 2, 1, 3, 4, 2, 1, ... dan lihat bahwa tidak ada suku habis dibagi 5. Jelas, ada suku dalam barisan Lucas akan mengharuskan faktor luar pangkat dari 5, dan persyaratan akan tumbuh tanpa batas. Dengan demikian, barisan Lucas sendiri merupakan barisan Fibonacci 5-bebas. Ini adalah sesuatu yang baru. Tidak perlu argumen kemungkinan untuk menunjukkan bahwa ada barisan Fibonacci 5-bebas yang tidak siklus.

Contoh:

Didapatkan barisan (A214684):

0, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, ..., dst.

4. Kesimpulan

Barisan bilangan Fibonacci n -bebas dimulai dengan dua bilangan bulat, didefinisikan oleh relasi rekurensi khusus dimana setelah menambahkan dua suku sebelumnya, pangkat n yang mungkin dapat segera dihapus dari suku terbaru dalam barisan. Hasil dari pembuktian barisan bilangan Fibonacci n -bebas untuk n : 2, 3, 4 dan 5 memiliki sifat yang berbeda-beda, hal ini berdasarkan karakteristik masing-masing n yang dituliskan berdasarkan teorema dan lemma.

5. Daftar Pustaka

- Avila, B. & Khovanova, T. (2014). Free Fibonacci Sequences. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 17 (2014).
Article 14.8.5.
- Burton, D.M. (1980). *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire. United States of Afrika.
- Grillet, P.A. (2007). *Graduate Text in Mathematics*. 2nd Edition. Springer: New York.
- Sukirman, M.P. (1997). *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka, Jakarta.

METODE ESTIMASI *DIAGONAL WEIGHTED LEAST SQUARE* (DWLS) UNTUK BERBAGAI UKURAN SAMPEL (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila)

Eri Setiawan¹, Nurkholifa Sholihat¹, Netti Herawati¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : erstatis@gmail.com¹

Abstrak

Uji kecocokan dalam model persamaan struktural merupakan tahap untuk melihat sejauhmana model yang digunakan sesuai dengan data. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan ukuran sampel minimum dengan menggunakan metode estimasi Diagonal Weighted Least Square (DWLS) dan menentukan pengaruh antar variabel laten eksogen dan variabel laten endogen. Data yang digunakan berupa data primer dari hasil survei kuisisioner tentang kualitas pelayanan di perpustakaan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa ukuran sampel dengan model terbaik dengan metode DWLS adalah 171, dengan ukuran sampel diperbesar maka menghasilkan nilai kecocokan model yang semakin baik. Kompetensi pegawai mempengaruhi kualitas pelayanan secara tidak langsung melalui variabel perantara fasilitas di perpustakaan dengan pengaruh total sebesar 0,822.

Kata kunci: Uji Kecocokan Model, DWLS, Model Persamaan Struktural

1. Pendahuluan

Dalam ilmu sosial, ekonomi, pendidikan dan kehidupan sehari-hari sering kali kita dihadapkan sebuah masalah pengukuran data. Data dapat diklasifikasikan berdasarkan beberapa tingkatan pengukuran. Ada empat jenis tingkatan berdasarkan tipe skala pengukuran yaitu data nominal, data ordinal, data interval dan data rasio. Data nominal yaitu pengelompokan objek ke dalam kategori tertentu, sedangkan data ordinal tidak hanya menyatakan kategori tetapi juga menyatakan peringkat dan digunakan untuk mengetahui suatu variabel yang tidak dapat diukur secara langsung. Data interval merupakan data yang diurutkan menurut jumlah karakteristik yang dimilikinya. Data rasio merupakan data yang memiliki angka yang mewakili karakteristiknya.

Penelitian di bidang sosial sering kali dihadapkan pada masalah pengukuran data. Jenis data yang dijumpai berupa data kualitatif, karena biasanya data dikumpulkan melalui kuesioner dengan skala ordinal. Variabel yang nilainya diperoleh dari responden melalui pengumpulan data ini biasanya disebut variabel indikator. Variabel indikator merupakan faktor dari variabel yang dapat diukur secara langsung (*observable factor*). Variabel laten merupakan faktor dari variabel yang tidak dapat diukur secara langsung (*unobservable factor*). Variabel laten dapat diukur melalui variabel indikator dan variabel indikator memiliki pengaruh terhadap variabel laten untuk mengindikasikan variabel laten tersebut.

Structural Equation Modeling (SEM) atau model persamaan struktural merupakan analisis multivariat yang digunakan untuk menganalisis hubungan antar variabel secara kompleks. Analisis data dengan menggunakan SEM berfungsi untuk menjelaskan secara menyeluruh hubungan antar variabel yang ada dalam penelitian (Hair, et.al, 2007). Model Persamaan Struktural merupakan metode yang digunakan untuk menggambarkan keterkaitan hubungan linear secara simultan antara variabel indikator dan variabel laten.

Dalam model persamaan struktural ada beberapa metode estimasi, metode yang umum digunakan adalah metode *Maximum Likelihood* (ML) atau metode kemungkinan maksimum. ML merupakan metode yang memiliki sifat penduga tak bias dan ragam minimum.

Dalam penelitian ini metode estimasi yang dikaji adalah metode *Diagonally Weighted Least Squares* (DWLS). Metode pendugaan ini memiliki kelebihan yaitu tidak bergantung pada distribusi data dan mempunyai sifat penduga yang tak bias dan konsisten.

Pada penelitian ini akan melakukan uji kecocokan terhadap model dan membandingkan Fit Indeks pada uji kecocokan dengan menggunakan Lisrel 9.3 dan melihat pengaruh total antar beberapa variabel.

Penelitian ini melibatkan 12 indikator teramati dengan ukuran sampel sebanyak 78 dan 171 dengan metode *Diagonally Weighted Least Squares* (DWLS).

Model persamaan struktural atau *Structure Equation Model* (SEM) memainkan berbagai peranan penting, antara lain sebagai sistem persamaan simultan, analisis kausal linear, analisis lintasan (*path analysis*), *analysis covariance structure*, dan model persamaan struktural. Meskipun demikian ada beberapa hal yang membedakan SEM dengan analisis regresi biasa maupun teknik multivariat yang lain, karena SEM membutuhkan lebih dari sekedar perangkat statistik yang didasarkan atas regresi biasa dan analisis varian. SEM terdiri dari 2 bagian yaitu model variabel laten dan model variabel pengukuran (Wijanto, 2008).

Penggunaan variabel – variabel laten pada regresi berganda menimbulkan kesalahan-kesalahan pengukuran (*measurement errors*) yang berpengaruh pada estimasi parameter dari sudut *biased-unbiased* dan besar kecilnya varian. Masalah kesalahan pengukuran ini diatasi oleh SEM melalui persamaan – persamaan yang ada pada model pengukuran. Parameter – parameter dari persamaan pada model pengukuran SEM merupakan “muatan faktor” atau *factor loadings* dari variabel yang laten terhadap indikator – indikator atau variabel-variabel teramati yang terkait (Gujarati, 1995). SEM merupakan gabungan dari dua metode statistik yang terpisah yaitu analisis faktor (*factor analysis*) yang dikembangkan di ilmu psikologi dan psikometri dan model persamaan simultan (*simultaneous equation modeling*) yang dikembangkan di ekonometrika. Perbedaan paling jelas antara SEM dengan teknik multivariat lainnya adalah hubungan yang terpisah penggunaan untuk masing-masing set variabel dependen. Dalam istilah sederhana, SEM memperkirakan serangkaian terpisah, namun saling tergantung, persamaan regresi secara bersamaan dengan menetapkan model struktural yang digunakan oleh program statistik.

Dalam bentuk umum persamaan struktural didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan vektor acak $\boldsymbol{\eta}^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ dan $\boldsymbol{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ berturut-turut adalah variabel laten endogen dan variabel laten eksogen membentuk persamaan simultan dengan sistem hubungan persamaan linear

$$\boldsymbol{\eta}_j = \mathbf{B}_{ji} \boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{jb} \boldsymbol{\xi}_b + \boldsymbol{\zeta}_j \quad (2.1)$$

dengan ;

\mathbf{B}_{ji} = matriks koefisien peubah laten endogen berukuran $m \times m$

$\boldsymbol{\Gamma}_{jb}$ = matriks koefisien peubah laten eksogen berukuran $m \times n$

$\boldsymbol{\eta}_j$ = vektor peubah laten endogen berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{\eta}_i$ = vektor peubah laten endogen berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{\xi}_b$ = vektor peubah laten eksogen berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\zeta}_j$ = vektor sisaan acak hubungan antara $\boldsymbol{\eta}$ dan $\boldsymbol{\xi}$ berukuran $m \times 1$, diasumsikan bahwa $\boldsymbol{\xi}$ tidak berkorelasi

dengan $\boldsymbol{\zeta}$ dan $\mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}$ adalah non singular.

Bentuk persamaan 2.1 dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{B} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\eta} - \mathbf{B} \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}) \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\eta} &= (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} (\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vektor acak $\boldsymbol{\eta}$ dan $\boldsymbol{\xi}$ tidak diukur secara langsung tetapi melalui indikatornya yaitu variabel $\mathbf{Y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ dan $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ yang diukur, dengan model pengukuran dinyatakan sebagai berikut :

Model persamaan pengukuran untuk y :

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Model persamaan pengukuran untuk x :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \quad (2.4)$$

dengan :

\mathbf{y} : vektor penjelas peubah tidak bebas yang berukuran $p \times 1$

\mathbf{x} : vektor penjelas peubah bebas yang berukuran $q \times 1$

$\boldsymbol{\Lambda}_x$: matriks koefisien regresi antara \mathbf{y} dan $\boldsymbol{\eta}$ yang berukuran $p \times m$

$\boldsymbol{\Lambda}_y$: matriks koefisien regresi antara \mathbf{x} dan $\boldsymbol{\xi}$ yang berukuran $q \times n$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor sisaan pengukuran terhadap \mathbf{y} yang berukuran $p \times 1$

$\boldsymbol{\delta}$: vektor sisaan pengukuran terhadap \mathbf{x} yang berukuran $q \times 1$

Dimana $\boldsymbol{\varepsilon}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\delta}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\xi}$, dan $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\delta}$ tidak saling berkorelasi dan mempunyai nilai tengah nol. Sedangkan $\boldsymbol{\Lambda}_y$ dan $\boldsymbol{\Lambda}_x$ adalah matrik koefisien yang merupakan pengaruh variabel $\boldsymbol{\eta}$ dan $\boldsymbol{\xi}$ terhadap variable indikator y dan x .

Metode *Diagonally Weighted Least Square* (DWLS) atau metode kuadrat terkecil terboboti diagonal diperoleh dengan mengimplementasikan atau menggunakan diagonal bobot matrik W dari penduga WLS dengan meminimumkan fungsi :

$$\mathbf{F}_{DWLS} = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma})^T \text{diag}(\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.5)$$

Secara umum metode DWLS dapat dirubah rancangan yang salah satu dari bobot matriks W dengan menggunakan INWGT = data set, karena elemen diagonal $W_{ii,kk}$ pada bobot matriks W adalah interpretasi varian asimtotik pada kovarian dan korelasi dan elemen diagonalnya positif. Dimana \mathbf{s}^T adalah vektor yang memuat unsur-unsur segitiga bawah serta diagonal matriks kovarian S sebagai penduga parameter. Sedangkan $\boldsymbol{\sigma}^T$ adalah vektor yang memuat unsur-unsur segitiga bawah serta diagonal matriks koragam Σ model yang diduga. Matriks S dan $\boldsymbol{\sigma}$ merupakan matriks simetris dan definit positif. W^{-1} adalah invers dari matriks pembobot W bagi matriks galat yang merupakan matriks varian asimtotik yang emplemenya dituliskan $W_{ii,kk}$ (Joreskog, 1996).

Metode DWLS adalah penduga yang konsisten. Menurut Joreskog dan Sorbom (1998) DWLS dapat menjadi kurang stabil apabila dipakai untuk model yang besar dan sampel yang kecil. Kelemahan metode ini adalah jumlah variabel dalam model harus sedikit (kurang dari 20 variabel). Bahkan beberapa penelitian simulasi menganjurkan penggunaan ukuran sampel sebesar 5000 agar metode DWLS ini dapat menghasilkan estimasi menggunakan DWLS lebih besar dibandingkan dengan metode ML.

Dalam hal asumsi ragam galat homogen tidak dipenuhi, salah satu metode alternative yang dapat dicoba adalah metode kuadrat terkecil terboboti diagonal (*Diagonally Weighted Least Square*, DWLS). Untuk memperoleh penduga kuadrat terkecil terboboti dari β , mula-mula model regresi dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Dimana

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma}^2 \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma}^2)$$

Misalkan Bahwa

$$\mathbf{f} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ sehingga } \mathbf{E}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{E}(\mathbf{f}\mathbf{f}') = \text{Var}(\mathbf{f}) = \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}^2$

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{f}) &= (\mathbf{f}\mathbf{f}') = \mathbf{E}(\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}), \text{ karena } (\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}) = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^2 \\ &= \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jadi, jika kita menggandakan persamaan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}$ kita akan memperoleh sebuah model baru

$$\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}$$

atau

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{f}$$

Dari persamaan $\mathbf{Z} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{f}$ diperoleh bentuk persamaan

$$\mathbf{f} = \mathbf{Z} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta}$$

Dengan jumlah kuadrat sisanya adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'\mathbf{f} &= \boldsymbol{\varepsilon}' \text{diag} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' \text{diag} \mathbf{v}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - 2\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2.6)$$

Karena $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$ adalah suatu skalar, bentuk itu sama dengan transposenya $\mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ Untuk memperoleh penduga sehingga jumlah kuadrat sisa sekecil mungkin, kita diferensialkan $f'f$ terhadap $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, maka kita peroleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\delta(f'f)}{\delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - 2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2.7)$$

Dan

$$\frac{\delta f'f}{\delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}'} = 2\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$$

dengan mengambil $\frac{\delta(f'f)}{\delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$ maka kita peroleh persamaan normal

$$\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$$

Dengan solusi penduga

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2.8)$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga tak bias dari $\boldsymbol{\beta}$, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned} E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} E(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + E(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

2. Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang akan digunakan adalah bagaimana menganalisis data bersifat ordinal melalui SEM sebagai berikut:

1. Model Struktural

Model Struktural bertujuan untuk memeriksa hubungan yang mendasari atau yang menyusun variabel laten ke dalam model pengukuran dan variabel konstruk lainnya berdasarkan teori. Parameter yang menunjukkan variabel laten eksogen diberi label dengan huruf Yunani (γ), sedangkan untuk variabel laten endogen diberi label dengan huruf Yunani β ("beta"). Model variabel laten adalah

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\gamma}_{11}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\zeta}_1$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\gamma}_{12}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\beta}_{21}\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2$$

2. Model Pengukuran

Model pengukuran digunakan untuk menduga hubungan antar variabel laten dengan variabel-variabel teramatinya. Variabel laten dimodelkan sebagai sebuah faktor yang mendasari variabel-variabel teramati yang terikat. Muatan-muatan faktor yang menghubungkan variabel laten dengan variabel-variabel teramati disimbolkan dengan huruf Yunani λ ("lambda"). Pada model variabel laten SEM, hubungan kausal (sebab-akibat) terjadi di antara variabel-variabel tidak teramati atau variabel-variabel laten. Parameter-parameter dari persamaan pada model pengukuran SEM merupakan *factor loading* dari variabel laten terhadap indikator-indikator atau tentang hubungan kausal simultan di antara variabel-variabelnya, memberikan informasi tentang muatan faktor dan galat-galat pengukuran model variabel teramati adalah

$$X_1 = \lambda_{X_{11}}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\delta}_1$$

$$Y_1 = \lambda_{Y_{11}}\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

$$X_2 = \lambda_{X_{21}}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\delta}_2$$

$$Y_2 = \lambda_{Y_{21}}\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$$

$$X_3 = \lambda_{X_{31}}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\delta}_3$$

$$Y_3 = \lambda_{Y_{31}}\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$X_4 = \lambda_{X_{41}}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\delta}_4$$

$$Y_4 = \lambda_{Y_{12}}\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_4$$

$$Y_5 = \lambda_{Y_{22}}\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_5$$

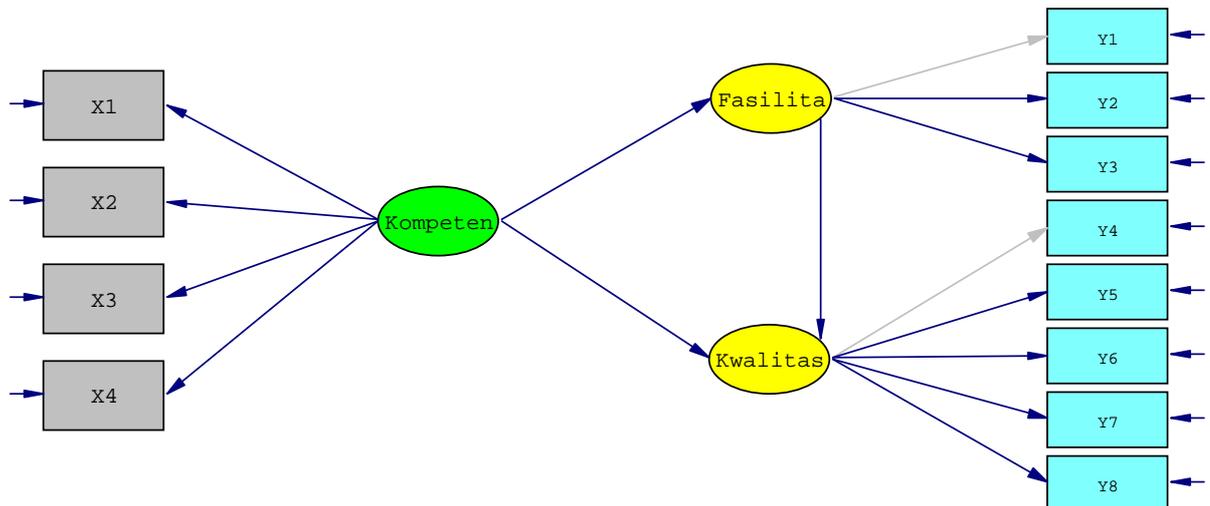
$$Y_6 = \lambda_{Y_{32}} \eta_2 + \varepsilon_6$$

$$Y_7 = \lambda_{Y_{42}} \eta_2 + \varepsilon_7$$

$$Y_8 = \lambda_{Y_{52}} \eta_2 + \varepsilon_8$$

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah :

1. Pengujian validitas dan reliabilitas pada data kuisioner.
2. Spesifikasi model dengan merancang model struktural dan model pengukuran.
3. Membuat diagram jalur adalah membangun hubungan-hubungan antara variabel laten yaitu ξ_1 , η_1 , dan η_2 . Diagram jalur dibentuk berdasarkan hipotesis pada penelitian.
4. Kemudian mengimport data ke program LISREL 9.3 dengan ukuran sampel 78 dan 171 yang digunakan untuk analisis dan membuat model persamaan struktural.
5. Melakukan pendugaan pada model persamaan struktural menggunakan metode DWLS. Mengevaluasi uji kecocokan keseluruhan model pada setiap ukuran sampel. Evaluasi dilakukan dengan melihat nilai *Goodness Of Fit* (GOF) untuk ukuran sampel 78 dan 171.
6. Menghitung pengaruh langsung dan tidak langsung pada sampel yang memiliki uji kecocokan terbaik.
7. Menghitung pengaruh total variabel laten eksogen terhadap variabel laten endogen.
8. Menyimpulkan hasil pengaruh total antar variabel laten.



Gambar 1.Estimasi parameter dalam model

3. Hasil dan Pembahasan

Uji validitas digunakan untuk melihat kevalidan butir-butir pertanyaan suatu kuisioner. Berikut adalah hasil uji validitas pada setiap ukuran sampel dengan *software* SPSS

Tabel 1. Uji Validitas pada 78 Sampel

Variabel	Pearson Correlation (r-hitung)	r-tabel
X1	0,701	0,2900
X2	0,641	0,2900
X3	0,762	0,2900
X4	0,740	0,2900
Y1	0,597	0,2900
Y2	0,596	0,2900
Y3	0,626	0,2900
Y4	0,632	0,2900
Y5	0,784	0,2900
Y6	0,699	0,2900
Y7	0,590	0,2900

Y8	0,764	0,2900
----	-------	--------

Berdasarkan hasil uji validitas pada Tabel 1 , menunjukkan bahwa nilai *Pearson Correlation* merupakan nilai r-hitung. Suatu indikator pertanyaan dinyatakan valid jika nilai r-hitung lebih besar dari nilai r-tabel. Nilai r-tabel dengan N=78 pada tingkat signifikansi 1% adalah 0,2900. Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai r-hitung pada semua indikator lebih besar dari nilai r-tabel, ini berarti semua indikator pertanyaan merupakan indikator yang valid.

Tabel 2. Uji Validitas pada 171 Sampel

Variabel	Pearson Correlation (r-hitung)	r-tabel
X1	0,605	0,1965
X2	0,519	0,1965
X3	0,712	0,1965
X4	0,718	0,1965
Y1	0,583	0,1965
Y2	0,526	0,1965
Y3	0,589	0,1965
Y4	0,580	0,1965
Y5	0,695	0,1965
Y6	0,564	0,1965
Y7	0,596	0,1965
Y8	0,664	0,1965

Berdasarkan hasil uji validitas pada Tabel 2 , menunjukkan bahwa nilai *Pearson Correlation* merupakan nilai r-hitung. Suatu indikator pertanyaan dinyatakan valid jika nilai r-hitung lebih besar dari nilai r-tabel. Nilai r-tabel dengan N=171 pada tingkat signifikansi 1% adalah 0,1965. Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai r-hitung pada semua indikator lebih besar dari nilai r-tabel, ini berarti semua indikator pertanyaan merupakan indikator yang valid

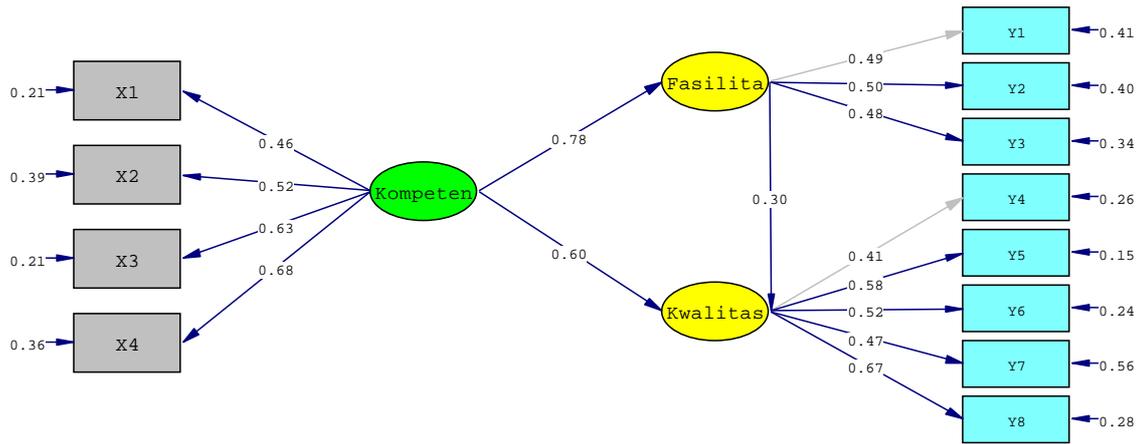
Uji reliabilitas digunakan untuk melihat kuisisioner kualitas pelayanan perpustakaan cukup dapat dipercaya untuk digunakan sebagai alat pengumpulan data tersebut sudah baik. Berikut adalah hasil uji reliabilitas dengan *software* SPSS

Tabel 3. Uji Reliabilitas

Ukuran Sampel	<i>Cronbach's Alpha</i>	N of Item
78	0,890	12
171	0,847	12

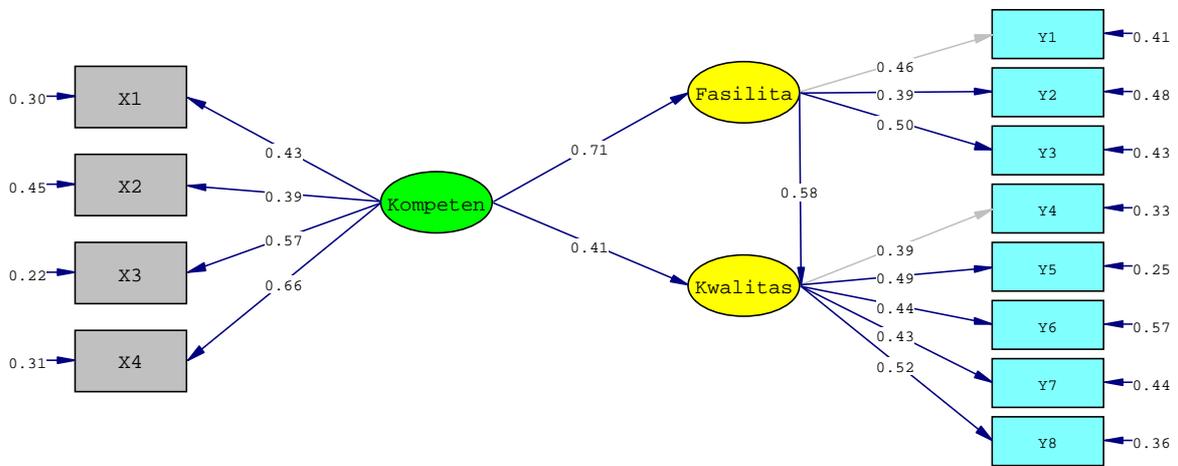
Dari Tabel 3 di peroleh *Cronbach's Alpha* pada ukuran sampel 78 dan 171 adalah 0,890 dan 0,847. Suatu kuisisioner dikatakan reliabel jika nilai *Cronbach's Alpha* lebih besar dari 0,6. Butir-butir pertanyaan pada kualitas pelayanan perpustakaan pada ukuran sampel 78 dan 171 memiliki nilai *Cronbach's Alpha* lebih dari 0,6. Jadi, dapat disimpulkan bahwa butir-butir pertanyaan pada kualitas pelayanan perpustakaan adalah reliabel atau handal.

Estimasi parameter dengan menggunakan metode *Diagonal Weighted Least Square* (DWLS) untuk memperoleh nilai dari parameter-parameter yang ada dalam model dengan menggunakan *software* LISREL 9.3 didapat nilai dugaan parameter dalam model adalah sebagai berikut:



Chi-Square=70.08, df=51, P-value=0.03932, RMSEA=0.085

Gambar 2.Estimasi parameter dalam model untuk ukuran sampel 78



Chi-Square=64.76, df=51, P-value=0.09332, RMSEA=0.051

Gambar 3.Estimasi parameter dalam model untuk ukuran sampel 171

Untuk mengetahui apakah data yang dikumpulkan konsisten dan cocok dengan model maka dilakukan uji kecocokan model. Secara keseluruhan terdapat beberapa kriteria dalam menguji suatu model yaitu Uji kecocokan Absolut, Uji Kecocokan Inkremental dan Uji Kecocokan Parsimoni. Dalam uji kecocokan absolut terdiri atas : Chi Square, RMSEA (*Root Mean Square Error of Apporoximation*), GFI (*Goodness of Fit Index*), dan NCP (*Non Centrality Parameter*). Sedangkan dalam uji kecocokan inkremental terdiri atas : AGFI (*Adjusted Goodness of Fit Index*). Serta dalam uji kecocokan parsimoni terdiri atas : PNFI (*Parsimonius Normed Fit Index*). Berikut ini adalah tabel indeks uji kecocokan pada model dengan menggunakan metode *Diagonaly Weighed Least Square* (DWLS) pada ukuran sampel 78 dan 171

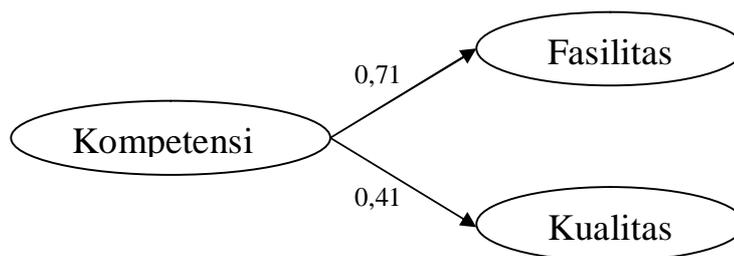
Tabel 4. Hasil Uji Kecocokan Keseluruhan Model

Ukuran Sampel	Ukuran GOF	Target Tingkat Kecocokan	Hasil Estimasi	Tingkat Kecocokan
78	Chi-Square	Nilai Chi-Square semakin kecil semakin baik	70,08	Good Fit
171			64,76	Good Fit
78	RMSEA	RMSEA < 0,05 adalah close fit, 0,05 < RMSEA ≤ 0,08 adalah good fit	0,086	Marginal Fit
171			0,051	Good Fit
78	GFI	GFI ≥ 0,90 adalah good fit	0,979	Good Fit
171			0,985	Good Fit
78	NCP	Semakin Kecil Nilai NCP Semakin Baik	29,051	Good Fit
171			22,618	Good Fit
78	AGFI	AGFI ≥ 0,90 adalah good fit	0,968	Good Fit
171			0,976	Good Fit
78	PNFI	Semakin besar nilai PNFI semakin baik	0,651	Good Fit
171			0,689	Good Fit

Berdasarkan hasil uji kecocokan seluruh model pada Tabel 4 dapat dilihat untuk *Goodness of Fit* nilai *chi-square* untuk ukuran semua 78 dan 171 memiliki kecocokan yang baik karena nilai *chi-square* kecil sesuai dengan jumlah sampel yang digunakan dan nilai NCP untuk ukuran sampel 171 lebih baik, karena nilai NCP ini lebih kecil dari pada nilai NCP pada ukuran sampel 78. Nilai RMSEA pada ukuran sampel 171 menunjukkan kecocokan yang baik (*good fit*), akan tetapi RMSEA pada ukuran sampel 78 menunjukkan model marginal fit. Nilai GFI pada semua ukuran sampel adalah *good fit* dan menunjukkan kekonsistenan pada ukuran sampel 78 dan 171 karena lebih dari 0,9 yaitu 0,979 dan 0,985. Nilai AGFI pada ukuran sampel 171 lebih baik dari pada ukuran sampel 78 karena nilai AGFI lebih besar dari 0,9. Terlihat pada Tabel 4 bahwa semakin banyak ukuran sampel yang digunakan akan semakin baik *goodness of Fit* nya. Nilai PNFI pada ukuran sampel 80 adalah nilai PNFI yang terkecil maka ini dapat dikatakan bahwa pada ukuran sampel bertambah nilai PNFI juga semakin besar yang artinya pada ukuran sampel 171 nilai PNFI semakin baik.

Dari hasil uji kecocokan keseluruhan model dengan metode DWLS untuk ukuran sampel 78 dan 171, jika dibandingkan antara kedua ukuran sampel ini, pada ukuran sampel 78 model tidak baik pada uji kecocokan absolut yaitu RMSEA sedangkan pada uji kecocokan inkremental dan parsimoni model akan lebih baik apabila sampel yang digunakan lebih banyak. Sedangkan pada ukuran sampel 171 kecocokan model dan data *good fit* karena pada ketiga bagian dari uji kecocokan absolut, inkremental dan parsimoni model baik. Pada metode DWLS ini dengan ukuran sampel 171 menghasilkan model yang lebih baik dibandingkan ukuran sampel 78, terlihat pada Tabel 4 bahwa semakin banyak sampel yang digunakan maka model akan semakin baik.

Pengaruh langsung, tidak langsung digunakan untuk melihat pengaruh antar variabel laten. Dimana akan di lihat pengaruh langsung, tidak langsung dan total untuk ukuran sampel 171, menggunakan sampel berukuran 171 karena pada uji kecocokan didapatkan ukuran sampel yang memiliki model baik yaitu pada ukuran sampel 171. Pengaruh langsung merupakan Kompetensi Pegawai dapat mempengaruhi Kualitas Pelayanan tanpa dipengaruhi oleh Fasilitas. Pengaruh langsung ditunjukkan pada gambar 4



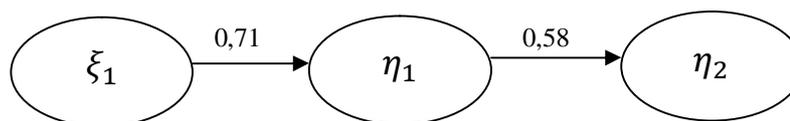
Gambar 4. Pengaruh Langsung

Dari gambar di atas, didapatkan model dengan pengaruh langsung sebagai berikut

- Dari Kompetensi ke Fasilitas
 $\eta_1 = 0,71\xi_1 + \zeta_1$
- Dari Kompetensi ke Kualitas
 $\eta_2 = 0,41\xi_1 + \zeta_2$

Nilai dari pengaruh langsung dapat dilihat melalui koefisien jalur dari satu variabel laten ke variabel laten lainnya.

Pengaruh tidak langsung adalah dimana kompetensi (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas (η_2) dengan melalui variabel perantara fasilitas (η_1). Pengaruh tidak langsung dapat dilihat pada gambar



Gambar 5. Pengaruh Tidak Langsung

Dari gambar di atas, didapatkan model dengan pengaruh tidak langsung sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \eta_2 &= 0,58\eta_1 + \zeta_2 \\
 &= 0,58 (0,71\xi_1 + \zeta_1) + \zeta_2 \\
 &= 0,4118\xi_1 + 0,58 \zeta_1 + \zeta_2
 \end{aligned}$$

Nilai pengaruh tidak langsung diperoleh dengan cara mengalikan koefisien jalur dari kompetensi (ξ_1) ke fasilitas (η_1) dan dengan melalui koefisien jalur fasilitas (η_1) ke kualitas (η_2). Berikut ini hasil perkalian dari koefisien jalur :

- Pengaruh tidak langsung dengan perantara fasilitas
- Pengaruh tidak langsung = $((\xi_1 \rightarrow \eta_1) (\eta_1 \rightarrow \eta_2))$
= (0,71) (0,58)
= (0,4118)

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa kompetensi (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas (η_2). dengan melalui variable perantara fasilitas (η_1) sebesar 0,4118.

Pengaruh total didefinisikan sebagai penjumlahan antara pengaruh langsung dan pengaruh tidak langsung dalam hal ini terdapat nilai pengaruh total yaitu dari variabel laten eksogen pada hal ini kompetensi (ξ_1) terhadap variabel laten endogen yaitu kualitas (η_2) dengan perantara yaitu fasilitas (η_1). Berikut ini adalah model dari pengaruh total dari kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) dengan perantara fasilitas (η_1).

$$\begin{aligned}\text{Pengaruh Total} &= \text{Pengaruh langsung} + \text{Pengaruh tidak langsung} \\ &= (0,41\xi_1 + \zeta_2) + (0,4118\xi_1 + 0,58 \zeta_1 + \zeta_2) \\ &= (0,8218\xi_1 + 0,58 \zeta_1 + 2 \zeta_2)\end{aligned}$$

Hasil pengaruh total kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) adalah sebagai berikut:

Pengaruh total dengan perantara fasilitas (η_1).

$$\begin{aligned}\text{Pengaruh total} &= (\xi_1 \rightarrow \eta_2) + ((\xi_1 \rightarrow \eta_1) (\eta_1 \rightarrow \eta_2)) \\ &= 0,41 + 0,4118 \\ &= 0,8218\end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa pengaruh kompetensi terhadap kualitas melalui fasilitas yaitu sebesar 0,8218 atau 82,18 %

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan pada makalah ini adalah.

1. Ukuran sampel dengan model terbaik menggunakan metode *Diagonally Weighted Least Square*(DWLS) yaitu pada sampel 171, karena menghasilkan nilai indeks kecocokan keseluruhan model yang baik dalam ukuran kecocokan model absolut, inkremental dan parsimoni ini berartidengan ukuran sampel diperbesar maka menghasilkan nilai kecocokan model akan semakin baik, sedangkan pada ukuran sampel 78 nilai indeks kecocokan keseluruhan model menghasilkan nilai yang baik hanya pada ukuran kecocokan model absolut.
2. Kompetensi pegawai (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas pelayanan (η_2) dengan melalui variabel perantara fasilitas (η_1) sebesar 0,4118.
Terdapat nilai pengaruh total yaitu dari variabel laten eksogen pada hal ini kompetensi pegawai (ξ_1) terhadap variabel laten endogen yaitu kualitas (η_2) dengan perantara yaitu fasilitas (η_1). Hasil pengaruh total kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) adalah sebesar 0,8218.
Variabilitas pada kualitas pelayanan perpustakaan Unila (η_2) yang dapat dijelaskan oleh variabilitas kompetensi pegawai perpustakaan Unila (ξ_1) dan fasilitas (η_1) hanya sebesar 82,2%. Sedangkan sisanya sebesar 17,8% dijelaskan oleh faktor lain diluar model yang diteliti.

5. Daftar pustaka

- Gujarati, D. 1995. *Dasar – Dasar Ekonometrika*. Erlangga, Jakarta.
- Hair, J.F., et al. 2007. *Multivariate Data Analysis*. 7th Edition. Prentice Hall, New Jersey.
- Joreskog, K.G. 1996. *Structural Equation Modelling with Ordinal Variables using LISREL*. Scientific Software Internasional, Chicago
- Wijanto. 2008. *Structural Equation Modeling dengan LISREL*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

SINGGAH PAI: APLIKASI ANDROID UNTUK MELESTARIKAN BUDAYA LAMPUNG

**Putri Sukma Dewi¹, Refiesta Ratu Anderha¹, Lily Parnabhakti¹, Yolanda Dwi
Prastika¹**

¹*Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Teknokrat Indonesia, Bandar Lampung
Jl. Zainal Abidin Pagaram, No. 9-11, Labuhanratu Bandarlampung
Penulis Korespondensi : Putri_sukma@teknokrat.ac.id¹*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk melestarikan budaya Lampung dengan menggunakan sebuah aplikasi berbasis android yang diberi nama Singgah Pai. Budaya merupakan warisanl eluhur yang menunjukkan jati diri dan nilai luhur suatu daerah. Jumlah masyarakat Lampung yang masih melaksanakan tata upacara adat Lampung Sai batin hanya 21 pasangan pengantin di Kabupaten Tanggamus pada tahun2011-2015. Jumlah tersebut menggambarkan minimnya kesadaran masyarakat untuk melestarikan budaya, terutama diprovins Lampung. Oleh karena itu, penulis berinisiatif memperkenalkan kembali budaya Lampung melalui aplikasi Android. Aplikasi berbasi sandroid ini memuat konten berupa tempat pariwisata,bahasa, upacara adat, pakaian, rumah adat dan kuliner yang ada di daerah Lampung. Metode penelitian yang digunakan adalah Resea hand Development (R&D). Produk divalidasi oleh ahli media dan ahli konten kemudian diuji cobakan pada sampel yaitu siswa kelas 8 SMP Negeri 2 Pesawaran sebanyak 50 siswa untuk melihat respon siswa. Metode pengambilan sampel pada penelitian ini menggunakan Purposive Random Sampling. Hasil penelitian adalah sebuah aplikasi android “Singgah Pai”, yang sudah layak digunakan untuk memperkenalkan dan melestarikan budaya lampung. Mayoritas siswa antusi s dan merasa senang menggunakan aplikasi tersebut.

Kata kunci:*Singgah Pai, Android, Budaya, Lampung.*

1. Pendahuluan

Indonesia merupakan negara multikultural yang memiliki beragam suku, agama, ras, serta bahasa. Kebudayaan Indonesia berasal dari nilai luhur serta warisan nenek moyang dari masing-masing kepercayaan suku atau etnik tertentu yang menghuni setiap daerahnya. Menurut Freddy H. Tulung, bangsa Indonesia memiliki 742 bahasa/dialek, terdiri atas tidak kurang 478 suku bangsa, kekayaan dan keanekaragaman budaya dan bahasa itu ketika menyatu benar-benar melahirkan keindahan (Kominfo:2013). Hal ini membuat Indonesia memiliki keragaman budaya yang menjadi ciri khas sekaligus daya tarik bangsa Indonesia.

Abad 21 ini keberadaan budaya semakin menurun dan terkikis oleh adanya budaya global. Kehidupan sehari-hari yang diwarnai nilai-nilai budaya mulai digantikan dengan hal yang dirasa lebih sederhana dan praktis. Bahkan upacara pernikahan yang sakral pun sudah digantikan dengan budaya global. Seperti yang dikemukakan Melly Septania (2017) bahwa hanya sedikit pasangan yang melangsungkan pernikahannya dengan pernikahan adat lampung. Begitu pula menurut Dyah Satya Yoga Agustin (2011) bahwa telah menurunnya rasa cinta budaya dan nasionalisme generasi muda akibat globalisasi. Pengikisan budaya ini, membuat generasi muda minim pengetahuan serta minat mengenai kebudayaan daerah. Pergeseran budaya ini kelak akan menghilangkan jati diri negara.

Perlu upaya untuk menumbuhkan kembali kebudayaan asli yang telah pudar seiring perkembangan zaman dan era globalisasi. Generasi muda serta masyarakat perlu ikut andil dalam pelestarian budaya setempat. Menyongsong generasi muda sebagai generasi emas pada tahun 2045 mendatang maka generasi ini perlu menjadi generasi yang cinta budaya bangsanya sendiri. Melestarikan budaya untuk generasi ini perlu menggunakan teknologi yang dekat dengannya yaitu android. Android sebagai teknologi yang sangat dekat dengan generasi muda saat ini.

Penggunaan teknologi diantara remaja sangat mendominasi kehidupan mereka. Teknologi tidak hanya memudahkan remaja namun setiap golongan masyarakat pun merasa terbantu oleh adanya teknologi yang semakin berkembang. Android yang saat ini hadir dalam smartphome, tidak hanya sebatas digunakan untuk berkomunikasi namun sebagai pusat informasi. Android sebagai teknologi pintar dan fleksibel dalam waktu,

tempat dan situasi memudahkan penggunaannya dalam mengakses informasi (Martono, 2014). Sehingga dalam melestarikan budaya perlu menggunakan media teknologi.

Berdasarkan pemaparan di atas, budaya sebagai nilai luhur dan identitas bangsa perlu dilestarikan menggunakan teknologi yang dekat dengan generasi muda. Maka penulis dalam penelitian ini mengembangkan sebuah aplikasi android yang diberinama “Singgah Pai” untuk melestarikan budaya Lampung.

2. Bahan dan Metode

Teknik pengumpulan data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan angket sebagai instrumen pengumpulan data. Angket berisi pernyataan untuk dinilai sampel dengan 5 pilihan yaitu sangat setuju sekali, sangat setuju, setuju, tidak setuju dan sangat tidak setuju. Nilai setiap pilihan secara berurut 5, 4, 3, 2 dan 1. Angket dibuat dalam tiga indikator untuk setiap kategori dalam aplikasi. Tiga indikator tersebut adalah user berpendapat bahwa aplikasi baik, user dapat mengenal budaya dan user tertarik melestarikan budaya.

Analisis data yang digunakan adalah uji t satu pihak. Uji ini dilakukan untuk melihat ketercapaian kelayakan (kelayakan) aplikasi. Skala persentase kelayakan dapat dilihat pada Tabel 1.

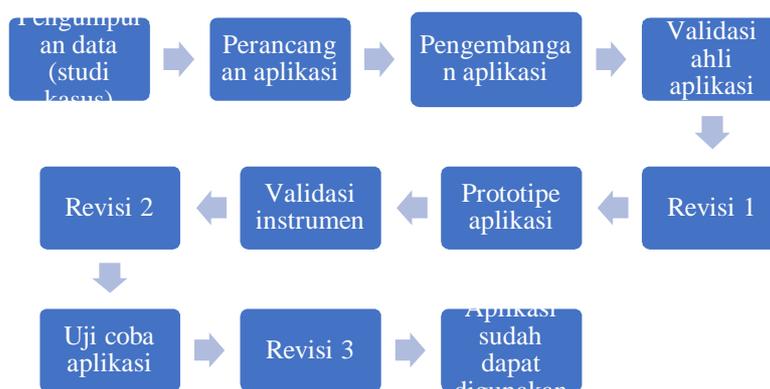
Tabel 1. Skala Persentase Menurut Arikunto (1996:244)

Persentase Pencapaian	Skala Nilai	Interprestasi
$76\% \leq \text{skor} \leq 100\%$	4	Sangat layak
$51\% \leq \text{skor} \leq 75\%$	3	Layak
$26\% \leq \text{skor} \leq 50\%$	2	Cukup layak
$0\% \leq \text{skor} \leq 25\%$	1	Kurang layak

Penelitian inimerupakan penelitian menggunakan metode R&D (*Research and Development*) yaitu suatu model prosedural yang bersifat deskriptif yang menunjukkan tahapan-tahapan yang harus diikuti dalam mengembangkan suatu produk. Dalam penelitian ini produk yang dihasilkan berupa *software* atau aplikasi berbasis android yang dirancang dan dibuat menggunakan program *Construct 2*.

Subjek uji coba dalam penelitian ini yaitu siswa kelas 8 SMP Negeri 2 Pesawaran pada tahun ajaran 2018/2019. Jenis data yang diperoleh bersifat kualitatif dan kuantitatif. Dalam penelitian ini analisis data menggunakan uji *t* untuk melihat ketercapaian aplikasi menurut user. Untuk mendapatkan data ini peneliti menggunakan instrumen pengumpulan data berupa angket yang mengukur aplikasi dalam mengenalkan dan melestarikan budaya menurut pengguna.

Adapun langkah-langkah penelitian pengembangan menggunakan metode R&D (Brog, 1989). Secara terperinci langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 1. Tahapan awal dalam penelitian adalah mencari informasi terkait masalah yang dihadapi kemudian mencari studi pustaka untuk mencari solusi. Data penelitian terdahulu dan studi pustaka dijadikan tolak ukur pengembangan aplikasi “Singgah Pai”.



Gambar 1. Langkah-Langkah Penelitian

Berdasarkan data yang diperoleh dari studi kasus, pustaka dan analisis kebutuhan. Perancangan aplikasi “Singgah Pai” dilakukan dengan merancang aplikasi sesuai kebutuhan, mendesain tampilan kemudian mengumpulkan data konten dari aplikasi tersebut. Aplikasi ini berisi informasi yang dikumpulkan dari berbagai sumber yang ada kemudian disatukan dalam program *Construct 2*. Dalam pengembangannya, kami dibantu oleh ahli teknologi informasi.

Validasi ahli aplikasi dilakukan untuk memvalidasi tampilan dan menguji eror. Validasi dilakukan

oleh ahli pada bidang aplikasi yaitu Dosen Informatika Universitas Teknokrat Indonesia. Tahap ini dilakukan untuk mengetahui apakah aplikasi yang telah dibuat sudah sesuai dengan indikator aplikasi yang layak. Saat dilakukan uji oleh ahli aplikasi, aplikasi berjalan baik dan tidak mengalami *error running*. Sehingga dapat dilanjutkan pada langkah selanjutnya dan tidak perlu dilakukan revisi. Validasi ahli materi dilakukan untuk memvalidasi isi atau konten dari aplikasi. Validasi dilakukan oleh ahli materi yaitu guru di SMP Negeri 2 Pesawaran. Saat dilakukan uji oleh ahli materi, diberi masukan bahwa perlu adanya penambahan informasi pada aplikasi sehingga informasi yang didapat beragam.

Validasi instrumen dilakukan di SMP Negeri 2 Pesawaran saat mengikuti kegiatan Pengabdian Kepada Masyarakat Dosen Pendidikan Matematika Universitas Teknokrat Indonesia. Uji instrumen dilakukan pada 32 siswa kelas 8 SMP Negeri 2 Pesawaran. Uji yang dilakukan dalam pengujian instrumen adalah uji validasi dan uji reliabilitas. Hasil uji validitas dapat dilihat pada Tabel 2. Nilai hasil uji validitas instrumen pernyataan 1-18 lebih dari 0,300 maka semua pernyataan dapat dinyatakan valid (Sugiyono:2009).

Tabel 2. Hasil Uji Validasi Instrumen

PERNYATAAN	Pearson Correlation	KETERANGAN
1	0,665	Valid
2	0,336	Valid
3	0,788	Valid
4	0,635	Valid
5	0,382	Valid
6	0,773	Valid
7	0,740	Valid
8	0,346	Valid
9	0,354	Valid
10	0,334	Valid
11	0,443	Valid
12	0,785	Valid
13	0,454	Valid
14	0,701	Valid
15	0,402	Valid
16	0,506	Valid
17	0,557	Valid
18	0,627	Valid

Selanjutnya dilakukan uji reliabilitas instrumen untuk melihat keajegan instrumen dalam menguji kelayakan aplikasi. Hasil uji reliabilitas dapat dilihat pada Tabel 3. Hasil uji reliabilitas instrumen sebesar 0,742 atau lebih dari 0,6 maka dapat disimpulkan bahwa instrumen reliabel. Karena instrumen valid dan reliable maka dapat dijadikan instrumen untuk dapat menguji aplikasi Singgah Pai.

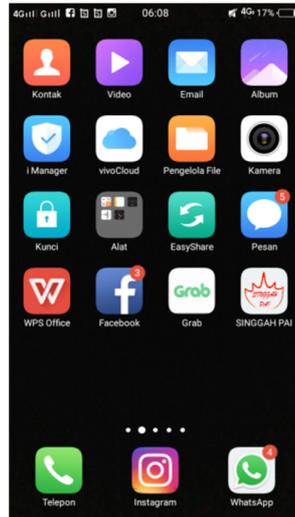
Tabel 3. Hasil Uji Reliabilitas

<i>N of items</i>	<i>Cronbach's Alpha</i>
18	0,742

Uji coba aplikasi dilakukan pada siswa kelas 8 SMP Negeri 2 Pesawaran. Pengambilan sampel dilakukan dengan menggunakan metode *Purposive Random Sampling*. Sampel dipastikan siswa yang berbeda dengan siswa saat pengujian instrumen dengan memastikan siswa berasal dari kelas yang berbeda. Sampel dalam uji coba ini berjumlah 50 siswa. Setelah aplikasi diujicobakan, siswa diminta mengisi angket (instrumen pengumpulan data). Untuk menjawab hipotesis penelitian, data yang didapat dari uji coba dianalisis kemudian dilakukan uji *t* untuk melihat ketercapaian.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian dalam aplikasi ini adalah sebuah aplikasi berbasis android yang berisi 6 kategori budaya. Keenam kategori tersebut adalah pariwisata, bahasa, pernikahan, pakaian, kuliner dan rumah adat. Setiap kategori berisi foto atau video dan informasi singkat tentang foto atau video tersebut. Foto dan video yang dimasukkan ke dalam aplikasi berasal dari berbagai sumber, baik foto langsung maupun mengutip dari sumber lain. Tampilan aplikasi dalam *screenshot handphone* dapat dilihat pada Gambar 2 - 5.



Gambar 2. Tampilan aplikasi dalam *desktop* smartphone



Gambar 3. Tampilan awal aplikasi Singgah Pai

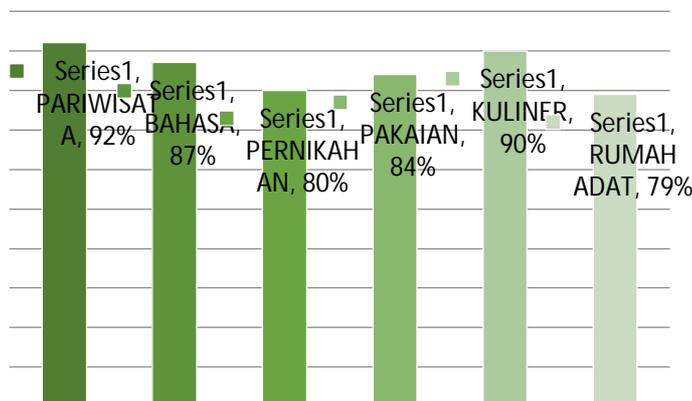


Gambar 4. Tampilan menu kategori aplikasi Singgah Pai



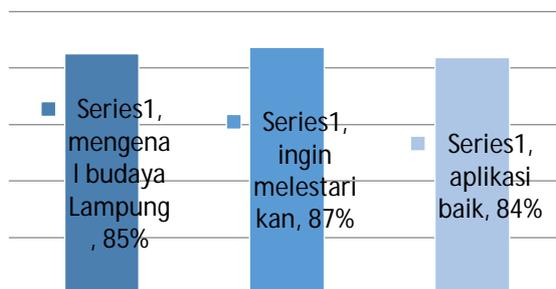
Gambar 5. Tampilan salah satu informasi kuliner aplikasi Singgah Pai

Aplikasi *Singgah Pai* merupakan aplikasi berbasis android yang dikembangkan menggunakan program *Construct 2*, dalam pengembangannya kami dibantu dan bekerja sama dengan tim ahli. Selanjutnya hasil analisis data dari uji coba aplikasi menghasilkan data yang cukup menarik. Untuk mempermudah membaca hasil analisis dapat dilihat grafik pencapaian perkategori pada Grafik 6.



Grafik 6. Pencapaian Perkategori

Dari Grafik 6, dapat kita lihat bahwa kategori yang mencapai nilai tertinggi adalah pariwisata. Kategori ini memang paling menarik perhatian generasi milenial karena kategori pariwisata memang sedang sangat dekat atau sangat kekinian dengan generasi milenial. Sedangkan kategori yang paling sedikit adalah kategori rumah adat. Kategori ini paling sedikit minatnya karena hanya sedikit informasi yang dapat disajikan.



Grafik 7. Pencapaian Perindikator

Pencapaian indikator dapat dilihat pada Grafik 7, dapat kita lihat bahwa indikator tertinggi pada indikator ingin melestarikan budaya Lampung. Sedangkan terendah pada indikator aplikasi baik. Banyak siswa ketika dikenalkan aplikasi ini mereka senang mengenal budaya Lampung sehingga mereka ingin melestarikan budaya Lampung. Namun aplikasi kami masih terbatas dalam hal informasi sehingga informasi yang ditampilkan belum mencakup semua budaya Lampung yang kaya. Aplikasi yang kami tampilkan berupa informasi, beberapa responden menyarankan untuk menambahkan konten permainan pada aplikasi sehingga aplikasi dapat lebih menarik. Namun dalam hal tampilan aplikasi *Singgah Pai* sudah menarik dan tidak mengalami *error running*.

Kemudian untuk melihat ukuran pemusatan dan penyebaran data dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Ukuran Pemusatan dan Penyebaran Data

Nama Data	Banyaknya data (N)	Rata-rata (μ)	Standar deviasi (σ)
Data kelayakan aplikasi	50	85,36%	6,209

Rata-rata kelayakan aplikasi mencapai nilai 85,33%, nilai yang tinggi untuk menilai kelayakan sebuah aplikasi. Selanjutnya untuk melihat apakah nilai tersebut mencapai taraf kelayakan aplikasi secara signifikan maka akan dilakukan uji statistik. Analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini untuk menguji hipotesis, “aplikasi *Singgah Pai* sudah layak untuk melestarikan budaya Lampung”. Analisis yang dilakukan adalah uji *t* satu pihak (*one sample t-test*). Perhitungan dengan menggunakan SPSS 16.0 didapat

hasil perhitungan seperti Tabel 5. Dari analisis data yang dilakukan diperoleh $\text{sig} = 0,000$ atau $\text{sig} < 0,05$. Hal ini berarti rata-rata persentasenya tidak sama dengan 76%, artinya dapat lebih dari atau kurang dari. Untuk menarik kesimpulan dilihat rata-rata kelayakan karena rata-ratanya 85,33% maka kelayakan aplikasi lebih dari 76%. Menurut persentase kelayakan (Arikunto: 1996), aplikasi sudah dikatakan sangat layak untuk digunakan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa aplikasi “Singgah Pai” telah layak dalam melestarikan budaya Lampung.

Tabel 5. Hasil Uji *t*

N	Test value	Sig
50	76%	0,00

Budaya merupakan nilai luhur serta identitas dari suatu bangsa yang sifatnya abstrak dan luas namun kompleks. Budaya juga menentukan karakteristik tiap masyarakat yang bernaung didalamnya. Sehingga budaya dapat mempengaruhi tingkah laku maupun pola pikir setiap individu. Untuk itu sudah sepantasnya kebudayaan yang turun-temurun ini dilestarikan. Namun seiring perkembangan zaman yang semakin hari semakin canggih dan dominan mengarah ke teknologi, sehingga keberadaan budaya menjadi terasingkan. Anak muda yang tumbuh di zaman milenial ini mayoritas memanfaatkan teknologi sebagai salah satu asupan pokok dalam kehidupan sehari-hari. Banyak diantaranya yang memiliki pola pikir kreatif serta inovatif namun tidak dikembangkan sesuai dengan fakta kebutuhan yang sebenarnya. Sudah selajaknya generasi emas yang inovatif memanfaatkan teknologi sebagai sumber informasi maupun pengembangan dalam melestarikan budaya bangsa.

Penelitian dan pengembangan aplikasi berbasis android ini dimanfaatkan sebagai upaya dalam memperkenalkan dan melestarikan kebudayaan Lampung. Penggunaan android yang mudah dan fleksibel memungkinkan generasi muda untuk mengakses segala macam informasi maupun aplikasi melalui *Play Store* atau *App Store*. Untuk melihat kelayakan serta ketercapaian aplikasi *Singgah Pai* tersebut, maka peneliti melakukan pengumpulan data dengan memberikan angket kepada subjek uji coba yaitu siswa kelas 8 SMP Negeri 2 Pesawaran. Aplikasi *Singgah Pai* yang berbasis android ini dikembangkan menggunakan program *Construct 2*, yang berisi informasi dari sumber terkait yang akan menghasilkan media pembelajaran. Rata-rata kelayakan aplikasi ini mencapai 85,33%. Hal yang paling diminati dan menarik perhatian generasi milenial dalam aplikasi ini adalah konten yang berisi pariwisata, terbukti hasil ketercapaiannya hingga 92%. Melihat fakta ini, peneliti menemukan hasil pencapaian indikator yang paling tinggi ada pada “ingin melestarikan” senilai 87%. Mayoritas 50 siswa/I SMP Negeri 2 Pesawaran memilih untuk melestarikan kebudayaan Lampung setelah melihat konten-konten yang terdapat didalam aplikasi *Singgah Pai*. Analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah untuk menguji hipotesis “Aplikasi *Singgah Pai* layak untuk melestarikan budaya Lampung”. Maka diperoleh hasil hipotesisnya mencapai 85%. Jadi dapat disimpulkan bahwa Aplikasi *Singgah Pai* layak untuk melestarikan budaya Lampung.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian dan pengembangan yang telah dilakukan didapat kesimpulan yaitu pengembangan sebuah aplikasi Singgah Pai berbasis android dan aplikasi Singgah Pai telah layak untuk melestarikan budaya Lampung. Saran yang dapat kami sampaikan kepada pembaca adalah untuk dapat menggunakan aplikasi Singgah Pai dalam melestarikan budaya Lampung. Sedangkan kepada peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait adalah menambahkan informasi yang lebih tentang budaya dalam aplikasi.

5. Daftar Pustaka

- Arikunto, Suharsimi. (1985). *Penelitian tentang Studi Komperasi Hasil Belajar Siswa Sekolah Menengah atas yang Menggunakan Modul dengan yang non Modul*. Yogyakarta: FIP IKIP Yogyakarta
- Borg, W.R & Gall, M. D. Gall. (1989). *Educational Research:An Introduction, Fifth Edition*. New York: Longman
- Martono, Kurniawan T & Nurhayati, Oky Dwy. (2014). *Imlementation Of Android Based Mobile Learning Application ad a Flexible Learning Media*. International Journal of Computer Science Issues. Vol. 11, Issue 3, No. 1, May 2014.
- Sugiyono. (2009). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan R&D*. Bandung: Alfabeta

METODE ESTIMASI *WEIGHTED LEAST SQUARE* (WLS) UNTUK BERBAGAI UKURAN SAMPEL (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila)

Eri Setiawan¹, Wardhani Utami Dewi¹, Rudi Ruswandi¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : erstatis@gmail.com¹

Abstrak

Uji kecocokan dalam model persamaan struktural merupakan tahap untuk melihat sejauhmana model yang digunakan sesuai dengan data. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan ukuran sampel dengan model terbaik menggunakan metode estimasi Weighted Least Square (WLS) dan menentukan pengaruh antar variabel laten eksogen dan variabel laten endogen. Data yang digunakan berupa data primer dari hasil survei kuisioner tentang kualitas pelayanan dipergustakaan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa ukuran sampel dengan model terbaik dengan metode WLS adalah 200, dengan ukuran sampel diperbesar maka menghasilkan nilai kecocokan model yang semakin baik. Kompetensi pegawai mempengaruhi kualitas pelayanan secara tidak langsung melalui variabel perantara fasilitas di perpustakaan dengan pengaruh total sebesar 0,8983.

Kata kunci: Uji Kecocokan Model, WLS, Model Persamaan Struktural.

1. Pendahuluan

Dalam penelitian bidang ilmu sosial dan perilaku sering kali peneliti dihadapkan pada suatu permasalahan yang melibatkan faktor yang tidak dapat diukur atau diamati secara langsung (*unobservable factor*). Salah satunya adalah mengenai tingkat kualitas pelayanan perpustakaan di Unila. Penelitian tersebut sering kali dihadapkan pada masalah pengukuran data. Jenis data yang dijumpai berupa data kualitatif, karena biasanya data dikumpulkan melalui kuisioner dengan skala ordinal.

Untuk melihat hubungan kausal secara simultan antara variabel-variabel yang tidak dapat diukur secara langsung dan menduga hubungan lebih dari satu persamaan maka digunakan model persamaan struktural (Hair *et al*, 2007). Dalam model persamaan struktural terdapat beberapa metode estimasi, salah satunya adalah *Weighted Least Squares* (WLS). Metode estimasi ini tidak bergantung pada asumsi normalitas data, memiliki sifat penduga tak bias juga statistik cukup. Ukuran sampel yang diperlukan untuk melakukan estimasi menggunakan WLS, yaitu minimal 10 responden untuk setiap variabel teramati (Wijanto, 2008).

Tahapan dalam model persamaan struktural secara umum terbagi menjadi beberapa tahapan yaitu spesifikasi model, identifikasi model, estimasi model, uji kecocokan, dan respesifikasi (Wijanto, 2008). Uji kecocokan model dapat dilihat berdasarkan indeks kecocokan yang terbagi menjadi 3 (tiga) bagian, yaitu indeks kecocokan absolut digunakan untuk melihat kriteria kecocokan model kategori tinggi atau pada tingkatan yang umumnya mutlak harus terpenuhi. Indeks kecocokan inkremental digunakan untuk melihat kriteria kecocokan model pada kategori menengah. Indeks kecocokan parsimoni digunakan untuk melihat kriteria kecocokan model pada kategori rendah dari sisi kesederhanaan model.

Pada penelitian ini akan melakukan uji kecocokan model dengan membandingkan indeks kecocokan model persamaan struktural menggunakan Lisrel 8.80, menentukan ukuran sampel dengan model terbaik dan menghitung pengaruh total antar variabel pada data hasil survei kuisioner kualitas pelayanan perpustakaan Unila yang melibatkan 12 variabel teramati dengan ukuran sampel 150 dan 200 dengan metode *Weighted Least Squares* (WLS).

Model persamaan struktural (*Structural Equation Modeling*, SEM) adalah salah satu teknik peubah ganda yang dapat menganalisa secara simultan beberapa peubah laten endogen dan eksogen. Misalkan vektor acak $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ dan $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, berturut-turut adalah variabel laten endogen dan eksogen, menurut Bollen (1989) membentuk persamaan simultan dengan sistem hubungan persamaan linier:

$$\eta_j = B_{ji}\eta_i + \Gamma_{jb}\xi_b + \zeta_j \quad (1)$$

dengan,

\mathbf{B}_{ji} = matriks koefisien peubah laten endogen berukuran $m \times m$

$\mathbf{\Gamma}_{jb}$ = matriks koefisien peubah laten eksogen berukuran $m \times n$

$\boldsymbol{\eta}_j$ = vektor peubah laten endogen berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{\eta}_i$ = vektor peubah laten endogen berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{\xi}_b$ = vektor peubah laten eksogen berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\zeta}_j$ = vektor sisaan acak hubungan antara $\boldsymbol{\eta}$ dan $\boldsymbol{\xi}$ berukuran $m \times 1$

dengan asumsi $E(\boldsymbol{\eta}) = 0$, $E(\boldsymbol{\zeta}) = 0$, $E(\boldsymbol{\zeta}) = 0$; $\boldsymbol{\zeta}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\xi}$.

Persamaan (1) dikenal sebagai persamaan simultan dan dapat dibuktikan menjadi model persamaan struktural, yaitu:

$$\boldsymbol{\eta} = (1 - \beta)^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + (1 - \beta)^{-1} \boldsymbol{\zeta} \quad (2)$$

Vektor variabel laten endogen $\boldsymbol{\eta}$ dan variabel laten eksogen $\boldsymbol{\xi}$ masing-masing diukur secara tidak langsung melalui indikator-indikatornya, yaitu $\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ dan $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Hubungan antara $\boldsymbol{\eta}$ dan $\boldsymbol{\xi}$ dengan indikator \mathbf{y} dan \mathbf{x} masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = \Lambda_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \Lambda_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

Persamaan (3) dan (4) disebut sebagai model persamaan pengukuran.

dimana:

\mathbf{y} = vektor penjelas peubah tidak bebas yang berukuran $p \times 1$

\mathbf{x} = vektor penjelas peubah bebas yang berukuran $q \times 1$

Λ_x = matriks koefisien regresi antara \mathbf{y} dan $\boldsymbol{\eta}$ yang berukuran $p \times m$

Λ_y = matriks koefisien regresi antara \mathbf{x} dan $\boldsymbol{\xi}$ yang berukuran $q \times n$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor sisaan pengukuran terhadap \mathbf{y} yang berukuran $p \times 1$

$\boldsymbol{\delta}$ = vektor sisaan pengukuran terhadap \mathbf{x} yang berukuran $q \times 1$

dengan asumsi $E(\boldsymbol{\eta}) = 0$, $E(\boldsymbol{\zeta}) = 0$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $E(\boldsymbol{\delta}) = 0$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, dan $\boldsymbol{\delta}$; $\boldsymbol{\delta}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Metode *Weighted Least Square* (WLS) atau yang disebut dengan fungsi pembobot merupakan fungsi tertentu yang berfungsi sebagai pembobot dari suatu model regresi linier. Fungsi tersebut akan memberikan model regresi linier yang lebih kompleks sehingga model yang dihasilkan dapat dijadikan acuan untuk memproduksi suatu barang, dan barang yang dihasilkan akan optimal (Wijanto, 2008).

Pada WLS, fungsi $F(\mathbf{S}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}))$ yang diminimumkan adalah sebagai berikut:

$$F_{WLS}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma})' \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (5)$$

di mana \mathbf{s}' adalah vektor yang memuat unsur-unsur segitiga bawah serta diagonal matriks kovarian sampel \mathbf{S} yang diobservasi sebagai penduga parameter. Sedangkan $\boldsymbol{\sigma}'$ adalah vektor yang memuat unsur-unsur segitiga bawah serta diagonal matriks kovarian $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ pada model. Matriks \mathbf{S} dan $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ merupakan matriks simetris dan definit positif. \mathbf{W}^{-1} adalah invers dari matriks pembobot \mathbf{W} bagi matrik galat yang merupakan matriks varian asimtotik yang elemennya dituliskan $W_{ii,kk}$ (Joreskog and Sorbom, 1989).

Fungsi F_{WLS} meminimumkan jumlah kuadrat dari masing-masing unsur matriks sisaan $(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma})$. Hal ini hampir sama dengan metode kuadrat terkecil biasa (OLS). Dimana dalam analisis regresi metode OLS meminimumkan jumlah kuadrat sisaan, yaitu galat antara nilai pengamatan perubah tak bebas dengan nilai dugaannya. Matriks sisaan ini memuat selisih antara ragam sampel dengan nilai dugaan dari model. Metode WLS merupakan penduga yang tak bias dan statistik cukup. Sehingga pada ukuran sampel yang bertambah besar, maka umumnya konvergen ke $\boldsymbol{\theta}$.

Untuk memperoleh penduga kuadrat terkecil terboboti dari $\boldsymbol{\beta}$, mula-mula model regresi dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

dimana, $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}^2$ dan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}^2)$

misalkan

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix}$$

Matriks V^{-1} berupa matriks diagonal yang berelimenkan nilai-nilai pembobot, yaitu $\frac{1}{\sigma_i^2} = w_i$, dari persamaan (6) diberikan pembobot V^{-1} sehingga diperoleh model regresi terboboti yaitu:

$$V^{-1}Y = V^{-1}X\boldsymbol{\beta} + V^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

atau

$$Z = Q\boldsymbol{\beta} + f$$

Dari persamaan $Z = Q\boldsymbol{\beta} + f$ diperoleh bentuk persamaan

$$f = Z - Q\boldsymbol{\beta}$$

Dengan jumlah kuadrat sisanya adalah

$$\begin{aligned} f^T f &= \boldsymbol{\varepsilon}^T V^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (Y - X\hat{\boldsymbol{\beta}})^T V^{-1} (Y - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (Y - X\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (V^{-1}Y - V^{-1}X\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (Y^T - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T) (V^{-1}Y - V^{-1}X\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= Y^T V^{-1} Y - Y^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} Y + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= Y^T V^{-1} Y - Y^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} Y + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= Y^T V^{-1} Y - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} Y + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \quad (7)$$

Karena $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T V^{-1} Y$ adalah skalar, maka bentuk tersebut akan sama dengan transposenya $Y^T V^{-1} X\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Untuk memperoleh penduga sehingga jumlah kuadrat sisa sekecil mungkin, kita diferensialkan $f^T f$ terhadap $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ maka kita peroleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial f^T f}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2 X^T V^{-1} Y + 2 X^T V^{-1} X \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

dengan meminimumkan $\frac{\partial f^T f}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2 X^T V^{-1} X \hat{\boldsymbol{\beta}} &= 2 X^T V^{-1} Y \\ X^T V^{-1} X \hat{\boldsymbol{\beta}} &= X^T V^{-1} Y \\ (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} X \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y \end{aligned} \quad (8)$$

Terbukti bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ memiliki sifat penduga statistik cukup. Dimana di dalam parameter penduga tidak terdapat parameter, yang ada hanya variabel dan pembobotnya. Kemudian akan dibuktikan bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga tak bias dari $\boldsymbol{\beta}$, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y \\ E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} (X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} X\boldsymbol{\beta} \\ E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

2. Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah bagaimana menganalisis data bersifat ordinal melalui SEM sebagai berikut:

1. Model Struktural

Menurut Wijanto (2008), model struktural menggambarkan hubungan-hubungan yang ada di antara variabel-variabel laten. Beberapa persamaan regresi linier tersebut membentuk sebuah *persamaan simultan* variabel-variabel laten. Parameter yang menunjukkan regresi variabel laten eksogen diberi label dengan huruf Yunani γ ("gamma"), sedangkan untuk regresi variabel laten endogen diberi label dengan huruf Yunani β ("beta"), dan matriks kovarians variabel-variabel laten eksogen diberi label dengan huruf Yunani Φ ("phi").

Model variabel laten adalah:

$$\eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \quad (10)$$

$$\eta_2 = \beta_{21}\eta_1 + \gamma_{21}\xi_1 + \zeta_2 \quad (11)$$

dengan asumsi $E(\eta) = 0$, $E(\xi) = 0$, $E(\zeta) = 0$; ζ tidak berkorelasi dengan ξ , $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ nonsingular.

2. Model Pengukuran

Model pengukuran digunakan untuk menduga hubungan antar variabel laten dengan variabel-variabel teramatinya. Variabel laten dimodelkan sebagai sebuah faktor yang mendasari variabel-variabel teramati yang terkait. *Factor loadings* yang menghubungkan variabel laten dengan variabel-variabel teramati disimbolkan dengan huruf Yunani λ (lambda).

Model variabel teramati adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{x11}\xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_{x21}\xi_1 + \delta_2 \\ x_3 &= \lambda_{x31}\xi_1 + \delta_3 \\ x_4 &= \lambda_{x41}\xi_1 + \delta_4 \\ y_1 &= \lambda_{y11}\eta_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \lambda_{y21}\eta_1 + \varepsilon_2 \\ y_3 &= \lambda_{y31}\eta_1 + \varepsilon_3 \\ y_4 &= \lambda_{y12}\eta_2 + \varepsilon_4 \\ y_5 &= \lambda_{y22}\eta_2 + \varepsilon_5 \\ y_6 &= \lambda_{y32}\eta_2 + \varepsilon_6 \\ y_7 &= \lambda_{y42}\eta_2 + \varepsilon_7 \\ y_8 &= \lambda_{y52}\eta_2 + \varepsilon_8 \end{aligned} \quad (12)$$

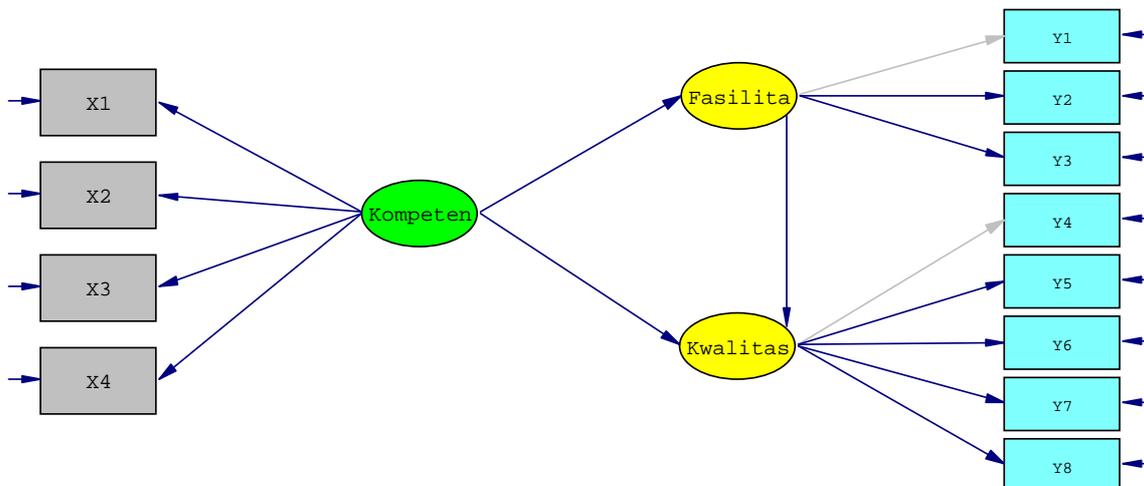
dengan asumsi, $E(\eta) = 0$, $E(\xi) = 0$, $E(\varepsilon) = 0$, $E(\delta) = 0$; ε tidak berkorelasi dengan η , ξ , dan δ ; δ tidak berkorelasi dengan η , ξ , dan ε .

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah :

Dengan menggunakan *software Lisrel 8.80*, langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menginput data kuesioner dalam 2 ukuran sampel, yaitu 150 dan 200 dengan merandom data dengan Minitab17
2. Pengujian validitas dan reliabilitas pada data kuesioner
3. Merancang model struktural
4. Merancang model pengukuran
5. Konstruksi diagram jalur
6. Estimasi parameter dengan metode *Weighted Least Square (WLS)* menggunakan *software Lisrel 8.80* pada ukuran sampel 150 dan 200.
7. Mengevaluasi Indeks Kecocokan, dan menentukan ukuran sampel dengan model terbaik.
8. Menghitung pengaruh langsung dan tidak langsung.
9. Menghitung pengaruh total variabel laten eksogen terhadap variabel laten endogen.

Merujuk teori dan hasil penelitian yang relevan, terdapat hubungan langsung dan tidak langsung antarsesama variabel laten sehingga dapat dirancang kerangka pemikiran seperti terlihat dalam diagram jalur pada konseptual di bawah ini:



Gambar 1. Model Konseptual

3. Hasil dan Pembahasan

Uji validitas digunakan untuk melihat kevalidan butir-butir pertanyaan suatu kuisioner. Berikut adalah hasil uji validitas pada setiap ukuran sampel dengan *software* SPSS.

Tabel 1. Uji Validitas pada 150 Sampel

Variabel	Correlation Pearson (r-hitung)	r-tabel
X1	0,582	0,1603
X2	0,529	0,1603
X3	0,653	0,1603
X4	0,681	0,1603
Y1	0,600	0,1603
Y2	0,528	0,1603
Y3	0,650	0,1603
Y4	0,509	0,1603
Y5	0,725	0,1603
Y6	0,559	0,1603
Y7	0,491	0,1603
Y8	0,617	0,1603

Berdasarkan hasil uji validitas pada Tabel 1. menunjukkan bahwa nilai *Correlation Pearson* merupakan nilai r-hitung. Suatu indikator dinyatakan valid jika nilai r-hitung lebih besar dari nilai r-tabel. Nilai r-tabel dengan N=150 pada tingkat signifikansi 5% adalah 0,1603. Dari Tabel 1. dapat dilihat bahwa nilai r-hitung pada semua indikator lebih besar dari nilai dari r-tabel, ini berarti bahwa semua indikator pertanyaan merupakan indikator yang valid.

Tabel 2. Uji Validitas pada 200 Sampel

Variabel	Correlation Pearson (r-hitung)	r-tabel
X1	0,612	0,1388
X2	0,539	0,1388
X3	0,706	0,1388
X4	0,699	0,1388
Y1	0,582	0,1388

Y2	0,517	0,1388
Y3	0,605	0,1388
Y4	0,553	0,1388
Y5	0,699	0,1388
Y6	0,545	0,1388
Y7	0,582	0,1388
Y8	0,647	0,1388

Berdasarkan hasil uji validitas pada Tabel 2. menunjukkan bahwa nilai *Correlation Pearson* merupakan nilai r-hitung. Suatu indikator dinyatakan valid jika nilai r-hitung lebih besar dari nilai r-tabel. Nilai r-tabel dengan N=200 pada tingkat signifikansi 5% adalah 0,1388. Dari Tabel 2. dapat dilihat bahwa nilai r-hitung pada semua indikator lebih besar dari nilai dari r-tabel, ini berarti bahwa semua indikator pertanyaan merupakan indikator yang valid.

Uji reliabilitas digunakan untuk melihat kuisisioner kualitas pelayanan perpustakaan cukup dapat dipercaya untuk digunakan sebagai alat pengumpulan data tersebut sudah baik. Berikut adalah hasil uji reliabilitas dengan *software* SPSS

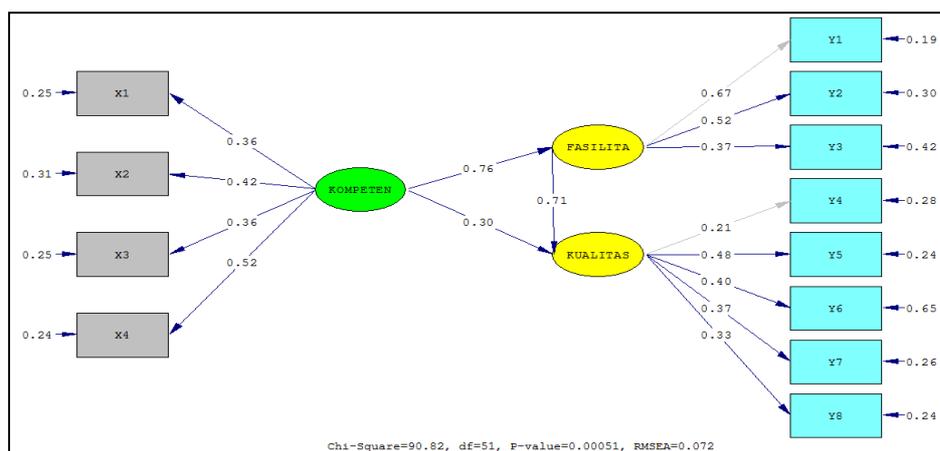
Tabel 3. Uji Reliabilitas

Ukuran Sampel	<i>Cronbach's Alpha</i>	N of Item
150	0,832	12
200	0,843	12

Dari Tabel 3. nilai dari *Cronbach's Alpha* pada sampel 150 sebesar 0,832 dan pada sampel 200 sebesar 0,843. Butir-butir pertanyaan akan reliabel jika nilai *Cronbach's Alpha* lebih dari 0,6. Jadi, dapat disimpulkan bahwa butir-butir pertanyaan pada kualitas pelayanan perpustakaan Unila dapat dikatakan reliabilitas atau handal.

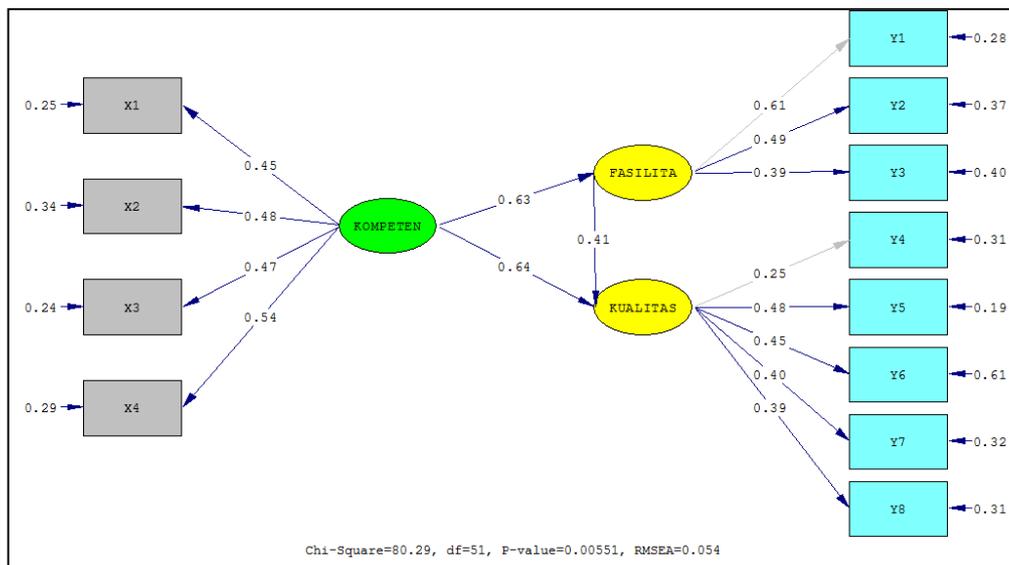
Estimasi parameter dengan menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS) untuk memperoleh nilai dari parameter-parameter yang ada dalam model dengan menggunakan *software* LISREL 8.80 didapat nilai dugaan parameter dalam model adalah sebagai berikut:

Estimasi parameter dalam model untuk ukuran sampel 150



Gambar 2. Diagram Jalur ukuran 150

Estimasi parameter dalam model untuk ukuran sampel 171



Gambar 3. Diagram Jalur ukuran 200

Untuk mengetahui apakah data yang dikumpulkan cocok dengan model maka dilakukan uji kecocokan model berdasarkan indeks kecocokan model. Secara keseluruhan terdapat beberapa kriteria dalam menguji suatu model yaitu Uji kecocokan Absolut, Uji Kecocokan Inkremental dan Uji Kecocokan Parsimoni. Dalam uji kecocokan absolut terdiri atas: Chi Square, RMSEA (*Root Mean Square Error of Apporoximation*), GFI (*Goodness of Fit Index*), dan NCP (*Non Centrality Parameter*). Sedangkan dalam uji kecocokan inkremental terdiri atas : AGFI (*Adjusted Goodness of Fit Index*). Serta dalam uji kecocokan parsimoni terdiri atas : PNFI (*Parsimoni Nomed Fit Index*).

Berikut ini adalah tabel indeks uji kecocokan pada model dengan menggunakan metode *Weighthed Least Square* (WLS) pada ukuran sampel 150 dan 200.

Tabel 4. Hasil Uji Kecocokan Keseluruhan Model

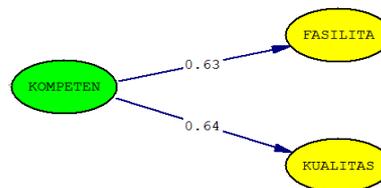
Ukuran GOF	Target tingkat kecocokan	Hasil Estimasi	Tingkat Kecocokan	(√) yang terbaik
Chi Square	Nilai yang kecil	90.82	Baik	
		80.29	Baik	√
NCP Interval	Nilai yang kecil Interval sempit	39.82 (17.08 ; 70.41)	Baik	
		29.29 (8.82 ; 57.69)	Baik	√
GFI	≥ 0.90 <i>good fit</i> 0.8 ≤ GFI < 0.9	0.93	Baik	
		1.94	Baik	√
RMSEA	RMSEA ≤ 0.05 <i>close fit</i> 0.05 < RMSEA ≤ 0.08 <i>good fit</i>	0.072	Baik	
		0.054	Baik	√
PNFI	Nilai yang besar	0.46	Baik	
		0.49	Baik	√
AGFI	≥ 0.90 <i>good fit</i> 0.80 ≤ AGFI < 0.90 <i>marginal fit</i>	0.89	Kurang Baik	
		0.91	Baik	√

Dari Tabel 4, untuk tabel biru () menunjukkan hasil indeks kecocokan model untuk ukuran 150 dan untuk tabel kuning () menunjukkan hasil indeks kecocokan model untuk ukuran 200.

Dari hasil indeks kecocokan model dengan metode WLS untuk ukuran sampel 150 dan 200, jika dibandingkan keduanya pada n=150 model baik pada indeks kecocokan absolut dan inkremental, namun pada indeks kecocokan parsimoni kurang baik. Sedangkan pada ukuran sampel 200 kecocokan antara model dan data adalah baik karena pada ketiga bagian dari indeks kecocokan yaitu indeks kecocokan absolut, inkremental dan parsimoni model baik. Pada indeks kecocokan absolut kedua sampel didapatkan model yang baik yaitu pada nilai GFI. Jadi dapat dikatakan bahwa hasil indeks kecocokan model dengan metode WLS pada semua ukuran sampel cukup baik dan relatif konsisten, tetapi pada ukuran sampel 200 memiliki model yang lebih baik karena ketiga indeks kecocokan model menunjukkan hasil yang baik.

Pengaruh langsung, tidak langsung digunakan untuk melihat pengaruh antar variabel laten . Dimana akan dilihat pengaruh langsung, tidak langsung dan total untuk ukuran sampel 200, menggunakan sampel berukuran 200 karena pada uji kecocokan didapatkan ukuran sampel yang memiliki model baik.

Pengaruh langsung merupakan Kompetensi Pegawai dapat mempengaruhi Kualitas Pelayanan tanpa dipengaruhi oleh Fasilitas. Pengaruh langsung ditunjukkan pada Gambar 4.

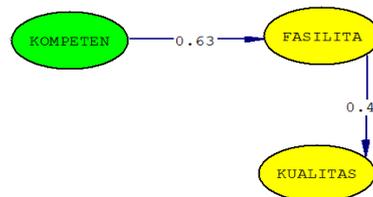


Gambar 4. Pengaruh Langsung

Dari Gambar 4. didapat model dengan pengaruh langsung sebagai berikut:

- 1) Dari kompetensi pegawai ke fasilitas perpustakaan
 $\eta_1 = 0.63 \xi_1 + \zeta_1$
- 2) Dari kompetensi pegawai ke kualitas pelayanan
 $\eta_2 = 0.64 \xi_1 + 0.71 \eta_1 + \zeta_2$

Pengaruh tidak langsung adalah dimana kompetensi (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas (η_2) dengan melalui variabel perantara fasilitas (η_1). Pengaruh tidak langsung dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Pengaruh Tidak Langsung

Dari gambar di atas, didapatkan model dengan pengaruh tidak langsung sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 0.41\eta_1 + \zeta_2 \\ &= 0.41 (0.63\xi_1 + \zeta_1) + \zeta_2 \\ &= 0.2583\xi_1 + 0.41\zeta_1 + \zeta_2 \end{aligned}$$

Nilai pengaruh tidak langsung diperoleh dengan cara mengalikan koefisien jalur dari kompetensi (ξ_1) ke fasilitas (η_1) dan dengan melalui koefisien jalur fasilitas (η_1) ke kualitas (η_2). Berikut ini hasil perkalian dari koefisien jalur :

$$\begin{aligned} \text{Pengaruh tidak langsung} &= ((\xi_1 \rightarrow \eta_1) (\eta_1 \rightarrow \eta_2)) \\ &= (0.63) (0.41) \\ &= 0.2583 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa kompetensi (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas (η_2). dengan melalui variabel perantara fasilitas (η_1) sebesar 0.2583.

Pengaruh total didefinisikan sebagai penjumlahan antara pengaruh langsung dan pengaruh tidak langsung dalam hal ini terdapat nilai pengaruh total yaitu dari variabel laten eksogen pada hal ini kompetensi (ξ_1) terhadap variabel laten endogen yaitu kualitas (η_2) dengan perantara yaitu fasilitas (η_1). Berikut ini adalah model dari pengaruh total dari kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) dengan perantara fasilitas (η_1).

$$\begin{aligned}\text{Pengaruh Total} &= \text{Pengaruh langsung} + \text{Pengaruh tidak langsung} \\ &= (0.64\xi_1 + \zeta_2) + (0.2583\xi_1 + 0.41\zeta_1 + \zeta_2) \\ &= (0.8983\xi_1 + 0.41\zeta_1 + 2\zeta_2)\end{aligned}$$

Hasil pengaruh total kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) adalah sebagai berikut:
Pengaruh total dengan perantara fasilitas (η_1).

$$\begin{aligned}\text{Pengaruh total} &= ((\xi_1 \rightarrow \eta_2)) + ((\xi_1 \rightarrow \eta_1) (\eta_1 \rightarrow \eta_2)) \\ &= 0.64 + 0.2583 \\ &= 0.8983\end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa pengaruh kompetensi terhadap kualitas melalui fasilitas yaitu sebesar 0.8983 atau 89.83 %

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan pada makalah ini adalah:

1. Ukuran sampel dengan model terbaik menggunakan metode *Weighted Least Square*(WLS) yaitu pada sampel 200, karena menghasilkan nilai indeks kecocokan keseluruhan model yang baik dalam ukuran kecocokan model absolut, inkremental dan parsimoni ini berarti dengan ukuran sampel diperbesar maka menghasilkan nilai kecocokan model akan semakin baik, sedangkan pada ukuran sampel 150 nilai indeks kecocokan keseluruhan model menghasilkan nilai yang baik hanya pada ukuran kecocokan model absolut dan parsimoni.
2. Kompetensi pegawai (ξ_1) mempengaruhi secara signifikan terhadap kualitas pelayanan (η_2) dengan melalui variabel perantara fasilitas (η_1) sebesar 0.2583. Terdapat nilai pengaruh total yaitu dari variabel laten eksogen pada hal ini kompetensi pegawai (ξ_1) terhadap variabel laten endogen yaitu kualitas (η_2) dengan perantara yaitu fasilitas (η_1). Hasil pengaruh total kompetensi (ξ_1) terhadap kualitas (η_2) adalah sebesar 0.8983. Variabilitas pada kualitas pelayanan perpustakaan Unila (η_2) yang dapat dijelaskan oleh variabilitas kompetensi pegawai perpustakaan Unila (ξ_1) dan fasilitas (η_1) sebesar 89.83%. Sedangkan sisanya sebesar 10.17% dijelaskan oleh faktor lain diluar model yang diteliti.

5. Daftar Pustaka

- Bollen, K.A. 1989. *Structural Equations Model With Latent Variable*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Hair, J.F. 2017. *Multivariate Data Analysis*. 7th edition. Pearson Prentice Hall, New York.
- Joreskog, K.G. and Sorbom, D. 1989. *Lisrel 7: User's Reference Guide*. Scientific Software International, Chicago.
- Wijanto, S.H. 2008. *Structural Equation Modelling* Graha Ilmu, Yogyakarta.

PERBANDINGAN METODE SOLUSI AWAL LAYAK PADA DATA BIAYA PENGIRIMAN BERAS PERUM BULOG DIVRE LAMPUNG

Dwi Wahyu Lestari¹, Dian Kurniasari²

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : dwi.wahyulestari@yahoo.com¹

Abstrak

Pangan merupakan kebutuhan dasar manusia yang sangat penting disamping papan, sandang, pendidikan, dan kesehatan. Masih adanya penduduk miskin, daerah rawan pangan, produksi pangan yang dihasilkan tidak merata antar wilayah, serta potensi sumber daya alam yang berbeda dimasing-masing daerah sangat dipengaruhi oleh distribusi bahan pangan. Oleh karena itu pengaruh masalah distribusi pangan terhadap perekonomian Indonesia sangatlah besar. Artikel ini membahas perbandingan metode solusi awal layak pada data pengiriman beras dengan menggunakan metode sudut barat laut, metode biaya terkecil, metode pendekatan vogel dan menggunakan software solver pada Microsoft excel. Perbandingan metode ini bertujuan untuk mengetahui minimal biaya pengiriman beras perum Bulog divre Lampung bulan Juli 2018, sehingga harga beras tetap stabil tanpa ada tambahan biaya berlebih karena proses pengiriman yang tidak optimal. Pengiriman beras yang optimal akan meminimalisir lonjakan harga yang terlalu tinggi, sehingga masyarakat Indonesia tetap dapat mengonsumsi beras dengan harga normal.

Kata kunci : Distribusi Pangan; Pangan; Solusi awal layak;

1. Pendahuluan

Pangan merupakan kebutuhan manusia yang sangat mendasar karena berpengaruh terhadap eksistensi dan ketahanan hidupnya, baik dipandang dari segi kuantitas dan kualitasnya. Mengingat kadar kepentingan yang demikian tinggi, pada dasarnya pangan merupakan salah satu kebutuhan dasar manusia yang sepenuhnya menjadi hak asasi setiap penduduk Indonesia. Tersedianya pangan yang cukup, aman, bermutu dan bergizi merupakan prasyarat utama yang harus dipenuhi dalam upaya mewujudkan insan yang berharkat dan bermartabat serta mempunyai basis sumberdaya manusia yang berkualitas (Suryana, 2013).

Demi memenuhi kebutuhan seluruh penduduk Indonesia, proses distribusi pangan sangat penting. Distribusi pangan adalah tersedianya pangan dan pasokan pangan secara merata sepanjang waktu baik jumlah, mutu, aman dan keragamannya untuk memenuhi kebutuhan pangan masyarakat. Distribusi pangan merupakan salah satu subsistem ketahanan pangan yang peranannya sangat strategis, apabila tidak dapat terselenggara secara baik dan lancar, bahan pangan yang dibutuhkan masyarakat tidak akan terpenuhi. Distribusi pangan ini diharapkan dapat terlaksana secara efektif, efisien dan merata di setiap lokasi berlangsungnya transaksi bahan pangan kebutuhan masyarakat. Gangguan distribusi pangan ini berdampak terhadap kelangkaan bahan pangan dan kenaikan harga pangan serta berpengaruh terhadap rendahnya akses pangan masyarakat karena daya beli bahan pangan menjadi menurun (Eyverson, 2015).

Pemerintah terus memperbaiki jalur distribusi pangan untuk menjaga stabilitas harga dengan melakukan efisiensi rantai pasokan. Sebab selama ini, rantai distribusi ditengarai menjadi permasalahan utama yang memicu gejolak harga pangan di tanah air (Bulog, 2018).

Artikel ini membahas tentang perbandingan metode solusi awal layak pada data biaya pengiriman barang perum Bulog divre Lampung bulan Juli 2018 untuk mengetahui minimal biaya pengiriman dengan membandingkan metode Sudut barat laut, metode biaya terkecil, metode pendekatan Vogel dan menggunakan software solver.

Program linear merupakan suatu teknik dalam mendapatkan nilai optimum (maksimum dan minimum) suatu fungsi objektif dengan kendala-kendala tertentu. Kendala-kendala ini diterjemahkan ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear (Kasmina, 2008).

Solusi awal layak dapat dilihat dari jumlah sel yang teralokasi. Solusi layak jika jumlah sel yang terisi sebanyak $m + n - 1$ dengan m menunjukkan jumlah sumber atau persediaan dan n adalah permintaan (Hotniar, 2005). Menurut Mulyono (1999) terdapat beberapa metode untuk menentukan solusi fisibel awal, antara lain sebagai berikut :

1. Metode Sudut Barat Laut (North West Corner Method)

Metode ini adalah metode yang paling sederhana di antara ketiga metode yang ada untuk menentukan solusi fisibel awal. Dasar dari metode alokasi north west corner ini adalah arah. Sesuai namanya, alokasi pertama dilakukan pada sel pojok kiri atas (barat laut). Adapun langkah lengkapnya adalah sebagai berikut.

- a. Tampilkan persoalan atau alokasikan semua data yang ada ke dalam matriks transportasi. Dengan c_{ij} merupakan biaya transpor dan x_{ij} merupakan barang yang diangkut. Seperti pada tabel berikut:

Tabel 1. Bentuk umum tabel awal metode solusi awal

Dari / Ke	Tujuan						Suplay	
	1	2	j					
1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	...	x_{1j}	c_{1j}	S_1
2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	...	x_{2j}	c_{2j}	S_2
Sumber
.
i	x_{i1}	c_{i1}	x_{i2}	c_{i2}	...	x_{ij}	c_{ij}	S_j
Demand	D_1		D_2		D_j			

- b. pertama ditujukan pada sel kiri atas atau sudut kiri atas. Alokasikan ke dalam sel sebanyak mungkin dengan memperhatikan keseimbangan antara permintaan dan persediaan. Seperti pada tabel berikut:

Tabel 2. Contoh hasil metode sudut barat laut

Dari/ Ke	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas Pabrik
Pabrik w	20	5	8	90
	50	40		
pabrik H	15	20	10	60
		60		
Pabrik O	25	10	19	50
		10	40	
Kebutuhan Pabrik	50	110	40	200

- c. Kolom yang sudah terpenuhi dapat diberi tanda untuk selanjutnya diabaikan.
- d. Alokasi selanjutnya adalah pada sel kosong terdekat dengan memperhatikan keseimbangan antara permintaan dan persediaan
- e. Ulangi langkah b hingga d.

2. Metode Biaya Terkecil (Least Cost Method)

Prinsip dari metode ini adalah pemberian prioritas pengalokasian pada sel yang mempunyai biaya terendah. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

- a. Tampilkan persoalan atau alokasikan semua data yang ada ke dalam matriks transportasi. Dengan c_{ij} merupakan biaya transpor dan x_{ij} merupakan barang yang diangkut seperti pada Tabel 1.
- b. Identifikasi biaya pada setiap sel dan carilah biaya yang terendah. Alokasikan unit sebanyak mungkin pada sel dengan biaya terendah tersebut. Bila terdapat lebih dari satu sel biaya terendah dengan nominal yang sama, pilih salah satu dari sel tersebut dengan unit penawaran yang memungkinkan paling banyak dikirim.
- c. Sel-sel yang sudah tidak memungkinkan untuk diberi beban karena sudah terpenuhi dapat diberikan tanda untuk selanjutnya diabaikan.
- d. Ulangi langkah b dan c hingga semua baris permintaan dan kolom penawaran telah habis.

Dibandingkan dengan aturan metode sudut barat laut, metode biaya terendah dinilai lebih kalkulatif karena memperhitungkan nilai terendah, yakni dalam kasus ini nilai yang lebih rendah itu kemungkinan akan mencerminkan keuntungan yang didapat lebih besar. Namun, demikian tidak dapat diambil kesimpulan umum bahwa metode biaya terendah selalu lebih baik dibandingkan dengan metode sudut barat laut dalam menentukan alokasi beban.

3. Metode Aproksimasi Vogel (Vogel's Approximation Method – VAM).

Metode ini selalu memberikan solusi awal yang lebih baik dibanding metode sudut barat laut dan metode biaya terkecil. Kenyataannya, pada beberapa kasus solusi awal yang diperoleh melalui metode ini akan menjadi optimum. Metode ini melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan penalti (*opportunity cost*) dalam memilih sel untuk suatu alokasi.

Adapun langkah-langkah dalam menentukan solusi fisibel awal menggunakan metode ini adalah :

- Alokasikan semua data yang ada ke dalam matriks transportasi. Dengan c_{ij} merupakan biaya transpor dan x_{ij} merupakan barang yang diangkut seperti pada Tabel 1.
- Hitung penalti untuk setiap baris dan kolom. Penalti tersebut diperoleh dengan cara menentukan selisih antara biaya paling kecil dan biaya terkecil kedua dari setiap baris dan kolom pada matriks.
- Pilih baris atau kolom dengan nilai terbesar dari semua biaya penalti yang telah ditentukan. Tandai sel yang tidak memungkinkan lagi untuk dialokasikan karena telah terpenuhi. Ketika terdapat baris atau kolom yang telah ditandai, maka biaya penalti baris atau kolom tersebutpun telah selesai diproses.
- Tentukan kembali perbedaan (selisih) biaya penalti pada langkah b untuk kolom dan baris yang belum terisi. Lanjutkan ke langkah c sampai dengan langkah d.
- Ulangi langkah d sampai semua kolom dan baris teralokasi.
- Setelah semua kolom dan baris selesai teralokasi, hitung biaya transportasi secara keseluruhan.

Teknologi komputer yang semakin berkembang dengan banyak munculnya perangkat lunak (software) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah riset operasi. Program Solver merupakan program add-in tambahan Microsoft Excel. Solver ini dapat digunakan untuk analisis bagaimana-jika. Solver juga dapat digunakan untuk menemukan nilai optimal (maksimum atau minimum) (Dwijanto, 2008).

2. Metodologi Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Mengkaji proses pengiriman beras perum bulog divre Lampung.
- Melakukan perhitungan manual menggunakan metode sudut barat laut, metode biaya terkecil dan metode pendekatan vogel.
- Melakukan perhitungan menggunakan software solver pada Microsoft excel.
- Mengintepretasi semua hasil perhitungan.
- Membandingkan hasil perhitungan manual maupun dengan software sehingga diketahui minimum biaya pengiriman beras perum bulog divre Lampung.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data biaya pengiriman beras bulan Juli 2018 dengan keterangan untuk semua tabel angka yang ditebali merupakan biaya pengiriman (Bulog, 2018).

Tabel 3. Biaya Pengiriman Beras Bulan Juli 2018

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	268,600	175,500	206,200	145,000	1,324,880
GBB Garuntang	281,500	145,000	206,200	150,000	4,294,965
GBM Rantai Tijing	230,000	164,000	320,000	180,000	2,632,730
Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000	500,000	250,000	

Dari data tersebut dapat dilihat bahwa beras tersebut akan diangkut dan dipasarkan antara lain ke lampung utara, lampung selatan, menggala dan lampung tengah. Adapun gudang yang ada di divre lampung yaitu GBM Campang Raya, GBB Garuntang dan GBM Rantai Tijing. Jika dilihat pada Tabel 1. dapat diketahui bahwa biaya pengiriman beras paling besar yaitu dari GBM Rantai Tijing ke Menggala sebesar Rp 320.000, sedangkan biaya pengiriman barang terkecil yaitu GBB Garuntang ke Lampung Selatan dan dari GBM Campang Raya ke Lampung Tengah sebesar Rp 145.000.

Dalam mengerjakan solusi awal layak, pertama harus dilihat jumlah permintaan dan ketersediaan harus sama. Jika nilainya berbeda, maka diperlukan dummy. Dummy didapatkan dari pengurangan jumlah ketersediaan dan permintaan. Sehingga dalam data pengiriman beras pada bulan Juli 2018.

Diketahui jumlah ketersediaan adalah sebesar 8.252.575 Kg dan jumlah pada permintaan adalah 2.250.000 Kg. Maka di dapatkan dummy dari selisih permintaan dan ketersediaan adalah 6.002.575 Kg. Jika

nilai dummy telah didapatkan, maka dapat dimasukkan ke dalam tabel, dengan nilai biaya dummy adalah 0 (nol). Seperti pada tabel berikut:

Tabel 4. Solusi awal layak dengan dummy

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	<i>268,600</i>	<i>175,500</i>	<i>206,200</i>	<i>145,000</i>	<i>0</i>	1,324,880
GBB Garuntang	<i>281,500</i>	<i>145,000</i>	<i>206,200</i>	<i>150,000</i>	<i>0</i>	4,294,965
GBM Rantai Tijing	<i>230,000</i>	<i>164,000</i>	<i>320,000</i>	<i>180,000</i>	<i>0</i>	2,632,730
Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000	500,000	250,000	0	

Layak tidaknya solusi awal dipenuhi jika jumlah sel yang terisi (basis) sama dengan $5+3-1=7$. Jumlah sel basis pada solusi awal layak pada Tabel 4. adalah 7 (tujuh).

3. Hasil dan Pembahasan

Langkah yang pertama setelah didapat Tabel 4. yaitu mengisi sel kosong yang terletak paling kiri atas (sudut barat laut). Jika permintaan telah dipenuhi maka beri tanda silang pada kolom permintaan. Apabila suplai atau ketersediaan masih terdapat nilainya, maka dapat bergeser ke sel sebelah kanan dari sel pertama tadi. Seperti tabel – tabel berikut:

Table 5. Metode sudut barat laut iterasi 1

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	<i>268,600</i> 1000000	<i>175,500</i>	<i>206,200</i>	<i>145,000</i>	<i>0</i>	1324880- 1000000=324880
GBB Garuntang	<i>281,500</i> X	<i>145,000</i>	<i>206,200</i>	<i>150,000</i>	<i>0</i>	4,294,965
GBM Rantai Tijing	<i>230,000</i> X	<i>164,000</i>	<i>320,000</i>	<i>180,000</i>	<i>0</i>	2,632,730
Permintaan Pasar (KG)	X	X	X	X	X	

Selanjutnya dengan langkah yang sama, hingga didapat tabel sebagai berikut

Tabel 6. Hasil metode sudut barat laut

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	<i>268,600</i> 1000000	<i>175,500</i> 324880	<i>206,200</i> X	<i>145,000</i> X	<i>0</i> X	X
GBB Garuntang	<i>281,500</i> X	<i>145,000</i> 175120	<i>206,200</i> 500000	<i>150,000</i> 250000	<i>0</i> 3369845	X
GBM Rantai Tijing	<i>230,000</i> X	<i>164,000</i> X	<i>320,000</i> X	<i>180,000</i> X	<i>0</i> 2632730	X
Permintaan Pasar (KG)	X	X	X	X	X	

Maka dapat dilihat biaya pengiriman beras dari solusi awal layak dengan metode sudut barat laut di atas adalah jumlah pengiriman beras dari GBM Campang Raya ke Lampung Utara sebanyak 1.000.000 Kg dan ke Lampung Selatan sebanyak 324.880 Kg. Jumlah pengiriman beras dari GBB Garuntang ke Lampung Selatan sebanyak 175.120 Kg, ke Menggala sebanyak 500.000 Kg dan ke Lampung Tengah adalah 250.000 Kg. Jumlah Dummy GBB Garuntang adalah 3.369.845 Kg dan jumlah dummy GBM Rantai Tijing adalah 2.632.730 Kg. Maka jumlah biaya pengiriman beras adalah $(1.000.000 \times 268.600) + (324.880 \times 175.500) + (175.120 \times 145.000) + (500.000 \times 206.200) + (250.000 \times 150.000) + (3.369.845 \times 0) + (2.632.730 \times 0) = \text{Rp } 491.608.840.000,-$.

Maka langkah selanjutnya yaitu isi sel pada matriks dengan mempertimbangkan biaya pengiriman, yang dimulai dengan pemilihan biaya paling minimum dari sel-sel matriks. Pada sel dengan ongkos paling kecil tersebut dapat diisi nilai permintaan terkecil diantara nilai permintaan dan ketersediaan. Jika permintaan telah dipenuhi maka pada kolom permintaan diberi tanda silang. Apabila suplai masih terdapat nilainya, maka dapat bergeser pada sel sebelah kanan dari sel sebelumnya. Seperti tabel berikut:

Tabel 7. Metode Biaya Terkecil iterasi 1

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	268,600	175,500	206,200	145,000	0	1,324,880
GBB Garuntang	281,500	145,000 500,000	206,200	150,000	0	4,294,965- 500,000=3,794,965
GBM Rantai Tijang	230,000	164,000 X	320,000	180,000	0	2,632,730
Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000- 500,000=0	500,000	250,000	6,002,575	

Langkah selanjutnya sama dengan teknik sebelumnya pada Tabel 5. Sehingga didapat tabel sebagai berikut:

Tabel 8. Hasil Metode Biaya Terkecil

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	268,600 X	175,500 X	206,200 500,000	145,000 250,000	0 574,880	574,880- 574,880=0
GBB Garuntang	281,500 X	145,000 500,000	206,200 X	150,000 X	0 3,794,965	3,794,965- 3,794,965=0
GBM Rantai Tijang	230,000 1,000,000	164,000 X	320,000 X	180,000 X	0 1,632,730	1,632,730- 1,632,730=0
Permintaan Pasar (KG)	X	X	X	X	6,002,575	

Maka dapat dilihat biaya pengiriman beras dari solusi awal dengan metode ongkos terkecil di atas adalah jumlah pengiriman beras dari GBM Campang Raya ke Menggala sebanyak 500.000 Kg dan ke Lampung Tengah sebanyak 250.000 Kg. Jumlah pengiriman beras dari GBB Garuntang ke Lampung Selatan sebanyak 500.000 Kg. Jumlah pengiriman beras dari GBM Rantai Tijang ke Lampung Utara sebanyak 1.000.000 Kg dan jumlah dummy GBM Campang Rayasebanyak 574.880 Kg, jumlah dummy GBB Garuntang adalah 3.794.965 Kg, jumlah dummy GBM Rantai Tijang adalah 1.632.730 Kg.

Maka jumlah biaya pengiriman beras adalah

$$(500.000 \times 206.200) + (250.000 \times 145.000) + (500.000 \times 145.000) + (1.000.000 \times 230.000) + (574.880 \times 0) + (3.794.965 \times 0) + (1.632.730 \times 0) = \text{Rp } 441.850.000.000,-$$

Dengan menggunakan Tabel 4. maka selanjutnya, dimulai dengan menghitung 'penalti' yang didapat dengan cara menghitung perbedaan ongkos dari ruas sel terkecil pada masing-masing baris dan kolom. Seperti tabel berikut:

Tabel 9. Metode Pendekatan Vogel iterasi 1

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	268,600 X	175,500	206,200	145,000	0	1,324,880 30000
GBB Garuntang	281,500 X	145,000	206,200	150,000	0	4,294,965 5000

GBM Rantai Tijing	230,000 1000000	164,000	320,000	180,000	0	2632730- 1000000=163 2730	16000
Permintaan Pasar (KG)	1000000- 1000000=0	500,000	500,000	250,000	6,002,575		
	38600	19000	0	5000			

Setelah itu dapat ditentukan kolom atau baris yang mempunyai nilai penalti terbesar, kemudian dapat ditentukan sel yang mempunyai ongkos terkecil. Jika sel yang tersisa dua maka tidak perlu menghitung penalti, tetapi dapat diisi dengan nilai yang tersedia. Pada kolom atau baris yang telah terpenuhi nilainya diberi tanda silang. Selanjutnya dapat ditentukan ongkos terkecil dari sel-sel tersebut.

Tabel 10. Metode Pendekatan Vogel iterasi 3

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)	
GBM Campang Raya	268,600 X	175,500 X	206,200	145,000 250000	0	1324880- 250000=1074880	30700
GBB Garuntang	281,500 X	145,000 X	206,200	150,000 X	0	4,294,965	61200
GBM Rantai Tijing	230,000 1000000	164,000 500000	320,000	180,000 X	0	1,632,730	156000
Permintaan Pasar (KG)	X 0	X 19000	500,000 0	X 5000	6,002,575		

Mengacu pada teknik penyelesaian Tabel 9. dan Tabel 10. Diperoleh hasil pada Tabel 11. berikut

Tabel 11. Hasil Metode Pendekatan Vogel

Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
GBM Campang Raya	268,600 X	175,500 X	206,200 X	145,000 250000	0 1074880	1074880- 1074880=0
GBB Garuntang	281,500 X	145,000 X	206,200 500000	150,000 X	0 3794965	379465- 3794965=0
GBM Rantai Tijing	230,000 1000000	164,000 500000	320,000 X	180,000 X	0 1632730	1632730- 1632730=0
Permintaan Pasar (KG)	X	X	X	X	6002575- 6002575=0	

Demikian solusi awal yang diperoleh sudah layak. Maka dapat dilihat pemakaian sumber energi dari solusi awal dengan metode pendekatan vogel di atas adalah Jumlah pengiriman beras dari GBM Campang Raya ke Lampung Tengah sebanyak 250.000 Kg. Jumlah pengiriman beras dari GBB Garuntang ke Menggala sebanyak 500.000 Kg. Jumlah pengiriman beras dari GBM Rantai Tijing ke Lampung Utara sebanyak 1.000.000 Kg dan ke Lampung Selatan sebanyak 500.000 Kg. Jumlah dummy GBM Campang Raya sebanyak 1.074.880 Kg. Jumlah dummy GBB Garuntang sebanyak 3.794.965 Kg. Jumlah dummy GBM Rantai Tijing sebanyak 1.132.730 Kg. Maka jumlah pengiriman beras adalah $(250.000 \times 145.000) + (500.000 \times 206.200) + (1.000.000 \times 230.000) + (500.000 \times 164.000) + (1.074.880 \times 0) + (3.794.965 \times 0) + (1.132.730 \times 0) = \text{Rp}451.350.000.000,-$.

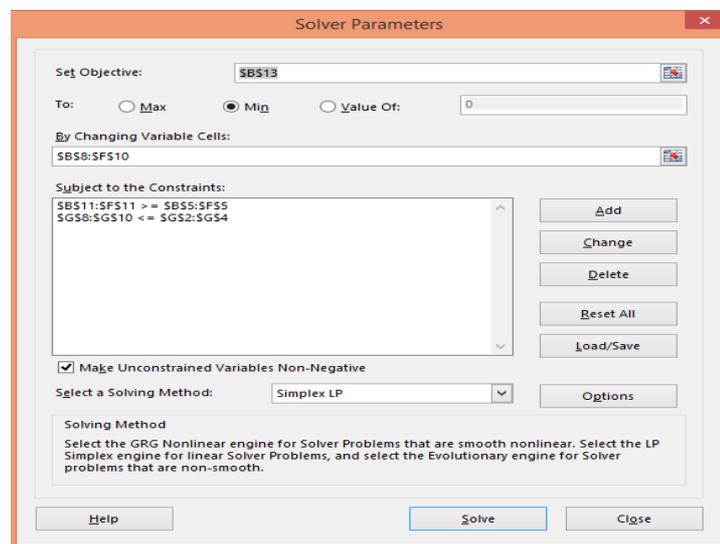
Penyelesaian masalah transportasi dengan solver maka buat Tabel 4. dan *copy* tabel tersebut dibawah Tabel 4. pada lembar Microsoft excel, lalu ubah isi sel tabel baru dengan nilai nol (0) seperti gambar berikut:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersediaan Gudang (KG)
2	GBM Campang Raya	268,600	175,500	206,200	145,000	0	1,324,880
3	GBB Garuntang	281,500	145,000	206,200	150,000	0	4,294,965
4	GBM Rantai Tijing	230,000	164,000	320,000	180,000	0	2,632,730
5	Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000	500,000	250,000	6,002,575	8252575
6							
7	Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Banyaknya barang yang dikirim
8	GBM Campang Raya	0	0	0	0	0	0
9	GBB Garuntang	0	0	0	0	0	0
10	GBM Rantai Tijing	0	0	0	0	0	0
11	Permintaan Pasar (KG)	0	0	0	0	0	
12							
13	BIAYA		0				

Gambar 1. Matriks Transportasi Awal

Jadi dalam hal pengiriman barang dari satu gudang ke beberapa daerah ini G8 ditulis dengan “=SUM(B8:F8)”. Sel G9 ditulis dengan formula “=SUM(B9:F9)” dan G10 ditulis dengan “=SUM(B10:F10)”. Selanjutnya banyaknya pengiriman barang dari beberapa gudang ke satu daerah B11 ditulis dengan formula “=SUM(B8:B10)”, untuk sel C11 ditulis dengan formula “=SUM(C8:C10)”, sel D11 ditulis dengan “=SUM(D8:D10)”, sel E11 ditulis dengan “=SUM(E8:E10)”, dan sel F11 ditulis dengan formula “=SUM(F8:F10)”.

Biaya pengiriman merupakan kelipatan yang seletak antara banyaknya barang yang dikirim dengan biaya satuan pengiriman. Oleh karena itu pada sel B13 kita tuliskan formula “=SUMPRODUCT(B2:F4,B8:F10)”. Setelah persiapan pada lembar excel selesai, saatnya menjalankan Solver, dengan langkah klik DATA lalu pilih “solver” maka akan keluar menu solver sebagai berikut :



Gambar 2. Menu Solver

Hasil perhitungan total biaya diletakkan pada B13, dan ini tidak diubah ke sel lain, oleh karena itu semua hasil kita tetapkan dengan menambah tanda \$ pada tempat perumusan hasil atau sumber, sehingga menjadi \$B\$13.

Masalah yang akan diselesaikan adalah masalah meminimumkan biaya transportasi sehingga pada equal to pilih min. Selanjutnya pada *By Changing cells* isi bagian kelompok sel yang merupakan bagian variabel. *By Changing cells* ini adalah untuk menentukan banyaknya barang pada sistem transportasi, oleh karena itu isikan B8 Sampai F10 dengan tulis \$B\$8:\$F\$10.

Subject to the constraints merupakan syarat pembatas. Pada pencarian solusi awal layak ini memiliki dua syarat pembatas yaitu pembatas permintaan dan pembatas ketersediaan barang. Oleh karena itu pembatas permintaan yaitu permintaan yang harus dipenuhi, jadi permintaan kurang dari atau sama dengan pengiriman barang, sehingga $Q_{ij} \leq Q_{ij}^*$. Sedangkan pembatas ketersediaan menyatakan bahwa barang yang dikirim tidak lebih dari ketersediaan barang digudang maka $Q_{ij} \leq Q_{ij}^*$, dengan memilih atau mengisikan keterangan berikut pada menu solver dan mengisi options asumsi linier dan non-negative. Maka setelah klik solve akan diperoleh hasil seperti gambar berikut :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Ketersedian Gudang (KG)
2	GBM Campang Raya	268,600	175,500	206,200	145,000	0	1,324,880
3	GBB Garuntang	281,500	145,000	206,200	150,000	0	4,294,965
4	GBM Rantai Tijang	230,000	164,000	320,000	180,000	0	2,632,730
5	Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000	500,000	250,000	6,002,575	8252575
6							
7	Gudang	Lampung Utara	Lampung Selatan	Menggala	Lampung Tengah	DUMMY	Banyaknya barang yang dikirim
8	GBM Campang Raya	0	0	500,000	250,000	574,880	1,324,880
9	GBB Garuntang	0	500,000	0	0	3,794,965	4,294,965
10	GBM Rantai Tijang	1,000,000	0	0	0	1,632,730	2,632,730
11	Permintaan Pasar (KG)	1,000,000	500,000	500,000	250,000	6,002,575	
12							
13	BIAYA	4.4185E+11					

Gambar 3. Hasil perhitungan menggunakan solver

Beras dari GBM Rantai Tijang akan dikirim ke Lampung Utara sebanyak 1.000.000 Kg, dari GBB Garuntang akan dikirim ke Lampung selatan sebanyak 500.000 Kg dan dari GBM Campang raya ke Menggala akan dikirim sebanyak 500.000 Kg dan ke Lampung Tengah sebanyak 250.000 Kg. Hasil akhir dari software solver ini muncul pada sel B13 sebanyak “4.4185E+11” ini menunjukkan bahwa biaya pengiriman sebesar Rp 441.850.000.000.

4. Kesimpulan

Berdasarkan data dan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan :

1. Jumlah biaya pengiriman beras paling besar yaitu dari GBM Rantai Tijang ke Menggala sebesar Rp 320.000, sedangkan biaya pengiriman beras terkecil yaitu GBB Garuntang ke Lampung Selatan dan dari GBM Campang Raya ke Lampung Tengah sebesar Rp 145.000.
2. Solusi biaya yang paling layak untuk memperoleh biaya terkecil yaitu menggunakan metode biaya terkecil (*Least cost method*) dan dengan menggunakan software solver menghasilkan biaya Rp 411.850.000.000,-
3. Beras dari GBM Rantai Tijang akan dikirim ke Lampung Utara sebanyak 1.000.000 Kg, dari GBB Garuntang akan dikirim ke Lampung selatan sebanyak 500.000 Kg, dari GBM campang raya ke Menggala akan dikirim sebanyak 500.000 Kg dan dari GBM Camping raya ke Lampung Tengah sebanyak 250.000 Kg.

5. Daftar Pustaka

- Bulog. (2018). *Data pengiriman Beras perum Bulog Divre Lampung*. Perum Bulog Divre Lampung, Lampung.
- Dwijanto. (2008). *Program Linier berbantuan Komputer: Lindo, Lingo dan Solver*. Universitas Negeri Semarang Press, Semarang.
- Eyverson Ruauw. (2015). *Kajian Distribusi Pangan Pokok Beras Di Kabupaten Kepulauan Talaud*. ASE – Volume 11 Nomor 1: 58 – 68.
- Hotniar, S. (2005). *Seri Teknik Riset Operasional: Pemrograman Linear*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Kasmina, dkk. (2008). *Matematika: Program Keahlian Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian untuk SMK dan MAK Kelas X*. Erlangga, Jakarta.

Mulyono, S. (1999). *Operations Research Edisi Kedua*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

Suryana, A. (2003). *Kapita Selekta, Evolusi Pemikiran Kebijakan Ketahanan Pangan*. BPFE-Yogyakarta, Yogyakarta.

SEGMENTASI KABUPATEN/ KOTA BERDASARKAN KARAKTERISTIK PENDUDUK LANJUT USIA PROVINSI JAWA TENGAH TAHUN 2017

Agustina Riyanti¹, Tri Rena Maya Sari¹

¹BPS Kabupaten Pesawaran
Penulis Korespondensi : justafity@gmail.com¹

Abstrak

Salah satu indikator keberhasilan pembangunan terutama di bidang kesehatan dan kesejahteraan adalah kondisi sosial masyarakat yang semakin membaik dan usia harapan hidup yang semakin meningkat. Meningkatnya usia harapan hidup masyarakat menyebabkan jumlah penduduk usia lanjut semakin bertambah. Provinsi Jawa Tengah merupakan provinsi dengan persentase penduduk lanjut usia terbesar kedua di Indonesia. Penelitian ini bertujuan untuk mengelompokkan kabupaten/ kota di Provinsi Jawa Tengah berdasarkan karakteristiknya. Karakteristik yang akan digunakan sebagai dasar pengelompokan adalah angka kesakitan, TPAK, dan Status lanjut usia sebagai kepala rumah tangga. Analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan analisis gerombol dengan metode K-means dilanjutkan dengan uji manova. Pengelompokan wilayah di Provinsi Jawa Tengah Pada Tahun 2017 berdasarkan karakteristik lansia menghasilkan 3 kelompok berbeda. Kelompok wilayah pertama merupakan wilayah dengan karakteristik angka kesakitan yang tinggi, kelompok kedua merupakan wilayah dengan angka kesakitan dan TPAK yang paling rendah dengan status KRT yang paling banyak, dan wilayah ketiga merupakan wilayah dengan karakteristik lansia yang berstatus KRT paling sedikit dengan TPAK paling tinggi

Kata kunci: *K-Means, Lanjut Usia, Pengelompokan*

1. Pendahuluan

Salah satu indikator keberhasilan pembangunan terutama di bidang kesehatan dan kesejahteraan adalah kondisi sosial masyarakat yang semakin membaik dan usia harapan hidup yang semakin meningkat. Meningkatnya usia harapan hidup masyarakat menyebabkan jumlah penduduk usia lanjut semakin bertambah. Undang-undang Nomor 13 tahun 1998 tentang Kesejahteraan Lanjut usia mendefinisikan bahwa lanjut usia adalah seseorang yang telah mencapai usia enam puluh (60) tahun ke atas.

Badan Pusat Statistik (BPS) menyebutkan bahwa berdasarkan proyeksi penduduk hasil Sensus Penduduk tahun 2010, Indonesia akan mencapai struktur penduduk tua setelah tahun 2020. Hasil Susenas (Survei Sosial Ekonomi Nasional) tahun 2017 menunjukkan bahwa terdapat lima provinsi dengan persentase lanjut usia lebih dari 10 persen. Kelima provinsi tersebut adalah Daerah Istimewa Yogyakarta (13,90%), Jawa Tengah (12,46%), Jawa Timur (12,16%), Bali (10,79%), dan Sulawesi Barat (10,37%).

Provinsi Jawa Tengah sebagai provinsi dengan persentase penduduk lanjut usia terbesar kedua di Indonesia tentunya memerlukan informasi tentang karakteristik lanjut usia agar dapat diambil langkah-langkah kebijakan berkaitan dengan lanjut usia dengan informasi yang ada. Penelitian terkait lanjut usia dan terkait pengelompokan wilayah telah dilakukan oleh berbagai pihak. Jasmira, Susetyo, dan Aidi pada tahun 2015 melakukan penelitian terkait pengelompokan provinsi di Indonesia berdasarkan kriteria lanjut usia telantar dengan menggunakan analisis gerombol. Hasil penelitian menyebutkan bahwa provinsi di Indonesia terbagi ke dalam 4 kelompok dengan karakteristik lanjut usia telantar yang berbeda-beda pada masing-masing kelompok. Jumeilah, dkk (2017) melakukan klusterisasi penduduk lanjut usia sumatera selatan menggunakan algoritma *K-Modes* yang menghasilkan 4 cluster.

Peningkatan jumlah lanjut usia di Provinsi Jawa Tengah memerlukan penanganan dan pelayanan terhadap lanjut usia. Kondisi lanjut usia di kabupaten/ kota di wilayah Provinsi Jawa Tengah memiliki karakteristik yang beragam. Penelitian ini bertujuan untuk mengelompokkan kabupaten/ kota di Provinsi Jawa Tengah berdasarkan karakteristiknya. Karakteristik yang akan digunakan sebagai dasar pengelompokan adalah angka kesakitan, TPAK, dan Status lanjut usia sebagai kepala rumah tangga.

2. Bahan dan Metode

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari publikasi BPS Provinsi Jawa Tengah yaitu publikasi Statistik Lansia 2017. Publikasi tersebut berdasarkan dari hasil pengolahan Susenas dan Sakernas tahun 2017. Unit observasi pada penelitian ini adalah 35 kabupaten/ kota di Provinsi Jawa Tengah. Variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Nama Variabel
(1)	(2)
x_1	Lanjut Usia yang berstatus sebagai Kepala Rumah Tangga (KRT)
x_2	Angka Kesakitan
x_3	Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK)

Angka kesakitan dalam penelitian ini adalah persentase lansia yang mengalami sakit. Angka kesakitan merupakan salah satu indikator yang digunakan untuk mengukur derajat kesehatan. TPAK (Tingkat Partisipasi angkatan kerja) lansia dalam penelitian ini terbatas untuk usia 60 tahun ke atas. Angkatan kerja lansia yang dimaksud adalah penduduk usia 60 tahun ke atas yang selama seminggu sebelum pencacahan mempunyai pekerjaan, baik bekerja maupun sementara tidak bekerja, ataupun yang termasuk pengangguran. Keberadaan lansia memegang andil yang penting, beberapa diantaranya masih dipercaya dan mengemban amanah sebagai kepala rumah tangga (KRT) yang bertanggung jawab secara sosial ataupun ekonomi terhadap anggota rumah tangganya.

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis gerombol. Analisis gerombol merupakan salah satu teknik statistik yang bertujuan untuk mengelompokkan objek ke dalam suatu kelompok sedemikian objek yang berada dalam satu kelompok akan memiliki kesamaan yang tinggi dibandingkan dengan kelompok yang lainnya. Analisis gerombol terdiri metode hirarki dan non hirarki. Metode hirarki merupakan metode pengelompokan yang terstruktur dan bertahap berdasarkan kemiripan sifat antar objek. Kemiripan sifat ditentukan dari kedekatan jarak *Euclidean* atau jarak *mahalanobis*. Metode non hirarki merupakan metode yang dipakai ketika jumlah kelompok sudah ditentukan dan biasanya metode ini digunakan untuk pengelompokan data yang berukuran besar.

Salah satu metode clustering non hirarki adalah dengan metode *k-means*. Metode *K-means* dimulai dengan proses penentuan jumlah kelompok dan penentuan centroid di masing-masing kelompok terlebih dahulu. Langkah selanjutnya adalah dengan melakukan perhitungan jarak pada setiap objek dengan setiap *centroid*. Proses tersebut terus berulang sampai tidak terjadi pemindahan objek ke kelompok lainnya. Metode ini merupakan salah satu metode pengelompokan yang paling banyak digunakan karena lebih sederhana dan mudah dalam pengimplemantasian.

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis gerombol. Analisis gerombol merupakan salah satu teknik statistik yang bertujuan untuk mengelompokkan objek ke dalam suatu kelompok sedemikian objek yang berada dalam satu kelompok akan memiliki kesamaan yang tinggi dibandingkan dengan kelompok yang lainnya. Analisis gerombol terdiri metode hirarki dan non hirarki. Metode hirarki merupakan metode pengelompokan yang terstruktur dan bertahap berdasarkan kemiripan sifat antar objek. Kemiripan sifat ditentukan dari kedekatan jarak *Euclidean* atau jarak *mahalanobis*. Metode non hirarki merupakan metode yang dipakai ketika jumlah kelompok sudah ditentukan dan biasanya metode ini digunakan untuk pengelompokan data yang berukuran besar.

Salah satu metode *clustering* non hirarki adalah dengan metode *k-means*. Metode *K-means* dimulai dengan proses penentuan jumlah kelompok dan penentuan centroid di masing-masing kelompok terlebih dahulu. Langkah selanjutnya adalah dengan melakukan perhitungan jarak pada setiap objek dengan setiap *centroid*. Proses tersebut terus berulang sampai tidak terjadi pemindahan objek ke kelompok lainnya. Metode ini merupakan salah satu metode pengelompokan yang paling banyak digunakan karena lebih sederhana dan mudah dalam pengimplemantasian.

Manova merupakan teknik analisis statistik yang digunakan untuk menguji kesamaan beberapa variabel dari beberapa populasi secara sekaligus. Analisis manova bertujuan untuk mengetahui apakah ada perbedaan yang nyata pada beberapa variabel antara beberapa populasi. Sebelum melakukan pengujian Manova dilakukan terlebih dahulu:

a. Uji *multivariate normal*

Pengujian hipotesa asumsi *multivariate normal* adalah sebagai berikut:

H_0 : Data berdistribusi *multivariate normal*

H_1 : Data tidak berdistribusi *multivariate normal*

Pengujian *multivariate normal* yaitu dengan membandingkan d_j^2 dengan nilai tabel *Chi-Square* $\chi_{p;\alpha}^2$.

$$d_j^2 = (x_j - \bar{x})^1 S^{-1} (x_j - \bar{x}), j=1,2,\dots,n \quad (1)$$

dimana:

- N : banyaknya pengamatan
 x_j : Objek pengamatan ke- j
 S^{-1} : Invers matrik kovarians berukuran $p \times p$

b. Uji Bartlett

Uji Bartlett bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat hubungan antara variabel dalam kasus multivariat. Jika variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ independen maka matriks korelasi antar variabel sama dengan matrik identitasnya.

Hipotesis yang digunakan:

$$H_0: \rho = 1$$

$$H_1: \rho \neq 1$$

Statistik uji yang digunakan:

$$\chi^2 = \left[n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right] \text{Ln} |R| \quad (2)$$

H_0 ditolak jika nilai χ^2 hitung $> \chi_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}^2$

c. Uji Homogenitas

Hipotesa yang digunakan adalah

$$H_0: \sum_1 = \sum_2 = \dots = \sum_k$$

$$H_1: \text{minimal satu } \sum_i \neq \sum_j$$

Statistik uji yang digunakan adalah *Box's M* yaitu:

$$-2 \text{Ln} \lambda^* = (n - k) \text{Ln} \left| \frac{W}{(n - k)} \right| - \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \text{Ln} |s_j| \quad (3)$$

$(n_j - 1) / 2$

$$\lambda^* = \frac{\prod_{j=1}^k |s_j|}{\left| \frac{W}{(n - k)} \right|^{(n-k)/2}} \quad (4)$$

Dimana:

- k : banyaknya kelompok
 $W / (n - k)$: Matrik ragam-peragam dalam kelompok gabungan
 s_j : Matrik ragam- peragan kelompok ke- j

Jika $(-2 \text{Ln} \lambda^*) / b \leq F_{v_1, v_2, \alpha}$ maka keputusan tolak H_0 yang berarti bahwa antar kelompok memiliki

matrik ragam-peragan yang sama, dengan α adalah tingkat signifikansi dan v_1 dan v_2 adalah derajat bebas

d. Uji vektor nilai rata-rata

Pengujian terhadap vektor nilai rata-rata antar kelompok dilakukan dengan hipotesa:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1: \text{minimal satu } \mu_i \neq \mu_j$$

Statistik uji yang digunakan adalah Wilk's Lambda (Λ^*) dengan rumus sebagai berikut.

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|B + W|} \quad (5)$$

dimana B dan W masing-masing adalah matrik jumlah kuadrat dan *cross product* antar kelompok dan dalam kelompok dengan derajat bebas $g-1$ dan $\sum n_i - g$.

$$W = \sum_{j=1}^g \sum_{i=1}^{nl} (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ji} - \bar{x}_j)' \quad (6)$$

$$B = \sum_{j=1}^g n_j (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ji} - \bar{x}_j)' \quad (7)$$

dimana:

x_{ji} : vektor pengamatan ke-i pada kelompok j

\bar{x}_j : vektor rata-rata kelompok ke-j

n_j : jumlah individu kelompok pada kelompok ke-j

\bar{x} : vektor rata-rata semua kelompok

nl : jumlah sampel kelompok ke-l

Statistik Wilk's Lambda ini mendekati statistik uji F, jika $\frac{\sum_{j=1}^g n_j - g - 1}{g - 1} \frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\Lambda^*} > F_{(v_1, v_2, \alpha)}$ dimana $v_1 = 2(g - 1)$ dan $v_2 = 2(\sum nl - g - 1)$ maka H_0 ditolak, yang berarti terdapat perbedaan rata-rata antar kelompok.

Model One-Way MANOVA adalah sebagai berikut.

$$Y_{lj} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

dimana $i = 1, 2, \dots, g; j = 1, 2, \dots, nl$

Y_{lj} : nilai pengamatan (respon) dari perlakuan ke-l dan ulangan ke-j

l : grup yang terbentuk

μ : nilai rata-rata umum

τ_i : pengaruh dari perlakuan ke-i terhadap respon

ε_{ij} : pengaruh error yang berdistribusi $N_p(0, \Sigma)$ untuk data multivariat.

Dalam One-way MANOVA, hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0$

H_1 : minimal terdapat satu $\tau_i \neq 0, i=1, 2, \dots, g$

Pillai's Trace, statistik uji ini paling cocok digunakan jika asumsi homogenitas matriks varians-kovarians tidak dipenuhi. Karena statistik uji ini paling robust [6]. Statistik uji Pillai's Trace dirumuskan sebagai:

$$P = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \right) = tr \frac{|W|}{|B + W|} \quad (8)$$

Dimana $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ adalah akar-akar karakteristik dari $(W)^{-1}(B)$

(W) : matriks varians-kovarians error pada MANOVA

(B) : matriks varians-kovarians perlakuan pada MANOVA

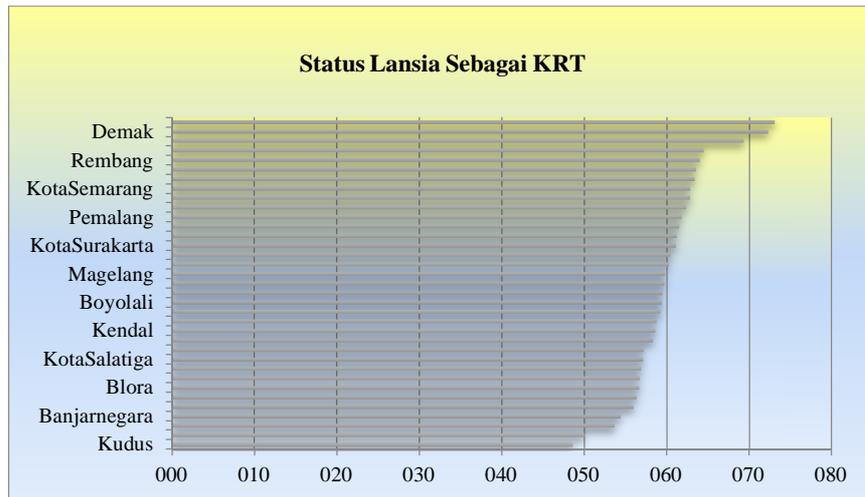
3. Hasil dan Pembahasan

Rata-rata angka kesakitan lanjut usia di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2017 adalah sebesar 25,29. Angka kesakitan lansia laki-laki lebih besar daripada angka kesakitan lansia perempuan. Angka kesakitan lanjut usia tertinggi di Provinsi Jawa Tengah terdapat di Kabupaten Demak yaitu sebesar 36,29. Hal ini berarti bahwa sebanyak 36,29 persen lansia di Kabupaten Demak mengalami keluhan dalam kesehatannya, hal ini bermakna juga bahwa dari 100 lansia, 36 orang lansia mengalami keluhan kesehatan. Tiga Wilayah kabupaten/ kota di Provinsi Jawa Tengah dengan persentase keluhan kesehatan lansia yang terkecil adalah Kabupaten Wonogiri, Kabupaten Sukoharjo, dan Kota Salatiga. Kota Salatiga memiliki angka kesakitan terkecil, yaitu sebesar 15,26. Hal ini berarti bahwa lanjut usia di Kota Salatiga yang mengalami keluhan kesehatan hanya sebesar 15,26 persen dari lansia yang berada di wilayah Kota Salatiga.



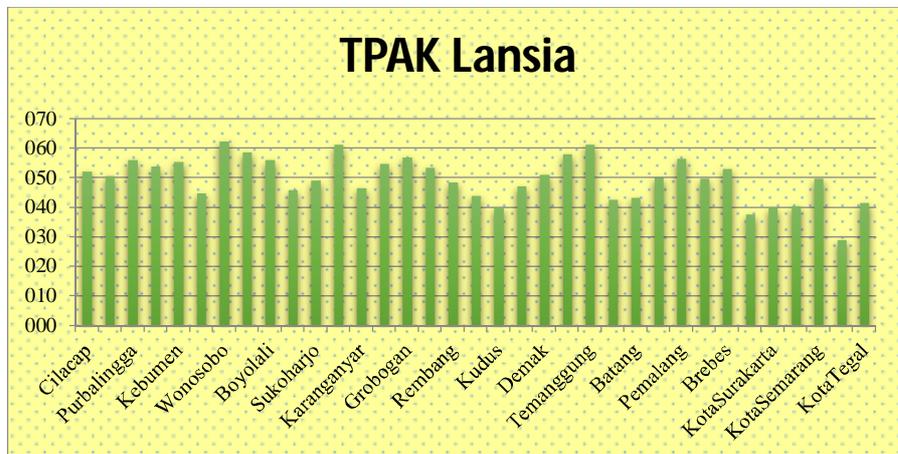
Gambar 1. Diagram Angka Kesakitan Lansia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017

Keberadaan lansia dalam masyarakat masih memegang peranan penting dalam kehidupan rumah tangganya. Hal ini terlihat dari status lansia sebagai KRT. Beberapa diantaranya masih mengemban amanah sebagai KRT yang bertanggung jawab secara sosial dan ekonomi anggota rumah tangganya. Persentase lansia dengan status sebagai KRT 59, 74. Hal ini berarti bahwa sebagian besar lansia di Provinsi Jawa Tengah masih berstatus sebagai kepala rumah tangga. Persentase lansia dengan status sebagai KRT tertinggi berada di Kota pekalongan, yaitu sebesar 73,08%. Persentase terkecil status lansia sebagai KRT terdapat di Kabupaten Kudus, yaitu sebesar 48,59%.



Gambar 2. Hubungan Lanjut Usia Terhadap Kepala Rumah Tangga

Pada tahun 2017, Kabupaten Wonosobo merupakan wilayah dengan TPAK tertinggi di Provinsi Jawa Tengah yaitu sebesar 62,25. Wilayah di Provinsi Jawa Tengah dengan TPAK terendah adalah Kota Pekalongan.



Gambar 3. TPAK Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017

Hasil Pengklasteran dengan metode *K-Means* adalah sebagai berikut:

1) Jumlah Anggota kelompok

Tabel 2. Jumlah Anggota Cluster

Kelompok	Jumlah Anggota Kelompok
(1)	(2)
1	9
2	11
3	15
Jumlah	35

Hasil pengelompokan kabupaten/ kota di Jawa Tengah berdasarkan karakteristik lanjut usia diperoleh 3 kelompok. Kelompok pertama terdiri dari 9 kabupaten/ kota, kelompok kedua terdiri dari 11 kabupaten/ kota, dan kelompok ketiga terdiri dari 15 kabupaten/ kota.

2) Anggota kelompok dan Karakteristik Kelompok

Tabel 3. Kabupaten/ Kota Anggota Kelompok Hasil *Clustering K-Means*

		Kelompok					
1	2			3			
(1)	(2)			(3)			
1 Cilacap	1 Klaten	10 KotaPekalongan	1 Banyumas	10 Grobogan			
2 Purworejo	2 Sukoharjo	11 KotaTegal	2 Purbalingga	11 Blora			
3 Pati	3 Karanganyar		3 Banjarnegara	12 Semarang			
4 Kudus	4 Rembang		4 Kebumen	13 Temanggung			
5 Demak	5 Jepara		5 Wonosobo	14 Pekalongan			
6 Kendal	6 KotaMagelang		6 Magelang	15 Pemalang			
7 Batang	7 KotaSurakarta		7 Boyolali				
8 Tegal	8 KotaSalatiga		8 Wonogiri				
9 Brebes	9 KotaSemarang		9 Sragen				

Karakteristik kelompok pertama yang terbentuk adalah wilayah dengan angka kesakitan yang relatif lebih tinggi dari dua kelompok wilayah lainnya. Wilayah Kelompok pertama terdiri dari 9 kabupaten, yaitu Kabupaten Cilacap, Kabupaten Purworejo, Kabupaten Pati, Kabupaten Kudus, Kabupaten Demak, Kabupaten Kendal, Kabupaten Batang, Kabupaten Tegal, dan Kabupaten Brebes.

Kelompok kedua terdiri dari 11 kabupaten/ kota yaitu Kabupaten Kaltan, Kabupaten Sukoharjo, Kabupaten Karanganyar, Kabupaten Rembang, Kabupaten Jepara, Kota Magelang, Kota Surakarta, Kota Salatiga, dan Kota Semarang, Kota Pekalongan, dan Kota Tegal. Kelompok wilayah kedua memiliki karakteristik lanjut usia dengan angka kesakitan dan TPAK paling rendah, serta lanjut usia dengan status lanjut usia sebagai KRT yang relatif banyak.

Karakteristik kelompok ketiga adalah wilayah dengan TPAK yang relatif tinggi dengan status lanjut usia sebagai KRT yang paling kecil. Kelompok wilayah ketiga terdiri dari 15 kabupaten, yaitu Kabupaten Banyumas, Kabupaten Purbalingga, Kabupaten Banjarnegara, Kabupaten Kebumen, Kabupaten Wonosobo, Kabupaten Magelang, Kabupaten Boyolali, Kabupaten Wonogiri, Kabupaten Sragen, Kabupaten Grobogan, Kabupaten Blora, Kabupaten Semarang, Kabupaten Temanggung, Kabupaten Pekalongan, dan Kabupaten Pemalang.

Tabel 4. Karakteristik Kelompok

Variabel	Kelompok		
	1	2	3
(1)	(2)	(3)	(4)
Status sebagai KRT	60,91	62,72	57,53
Angka Kesakitan	32,29	20,12	23,57
TPAK	46,64	43,11	56,21

Hasil pengujian *multivariate normal* dengan metode mardia (Mardia *skewness* dan mardia *kurtosis*) adalah sebagai berikut:

Tabel 5. Hasil Pengujian Multivariate Normal

Metode Mardia	b	z	p-value
<i>Multivariate skewness</i>	2,39	15,8	0,11
<i>multivariate kurtosis</i>	17,54	1,37	0,17

Hasil pengujian dengan *multivariate skewness* dan *multivariate kurtosis* menunjukkan bahwa nilai *p-value* untuk *multivariate skewness* adalah 0,11 dan *p-value* untuk *multivariate kurtosis* adalah 0,17 dimana $p\text{-value} > \alpha (0,05)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa data pengamatan yang digunakan dalam penelitian ini berdistribusi *multivariatenormal*.

Tabel 6. Hasil Uji Homogenitas dengan Box's M

<i>Box's M</i>		22,085
	<i>Approx.</i>	1,569
	<i>df1</i>	12
F	<i>df2</i>	3365,32
	<i>Sig.</i>	0,093

Hasil pengujian kesamaan matrik ragam peragam menunjukkan bahwa dengan tingkat kepercayaan 95 %, matrik varians- covarians pada variabel status sebagai KRT, angka Kesakitan, dan TPAK adalah sama untuk setiap kelompok wilayah yang terbentuk. Hal ini ditunjukkan dengan nilai signifikansi 0,093 lebih besar dari 0,05. Hal ini berarti asumsi homogenitas antar terpenuhi.

Tabel 7. Hasil Pengujian dengan *Lavene Test*

Variabel	F	df1	df2	Sig.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
status sebagai KRT	1,032	2	32	0,37
angka kesakitan	1,177	2	32	0,32
tpak	2,664	2	32	0,09

Pengujian kesamaan varians-kovarians secara individu juga menunjukkan hasil yang sama. Hal ini terlihat dari nilai signifikansi pada levane test untuk ketiga variabel yang bernilai $>0,05$. Hal ini berarti varians-kovarians pada ketiga variabel tersebut adalah sama untuk setiap kelompok wilayah yang telah terbentuk. Asumsi kesamaan matrik varians-kovarians telah terpenuhi, maka proses analisis Manova dapat dilanjutkan.

Tabel 8. Uji Beda Rata-rata antar kelompok

	<i>Effect</i>	<i>Value</i>	<i>Sig.</i>
	(1)	(2)	(3)
<i>Intercept</i>	<i>Pillai's Trace</i>	1,00	0,00
	<i>Wilks' Lambda</i>	0,00	0,00
	<i>Hotelling's Trace</i>	300,25	0,00
	<i>Roy's Largest Root</i>	300,25	0,00
<i>Grup</i>	<i>Pillai's Trace</i>	1,35	0,00
	<i>Wilks' Lambda</i>	0,10	0,00
	<i>Hotelling's Trace</i>	4,41	0,00
	<i>Roy's Largest Root</i>	2,84	0,00

Nilai signifikansi untuk grup (kelompok) yang diuji dengan pillai's Trace, Wilk's Lambda, Hotelling's Trace, dan Roy's Largest root menunjukkan nilai $0,00 < 0,05$. Hal ini berarti bahwa antara kelompok pertama, kedua, dan ketiga terdapat perbedaan karakteristik lanjut usia untuk status sebagai KRT, angka kesakitan, dan TPAK.

Tabel 9. Test of Between-Subjects Effects

	<i>Source</i>	<i>Type III Sum of Squares</i>	<i>df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F</i>	<i>Sig.</i>
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
<i>Corrected Model</i>	status sebagai KRT	180.000 ^a	2	90,00	4,09	0,03
	angka kesakitan	768.547 ^b	2	384,27	32,47	0,00
	tpak	1198.882 ^c	2	599,44	25,50	0,00
<i>Intercept</i>	status sebagai KRT	122146,33	1	122146,33	5546,45	0,00
	angka kesakitan	21485,42	1	21485,42	1815,41	0,00
	tpak	79288,28	1	79288,28	3373,23	0,00
<i>Grup</i>	status sebagai KRT	180,00	2	90,00	4,09	0,03
	angka kesakitan	768,55	2	384,27	32,47	0,00
	tpak	1198,88	2	599,44	25,50	0,00
<i>Error</i>	status sebagai KRT	704,72	32	22,02		
	angka kesakitan	378,72	32	11,84		
	tpak	752,16	32	23,51		
<i>Total</i>	status sebagai KRT	127015,55	35			
	angka kesakitan	22548,86	35			
	tpak	88167,79	35			
<i>Corrected Total</i>	status sebagai KRT	884,72	34			
	angka kesakitan	1147,27	34			
	tpak	1951,05	34			

Uji di atas digunakan untuk mengetahui apakah secara individu ketiga variabel tersebut menunjukkan perbedaan antar kelompok wilayah yang terbentuk. Nilai signifikansi pada hasil pengujian memiliki nilai $< 0,05$, variabel status sebagai KRT (0,026), angka kesakitan (0,00), dan TPAK (0,00). Hal ini berarti secara individu ketiga variabel tersebut menunjukkan perbedaan antar kelompok wilayah yang terbentuk.

4. Kesimpulan

Pengelompokan kabupaten/ kota berdasarkan karakteristik lanjut usia di Provinsi Jawa Tengah pada Tahun 2017 menghasilkan tiga kelompok wilayah yang berbeda. Kelompok wilayah pertama merupakan wilayah dengan karakteristik angka kesakitan yang tinggi, kelompok kedua merupakan wilayah dengan angka kesakitan dan TPAK yang paling rendah dengan status KRT yang paling banyak, dan wilayah ketiga

merupakan wilayah dengan karakteristik lansia yang berstatus KRT paling sedikit dengan TPAK paling tinggi. Hasil pengelompokan tersebut menunjukkan bahwa ada perbedaan yang nyata pada variabel status lanjut usia sebagai KRT, angka kesakitan dan TPAK lanjut usia antara kelompok pertama, kedua, dan ketiga.

5. Daftar Pustaka

Badan Pusat Statistik. (2018). *Statistik Penduduk Lanjut Usia 2017*. Badan Pusat Statistik, Jakarta

Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Tengah. (2018). *Profil Lansia Jawa Tengah 2017*. BPS Provinsi Jawa Tengah, Semarang

Jumeilah, F.S., dan Pratama, D. (2017). Klasterisasi Penduduk Lanjut Usia Sumatera Selatan Menggunakan Algoritma K-Modes. *Jurnal Technology Acceptance Model*.8: 85-89.

Jasmina, D. (2015), Analisis Ketelantara Lanjut Usia di Indonesia dengan Metode Biplot dan Gerombol. Tesis. Institut Pertanian Bogor, Bogor.

PENERAPAN METODE *AUTOREGRESSIVE DISTRIBUTED LAG* (ARDL)DALAM MEMODELKAN PERSENTASE PENDUDUK MISKIN TERHADAP TINGKAT PENGANGGURAN TERBUKA DI PROVINSI LAMPUNG PERIODE 2011-2017

Moni Dwi Fenski¹, Nusyirwan¹, Agus Sutrisno¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : monidwifenski@yahoo.com¹

Abstrak

Indonesia merupakan negara dengan sumber daya alam melimpah, namun masih berkutat dalam menyelesaikan permasalahan kemiskinan dan pengangguran. Provinsi Lampung merupakan salah satu provinsi di Indonesia dengan persentase penduduk miskin tertinggi di Pulau Sumatera pada tahun 2008 dan mengalami peningkatan tingkat pengangguran terbuka pada tahun 2006. Kemiskinan dan pengangguran di Provinsi Lampung memiliki hubungan positif. Terlihat ketika terjadi penurunan tingkat kemiskinan Provinsi Lampung diiringi dengan penurunan tingkat pengangguran. Hal ini menunjukkan pembangunan di Provinsi Lampung nampaknya belum begitu berhasil. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui pengaruh persentase penduduk miskin terhadap tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung menggunakan metode Autoregressive Distributed Lag (ARDL). Data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung dalam bentuk data panel yaitu penggabungan dari data deret waktu (time series) periode 2011-2017 dan deret lintang (cross section) sebanyak 15 kabupaten/kota di Provinsi Lampung. Model yang digunakan adalah model Autoregressive Distributed Lag (ARDL) yaitu suatu model regresi yang memasukkan nilai variabel yang menjelaskan nilai masa kini atau nilai masa lalu dari variabel bebas sebagai salah satu variabel penjelas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa tidak terdapat kointegrasi antar variabel dan model yang didapatkan menunjukkan bahwa persentase penduduk miskin berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung.

Kata kunci: *Autoregressive Distributed Lag, ARDL, Kointegrasi, Persentase Penduduk Miskin dan Tingkat Pengangguran Terbuka.*

1. Pendahuluan

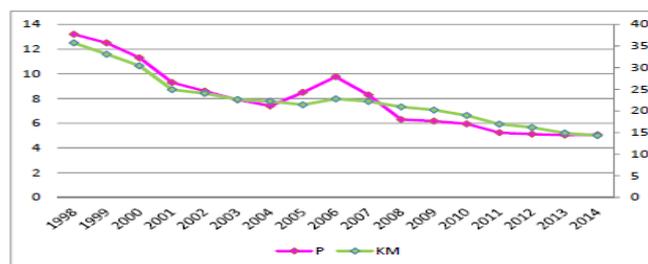
Istilah kemiskinan muncul ketika seseorang atau sekelompok orang tidak mampu mencukupi tingkat kemakmuran ekonomi yang dianggap sebagai kebutuhan minimal dari standar hidup tertentu. Kemakmuran atau kesejahteraan masyarakat dapat ditentukan oleh tingkat pendapatan masyarakat. Pendapatan masyarakat mencapai maksimum apabila tingkat penggunaan tenaga kerja penuh dapat terwujud, sehingga apabila tidak bekerja atau menganggur maka akan mengurangi pendapatan, hal ini akan mengurangi tingkat kemakmuran yang mereka capai dan dapat menimbulkan buruknya kesejahteraan masyarakat (Sukirno, 2001).

Berdasarkan data BPS, perkembangan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dalam beberapa tahun terakhir dapat dilihat pada Gambar 1 dibawah ini. Berdasarkan diagram tersebut nampak bahwa hasil dari upaya penanggulangan kemiskinan di Provinsi Lampung memperlihatkan hasil yang positif. Pada kurun waktu 1998-2014 persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung terus mengalami penurunan, namun hal tersebut belum sepenuhnya berhasil karena persentase kemiskinan di Provinsi Lampung masih diatas 10 persen.



Gambar 1. Persentase Penduduk Miskin Di Provinsi Lampung Pada Tahun 1998-2014 (BPS, 2015)

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa dalam periode 1998-2014 Provinsi Lampung masih mempunyai tingkat kemiskinan yang tinggi yaitu diatas 10 persen. Kesejahteraan masyarakat dapat ditentukan oleh tingkat pendapatan masyarakat. Pendapatan masyarakat dapat mencapai maksimum apabila jumlah pemanfaatan tenaga kerja yang digunakan sesuai dengan jumlah tenaga kerja yang tersedia. Hal ini berarti, semakin tinggi jumlah pengangguran maka akan meningkatkan jumlah penduduk miskin semakin tinggi (Sukirno, 2001).



Gambar 2. Hubungan Kemiskinan dan Pengangguran di Provinsi Lampung Pada Tahun 1998-2014 (BPS,2015)

Berdasarkan gambar 2 diatas, nampak bahwa kemiskinan dan pengangguran di Provinsi Lampung memiliki hubungan yang positif. Terlihat ketika terjadi penurunan tingkat kemiskinan Provinsi Lampung diiringi juga dengan penurunan tingkat pengangguran. Peningkatan pengangguran disebabkan oleh bertambahnya angkatan kerja baru sementara penyerapan tenaga kerja tidak bertambah atau lapangan pekerjaan yang belum memadai sehingga menimbulkan persaingan di antara pencari kerja dan terancam kurangnya kesempatan pemenuhan kesejahteraan yaitu berkurangnya sebagian besar pendapatan yang digunakan untuk membeli kebutuhan sehari-hari. Hal tersebut dikhawatirkan dapat meningkatkan kemiskinan di Provinsi Lampung. Besarnya tingkat pengangguran merupakan cerminan kurang berhasilnya pembangunan di suatu negara. Menurut Sukirno (2001), efek buruk dari pengangguran adalah dapat mengurangi pendapatan masyarakat yang pada akhirnya mengurangi tingkat kemakmuran yang dapat dicapai seseorang.

Penelitian mengenai kemiskinan telah dilakukan oleh Prastyo (2010) yang berjudul “Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Tingkat Kemiskinan (Studi Kasus 35 Kabupaten/Kota Di Jawa Tengah Tahun 2003-2007)”. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengaruh pertumbuhan ekonomi, upah minimum, pendidikan, dan tingkat pengangguran terhadap tingkat kemiskinan di Jawa Tengah dari tahun 2003 hingga tahun 2007. Metode analisis yang digunakan dalam penelitiannya adalah panel data dengan pendekatan efek tetap (*fixed effect model*). Hasil dari penelitian ini adalah variabel pertumbuhan ekonomi berpengaruh negatif signifikan terhadap kemiskinan, upah minimum berpengaruh negatif signifikan terhadap kemiskinan, pendidikan berpengaruh negatif signifikan terhadap kemiskinan, dan tingkat pengangguran berpengaruh positif signifikan terhadap variabel tingkat kemiskinan. Sedangkan penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh Mohsen Bahmani (2010) tentang analisis pengaruh harga saham terhadap nilai tukar di 9 negara berbeda termasuk Indonesia dengan menggunakan metode *Autoregressive Distribution Lag*. Hasil penelitian inimenyatakan bahwa pengaruh antara variabel harga saham baik jangka pendek maupun jangka panjang berbeda beda antara satu negara dengan negara lainnya. Hal ini disebabkan karena adanya faktor lain yang lebih banyak memberikan pengaruh yang signifikan diluar variabel yang diteliti.

Berdasarkan data yang diperoleh dari BPS tentang persentase penduduk miskin terhadap tingkat pengangguran di Provinsi Lampung dan juga di dukung oleh penelitian terdahulu mengenai kemiskinan, membuat penulis tertarik untuk melakukan suatu penelitian dengan mengkaji topik bahasan yang sama yaitu persentase penduduk miskin terhadap tingkat pengangguran namun dengan menggunakan metode yang belum pernah digunakan sebelumnya yaitu metode *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL). Pada penelitian ini, penulis akan fokus pada masalah Pemodelan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 Menggunakan Metode *Autoregressive Distributed*

Lag (ARDL). Pemodelan persentase penduduk miskin dapat diselidiki dengan menggunakan model regresi yang memasukkan nilai variabel yang menjelaskan nilai masa kini atau nilai masa lalu dari variabel bebas sebagai tambahan pada model yang memasukkan nilai lag dari variabel tak bebas sebagai salah satu variabel penjelas disebut *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL) (Gujarati, 1978). Keistimewaan dari model *Autoregressive* dan model distribusi *Lag* adalah model tersebut membuat teoristatis menjadi dinamis karena model regresi yang biasanya mengabaikan pengaruh waktu, melalui model *Autoregressive* dan model distribusi *Lag*, waktu ikut diperhitungkan dan panjang beda kala (*Lag*) diketahui. Sehingga penerapan model *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL) ini, dinilai mampu memberikan gambaran pemodelan yang baik (Gujarati, 2014). Hal inilah yang mendasari penulis untuk mengkaji mengenai penerapan model *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL) pada data Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran di Provinsi Lampung Periode 2011-2017.

Kemiskinan pada umumnya mengacu pada keadaan kekurangan uang dan barang untuk menjamin kelangsungan hidup. Oleh karena itu, seseorang termasuk kategori miskin apabila tidak mampu memenuhi standar minimum kebutuhan pokoknya. Menurut Kuncoro (2003) kemiskinan secara sederhana dapat dibedakan dalam tiga jenis, yaitu kemiskinan absolut, kemiskinan relatif, dan kemiskinan kultural. Menurut BPS, penyebab terjadinya kemiskinan adalah kemiskinan natural, kemiskinan struktural dan kemiskinan kultural. Menurut Sadono Sukirno, pengangguran adalah suatu keadaan dimana seseorang yang tergolong dalam angkatan kerja ingin mendapatkan pekerjaan tetapi belum dapat memperolehnya. Adapun penyebab pengangguran adalah kenaikan jumlah penduduk, tingkat inflasi, besarnya upah dan rendahnya kualitas SDM.

Data deret berkala adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu, untuk menggambarkan suatu kegiatan. Periode data dapat berupa tahun, semester, kuartal bulan, minggu dan di beberapa kasus berupa hari atau jam (Boediono dan Koster, 2004). Data panel merupakan gabungan antara data *cross section* dan *time series*. Data *cross section* adalah data yang dikumpulkan dalam satu waktu terhadap banyak individu. Sedangkan data *time series* adalah data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu terhadap suatu individu (Baltagi, 2005).

Model dinamis merupakan model yang menggambarkan pergerakan variabel dependen yang dipengaruhi nilai dari masa lalu. Terdapat 2 macam model regresi linier yang memperhatikan pengaruh waktu yaitu model *distributed lag* dan model *autoregressive* (Gujarati, 1978).

Model regresi yang memasukkan nilai variabel yang menjelaskan baik nilai masa kini atau nilai masa lalu (*lag*) dari variabel bebas sebagai tambahan pada model yang memasukkan nilai lag dari variabel tak bebas sebagai salah satu variabel penjelas disebut *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL). Model ARDL sangat berguna dalam ekonometrik empiris, karena membuat teori ekonomi yang bersifat statis menjadi dinamis dengan memperhitungkan peranan waktu secara *explisit*. Model ini dapat membedakan respon jangka pendek dan jangka panjang dari variabel tak bebas terhadap satu unit perubahan dalam nilai variabel penjelas. Model ARDL (p, q_1, q_2, \dots, q_k) dapat dinyatakan sebagai berikut (Gujarati, 1995):

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_q X_{t-q} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Stasioner berarti tidak terdapat perubahan drastis pada data. Suatu data dapat dikatakan stasioner apabila pola data tersebut berada pada kesetimbangan disekitar nilai rata-rata yang konstan dan variansi disekitar rata-rata tersebut konstan selama waktu tertentu. Uji stasioner terdiri dari dua macam yaitu stasioner terhadap variansi dan rata-rata (Makridakis, 1999).

Lag optimum merupakan cara untuk memilih seberapa besar jumlah lag yang akan kita gunakan dalam penelitian tersebut. sehingga pemilihan jumlah lag optimum sangat diperlukan agar kita memperoleh hasil yang lebih baik. Penelitian ini akan melihat jumlah *Lag optimum* berdasarkan hasil *lag length criteria VAR*. Hasil lag paling optimum ditunjukkan dari jumlah bintang terbanyak (Gujarati, 1995).

Penggunaan metode analisis kointegrasi tersebut bertujuan untuk menganalisis hubungan jangka panjang antara variabel-variabel penjelas dengan variabel terikat, terutama pada model yang mengandung variabel-variabel yang tidak stasioner. Untuk menguji adanya kointegrasi dapat menggunakan metode Engle-Granger. Langkah-langkah metode Uji Engle-Granger adalah sebagai berikut :

1. Ujilah adanya akar unit dalam variabel dan (misal dengan ADF *test*). Orde akar unit ini harus sama. Jika hipotesis adanya akar unit ditolak, hipotesis adanya kointegrasi antar variabel akan ditolak.
2. Selanjutnya estimasi persamaan regresi antara Y_t dan X_t dan simpan residual (e_t) dari regresi ini. Lakukan uji akar unit terhadap residual (e_t) yang diperoleh pada langkah dua.
3. Jika hipotesis adanya akar unit ditolak, kita bisa menyimpulkan bahwa Y_t dan X_t berkointegrasi.

Jika variabel-variabel yang diamati membentuk suatu himpunan variabel yang saling berkointegrasi, maka model dinamis yang cocok untuk mencari keseimbangan jangka pendek adalah model koreksi kesalahan atau *Error Correction Model* (ECM). Selanjutnya model koreksi kesalahan tersebut akan menjadi model yang valid bilamana variabel-variabel yang berkointegrasi tersebut didukung oleh *Error Correction Term* (ECT) yang signifikan secara statistik (Rosadi, 2011).

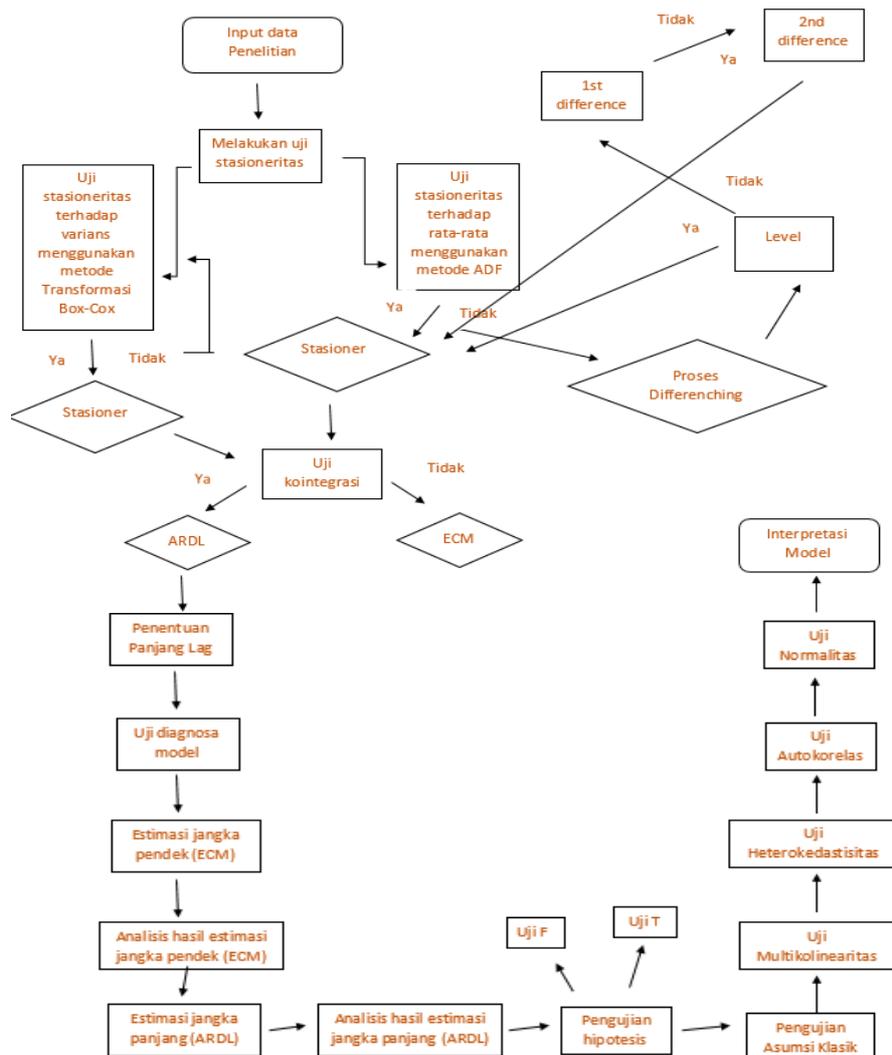
Error Correction Model (ECM) merupakan model ekonometrika dinamis. Kemampuan ECM yang meliputi lebih banyak peubah untuk menganalisis fenomena ekonomi jangka pendek maupun jangka panjang dan menguji kekonsistenan model empirik dengan teori ekonometrika. Selain itu ECM juga bermanfaat dalam usaha mencari pemecahan terhadap persoalan peubah *time series* yang tidak stasioner dan regresi lansung (Insukindro, 1997).

Pengujian hipotesis digunakan untuk membuktikan kebenaran hipotesa yang diajukan dalam penelitian ini, digunakan uji terhadap *output* yang dihasilkan oleh model linier tersebut. Uji statistik ini disebut juga dengan uji signifikansi. Adapun dalam pengujian hipotesis ini terdiri dari uji yaitu uji F (uji simultan) dan uji t (uji parsial).

Pengujian asumsi klasik yaitu uji yang dilakukan untuk melihat apakah model yang diestimasi telah memenuhi asumsi klasik dari OLS (*Ordinary Least Square*) sehingga nilai koefisien regresinya mendeteksi nilai sebenarnya. Uji asumsi klasik yang dilakukan dalam penelitian ini adalah uji normalitas, heteroskedastisitas, autokorelasi dan uji multikolinearitas.

2. Bahan dan Metode

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Data yang digunakan di dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Jenis data yang digunakan adalah data panel yaitu penggabungan dari data deret waktu (*timeseries*) dari tahun 2011-2017 dan deret lintang (*cross section*) sebanyak 15 kabupaten/kota di Provinsi Lampung. Dalam proses analisis data, penulis menggunakan bantuan aplikasi *software* atau perangkat lunak *Microsoft Excel 2010* dan *Eviews 10*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah Metode *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL). Adapun tahapan pengerjaannya adalah sebagai berikut :

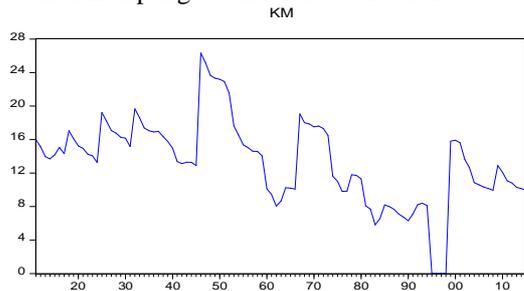


Gambar 3. Flowchart Metodologi Penelitian

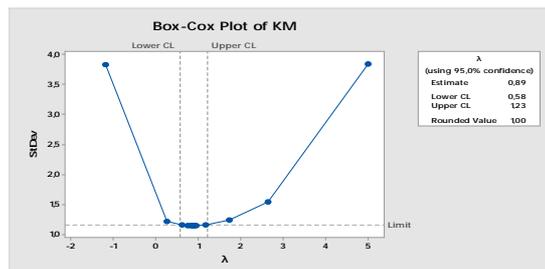
3. Hasil dan Pembahasan

Data yang digunakan di dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung dengan mengunduh dari internet melalui situs resmi Badan Pusat Statistik dalam publikasi tahunan. Jenis data yang digunakan adalah data panel yaitu penggabungan dari data deret waktu (*timeseries*) dari tahun 2011-2017 dan deret lintang (*cross section*) sebanyak 15 kabupaten/kota di Provinsi Lampung. Data yang digunakan adalah data Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung yang dilambangkan sebagai *dependent variable* dan data Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung yang dilambangkan sebagai *independent variable*.

Uji stasioneritas ini terdiri dari 2 tahapan, yaitu uji stasioneritas terhadap rata-rata dan uji stasioneritas terhadap varians. Sebuah data *time series* dikatakan stasioner dalam variansi apabila struktur dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi data yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Secara visual untuk melihat hal tersebut dapat dibantu dengan menggunakan plot *time series*, yaitu dengan melihat fluktuasi data dari waktu ke waktu. Berikut adalah hasil plot *time series* untuk variabel persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017.

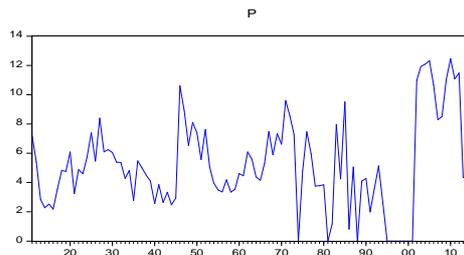


Gambar 4. Plot *time series* untuk data persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017



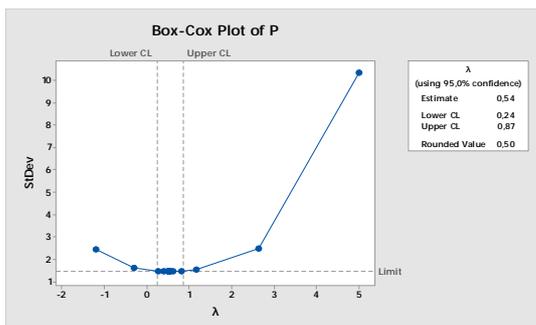
Gambar 5. Plot transformasi Box-Cox untuk data persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017

Selanjutnya, untuk memastikan apakah variabel persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 telah stasioner terhadap varians, maka dilakukan uji stasioneritas terhadap varians menggunakan metode Transformasi *Box-Cox*. Data dikatakan stasioner terhadap varians apabila nilai *Rounded Value* (λ) mendekati 1.00. Berdasarkan *output* hasil transformasi *Box-Cox* diatas, diperoleh nilai *Rounded Value* (λ) yaitu 1.00 yang mana hal ini berarti variabel persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 telah stasioner terhadap varians. Lalu, hal yang sama juga dilakukan untuk variabel Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017. Berikut adalah hasil plot *time series* untuk variabel tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017.

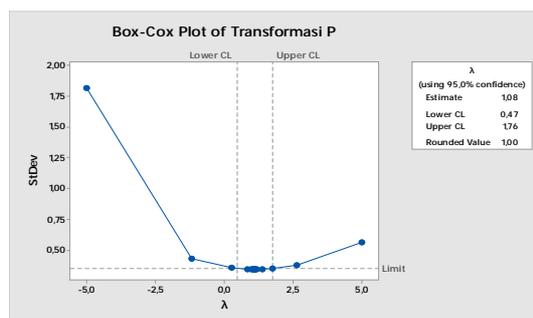


Gambar 6. Plot *time series* untuk data tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017

Berdasarkan hasil *output* plot *time series* diatas, nampak bahwa untuk variabel tingkat pengangguran di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 belum stasioner karena data tidak berada disekitar nilai rata-rata dan juga tidak menyebar secara normal. Untuk memastikan hal tersebut maka dilakukan pengujian stasioneritas terhadap varians menggunakan metode transformasi *Box-Cox*. Data dikatakan stasioner terhadap varians apabila nilai *Rounded Value* (λ) mendekati 1.00. Berikut adalah hasil *output* transformasi *Box-Cox* untuk variabel persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017.



Gambar 7. Plot Transformasi *Box-Cox* data Tingkatpengangguranterbuka Provinsi Lampung periode2011-2017



Gambar 8. Plot Transformasi *Box-Cox* data transformasi tingkatPengangguran Terbuka di ProvinsiLampung periode 2011-2017

Berdasarkan hasil *output* diatas, diperoleh nilai *Rounded Value* (λ) yaitu 1.00 yang mana hal ini berarti variabel tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 telah stasioner terhadap varians.

a. Uji stasioneritas terhadap rata-rata

Pengujian stasioneritas terhadap rata-rata dilakukan menggunakan uji akar unit dengan metode ADF (*Augmented Dickey Fuller*) *test*. Berikut hasil *output* untuk uji stasioneritas terhadap variabel Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 :

Tabel 1. *Output Eviews 10 Unit Root Test* Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017di Tingkat Level.

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.493841	0.0626
Test critical values:		
1% level	-3.494378	
5% level	-2.889474	
10% level	-2.581741	

Tabel 2. *Output Eviews 10 Unit Root Test* Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017di Tingkat *Ist Difference*.

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.16900	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.495021	
5% level	-2.889753	
10% level	-2.581890	

Berdasarkan hasil *output unit root test* diatas dapat disimpulkan bahwa data Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 telah stasioner pada tingkat *Ist Difference*.

Tabel 3. *Output Eviews 10 Unit Root Test* Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 Pada Tingkat Level

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.374460	0.0049
Test critical values:		
1% level	-3.495021	
5% level	-2.889753	
10% level	-2.581890	

Berdasarkan hasil *output unit root test* di atas dapat disimpulkan bahwa data Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 telah stasioner pada tingkat *Level*.

Berdasarkan hasil uji stasioneritas dengan menggunakan metode *ADF test*, didapatkan hasil bahwa variabel Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 telah stasioner pada tingkat *first difference* sehingga dapat dikatakan memiliki ordo integrasi 1 atau *I(1)*. Sedangkan untuk variabel Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 telah stasioner pada tingkat *level*, sehingga dapat dikatakan memiliki ordo integrasi 0 atau *I(0)*. Sesuai dengan metode Engle-Granger pada tahap 1 yang menyatakan bahwa apabila variabel-variabel tersebut memiliki ordo yang tidak sama, maka dapat dikatakan bahwa antar variabel tersebut tidak terdapat kointegrasi. Oleh karena variabel Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 dan variabel Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 memiliki ordo yang tidak sama, maka dapat dinyatakan bahwa tidak terdapat kointegrasi antar variabel. Sehingga model yang cocok digunakan adalah model *Autoregressive Distributed Lag (ARDL)* pada data yang telah stasioner.

Dalam melakukan regresi *ARDL*, kita akan dihadapkan pada pemilihan jumlah *Lag* yang digunakan untuk mengolah data tersebut. *Lag optimum* merupakan cara untuk memilih seberapa besar jumlah *lag* yang akan kita gunakan dalam penelitian tersebut. sehingga pemilihan jumlah *lag optimum* sangat diperlukan agar kita memperoleh hasil yang lebih baik. Penelitian ini akan melihat jumlah *Lag optimum* berdasarkan hasil *lag length criteria VAR*. Hasil *lag* paling optimum ditunjukkan dari jumlah bintang terbanyak. Adapun hasil *lag length criteria* pada tabel berikut menunjukkan bahwa *lag optimum* yang digunakan adalah *Lag 2*.

Tabel 4. Lag Length Criteria

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-251.9393	NA	8.940832	5.028501	5.080285	5.049464
1	-229.4464	43.64950	5.841805	4.602899	4.680576*	4.634345*
2	-228.1627	2.465725*	5.809218*	4.597282*	4.700851	4.639209
3	-227.5039	1.252355	5.848833	4.604038	4.733500	4.656448
4	-227.4593	0.083989	5.960886	4.622956	4.778310	4.685848

Sebelum melakukan analisis *ARDL* lebih lanjut, kita perlu melakukan uji diagnosis dari model *ARDL* untuk mengetahui lebih jelas apakah model *ARDL* yang dihasilkan adalah model yang cocok dan sempurna. Untuk melakukan uji diagnosis, hal pertama yang perlu diperiksa yaitu hasil nilai uji *Bounds Test*. Uji *Bounds test* digunakan untuk melihat seberapa besar presentase signifikansi yang bisa kita gunakan terhadap variabel yang kita teliti. Pengujian diagnosis menggunakan uji *Bounds Test* dilakukan dengan cara membandingkan nilai *F-Statistic* hitung dengan nilai kritis. Apabila nilai *F-Statistic* berada di bawah *lower bound*, maka dapat disimpulkan tidak terjadi kointegrasi. Sedangkan apabila nilai *F-Statistic* berada di atas *upper bound*, maka dapat disimpulkan terjadi kointegrasi. Dan apabila *F-Statistic* berada diantara *lowerbound* dan *upper bound* maka hasilnya adalah tidak dapat disimpulkan. Hasil uji *Bounds test* pada tabel 5 menunjukkan bahwa nilai *F* statistik nilainya cukup besar, yaitu 5.412825. Nilai ini lebih besar dari batas bawah nilai pada *I(0)* dan *I(1)*. Hal ini menunjukkan bahwa hasil estimasi model *ARDL* bisa kita gunakan hingga signifikansi $\alpha = 1\%$, serta hasil ini juga menunjukkan bahwa antar variable memiliki hubungan kointegrasi jangka panjang.

Tabel 5. ARDL Bound Test

Test Statistic	Value	Signif.	I(0)	I(1)
			Asymptoti c: n=1000	
F-statistic	5.412825	10%	3.02	3.51
k	1	5%	3.62	4.16
		2.5%	4.18	4.79
		1%	4.94	5.40
			Finite Sample:	
Actual Sample Size	101		n=80	

10%	3.113	3.61
5%	3.74	4.303
1%	5.157	5.917

Selain ARDL *Bound Test*, hasil lain yang perlu kita periksa selanjutnya adalah nilai *error-correction coefficient* (CointEq(-1)) pada model jangka pendek ECM. Nilai ini akan menunjukkan berapa besar error yang akan dikoreksi di setiap periode waktu. Agar memenuhi persyaratan, nilai ini harus negatif dan signifikan. Tabel 6 menunjukkan bahwa nilai CointEq(-1) pada model ini adalah -0.368799 dengan probabilitas 0.0001, nilainya negatif dan signifikan seperti yang diharapkan. Hal ini menunjukkan bahwa 36.87% error pada data akan dikoreksi pada setiap periode waktu.

Tabel 6. Error Correction Coefficient

<i>Variable</i>	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-Statistic</i>	<i>Prob.</i>
CointEq(-1)	-0.368799	0.091173	-4.045039	0.0001

Hasil jangka pendek model ARDL dapat dilihat dari model ECM nya. Model ECM ini diperoleh dengan menggunakan metode *general to specific* yang diawali dari lag maksimum lalu dengan prosedur tes standar mengeliminasi variabel-variabel ARDL yang secara spesifik tidak signifikan, hingga diperoleh hasil paling sederhana (*parsimonius regression*). Langkah ini tidak dilakukan penulis secara manual, karena Eviews 10 yang digunakan sudah memiliki opsi ARDL, sehingga hasil yang diinginkan ini sudah otomatis didapatkan. Tabel 7 berikut menunjukkan hasil estimasi jangka pendek ECM.

Tabel 7. Model Estimasi Jangka Pendek ECM

<i>Variable</i>	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-Statistic</i>	<i>Prob.</i>
D(KM)	0.235065	0.081586	2.881184	0.0049
D(KM(-1))	-0.074556	0.085743	-0.869534	0.3868
D(KM(-2))	-0.109341	0.084585	-1.292669	0.1994
CointEq(-1)	-0.368799	0.091173	-4.045039	0.0001

Berdasarkan hasil estimasi model jangka pendek ECM diatas, diperoleh hasil bahwa variabel Kemiskinan memiliki hasil signifikan dan berpengaruh positif terhadap Pengangguran. Sedangkan variabel Kemiskinan dengan lag 2 memiliki hasil signifikan tetapi berpengaruh negatif terhadap Pengangguran. Hal dikarenakan nilai dari Prob. untuk variabel Kemiskinan dan variabel Kemiskinan dengan lag 2 nilainya lebih kecil daripada nilai kritis $\alpha = 0.05$. Sedangkan untuk variabel Kemiskinan dengan lag 1 memiliki nilai negatif dan tidak signifikan terhadap Pengangguran, dikarenakan nilai dari Prob. lebih besar daripada nilai kritis $\alpha = 0.05$. Adapun persamaan yang terbentuk dari tabel tersebut adalah sebagai berikut :

$$D(P) = D(KM) + D(KM(-1)) + D(KM(-2)) - \text{CointEq}(-1)$$

$$D(P) = 0.235065 D(KM) - 0.074556 * D(KM(-1)) - 0.109341 * D(KM(-2)) - 0.368799$$

* Tidak signifikan.

Tabel 8. Model Estimasi Jangka Panjang ARDL

<i>Variable</i>	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-Statistic</i>	<i>Prob.</i>
C	-0.486865	0.834433	-0.583468	0.0610
KM	0.023708	0.086126	0.275269	0.0483
KM(-1)	-0.148032	0.147855	-1.001197	0.0314
KM(-2)	0.057830	0.143653	0.403563	0.0682

Berdasarkan hasil estimasi model jangka panjang ARDL pada tabel diatas, diperoleh hasil bahwa variabel Kemiskinan memiliki hasil signifikan dan berpengaruh positif terhadap Pengangguran. Sedangkan variabel Kemiskinan dengan lag 1 memiliki hasil signifikan tetapi berpengaruh negatif terhadap Pengangguran. Hal dikarenakan nilai dari Prob. untuk variabel Kemiskinan dan variabel Kemiskinan dengan

lag 1 nilainya lebih kecil daripada nilai kritis $\alpha = 0.05$. Sedangkan untuk variabel Kemiskinan dengan lag 2 memiliki nilai positif dan tidak signifikan terhadap Pengangguran, dikarenakan nilai dari Prob. lebih besar daripada nilai kritis $\alpha = 0.05$. Adapun persamaan yang terbentuk dari tabel tersebut adalah sebagai berikut :

$$P = C + KM + KM(-1) + (KM(-2))$$

$$P = -0.486865 + 0.023708 - 0.148032KM(-1) + 0.057830* KM(-2)$$

* Tidak signifikan.

Setelah melakukan uji F (uji simultan) dan juga uji t (uji parsial), diperoleh kesimpulan bahwa keputusan yang diambil adalah tolak H_0 yang artinya perubahan persentase penduduk miskin mempunyai pengaruh yang signifikan secara statistik terhadap perubahan tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung.

Pengujian asumsi klasik (Galat menyebar normal, tidak terjadi heterokedastisitas, tidak terjadi multikolinearitas dan tidak terjadi autokorelasi) pada model tersebut terpenuhi.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data menggunakan metode *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL) terhadap data Persentase Penduduk Miskin terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 dengan bantuan program *Eviews* sebagaimana yang telah dibahas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Hasil pemodelan untuk data Persentase Penduduk Miskin terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 dalam jangka pendek adalah sebagai berikut :
 $D(P) = 0.235065 D(KM) - 0.074556* D(KM(-1)) - 0.109341* D(KM(-2)) - 0.368799$
* Tidak signifikan.
2. Hasil pemodelan untuk data Persentase Penduduk Miskin terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka di Provinsi Lampung selama Periode 2011-2017 dalam jangka panjang adalah sebagai berikut :
 $P = -0.486865 + 0.023708 - 0.148032KM(-1) + 0.057830* KM(-2)$
* Tidak signifikan.
3. Pengaruh perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dalam jangka pendek mempunyai hubungan yang positif dan signifikan terhadap perubahan tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar 0.235065%. Dan untuk pengaruh dalam jangka panjang perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung juga mempunyai hubungan yang positif dan signifikan terhadap tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar 0.023708%.
4. Pengaruh perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dengan lag 1, dalam jangka pendek mempunyai hubungan yang negatif dan signifikan terhadap perubahan tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar -0.074556%. Dan juga dalam jangka panjang perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dengan lag 1, mempunyai hubungan yang negatif dan signifikan terhadap tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar -0.148032%.
5. Pengaruh perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dengan lag 2, dalam jangka pendek mempunyai hubungan yang negatif dan signifikan terhadap perubahan tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar -0.109341. Dan juga dalam jangka panjang perubahan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung dengan lag 2, mempunyai hubungan yang positif tetapi tidak signifikan terhadap tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung yaitu sebesar 0.057830%.

Saran bagi peneliti berikutnya yang tertarik dengan penerapan metode *Autoregressive Distributed Lag* (ARDL), diharapkan dapat menggunakan variabel penelitian yang lebih banyak, sehingga dapat memberikan hasil penelitian yang lebih baik. Apabila data penelitian pada variabel terikat dan variabel bebas tidak stasioner namun saling berkointegrasi, maka solusi pemodelan dapat dilakukan menggunakan *Error Correction Model* (ECM).

5. Daftar Pustaka

Badan Pusat Statistik. (2015). *Data dan Informasi Kemiskinan* [Internet]. [Accessed 1 Oktober 2018]. Available from <https://www.bps.go.id/dynamic/table/2016/01/18/1119/jumlah-penduduk-miskin-menurut-provinsi-1998-2014.html>.

Baltagi, Bagi. (2005). *Econometric Analysis of Panel Data, Third Edition*. John Wiley & Sons.

- Boediono dan Koster, W. (2004). *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*. PT Remaja Rosdakarya, Bandung.
- Gujarati, Damodar N. (1978). *Teori Ekonometrika*. Salemba Empat, Jakarta.
- Gujarati, D. (1995). *Ekonometrika Dasar*. Penerjemah: Drs. Ak. Sumarno Zain, MBA, hal: 233-251. Erlangga, Jakarta.
- Gujarati, D. (2014). *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Salemba Empat, Solo.
- Insukindro. (1997). Pemilihan Model Empririk Dengan Pendekatan Koreksi Kesalahan. *Jurnal Ekonomi dan Bisnis Indonesia*. **14**(1).
- Kuncoro, Mudrajad. (2003). *Indikator Penyebab Kemiskinan*. UPP AMP YKPN, Yogyakarta.
- Makridakis, W. (1999). *Metode dan Aplikasi Peramalan*, Edisi kedua. Bina Rupa Aksara, Jakarta.
- Muchlisoh, S. (2008). *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Higher Education Press, Beijing.
- Prastyo, A.A. (2010). *Analisis Faktor Yang Mempengaruhi Tingkat Kemiskinan*. Skripsi. Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang.
- Rosadi, D. (2011). *Analisis Ekonometrika dan Runtun Waktu Terapan*. Kalimedia, Yogyakarta.
- Sukirno, Sadono. (2001). *Makroekonomi Teori Pengantar*, Edisi Ketiga. PT. Raja Grafindo Persada, Jakarta.

SIMULASI PEMODELAN KLAIM AGREGASI DENGAN JUMLAH KLAIM BERDISTRIBUSI POISSON DAN BESAR KLAIM BERDISTRIBUSI RAYLEIGH

Rudi Ruswandi^{1*}, Ira Syavitri¹, Subian Saidi¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung, 35145
Penulis Korespondensi: rudikata@gmail.com¹

Abstrak

Klaim adalah pengalihan risiko dari tertanggung kepada penanggung. Klaim yang terjadi secara individu disebut klaim individu. Sedangkan kumpulan dari klaim individu disebut klaim agregasi pada periode tunggal asuransi kendaraan. Klaim agregasi terdiri dari pola jumlah dan besar klaim individu. Sehingga model dari klaim agregasi terbentuk dari masing-masing distribusi jumlah dan besar klaim. Distribusi klaim didasarkan pada fungsi densitas probabilitas dan fungsi densitas kumulatif. Maka dilakukan pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Distribusi Rayleigh merupakan salah distribusi nilai ekstrim yang dapat mengatasi nilai yang cukup besar. Serta distribusi Rayleigh merupakan hal khusus dari distribusi Weibull ketika parameter $\beta = 2$. Hasil dari simulasi dengan menetapkan parameter distribusi poisson yaitu $\lambda = 2$ dan parameter distribusi Rayleigh yaitu $k = 0,125$ adalah memperoleh model campuran klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Serta diperoleh nilai premi murni total berdasarkan nilai ekspektasi klaim agregasi dan nilai risiko maksimum berdasarkan VaR (value at risk) setiap pemegang polis dengan menggunakan software R.

Kata Kunci : *Klaim Agregasi, Distribusi Rayleigh, Premi Murni, Risiko Maksimum.*

1. Pendahuluan

Risiko merupakan bentuk ketidakpastian tentang suatu keadaan yang akan terjadi pada masa yang akan datang. Sehingga diperlukan cara untuk mengatasi risiko tersebut. Salah satu cara untuk mengatasi risiko tersebut adalah dengan menggunakan jasa asuransi. Asuransi merupakan salah satu bentuk pengendalian risiko dari tertanggung kepada penanggung. Perusahaan asuransi harus bisa mengidentifikasi suatu risiko dengan mempelajari karakteristik dari risiko tersebut. Setelah langkah mengidentifikasi risiko, maka penanggung dapat mengetahui karakter risiko dimana karakter risiko inilah yang dapat dipelajari dalam suatu model distribusi klaim. Distribusi klaim digambarkan dalam suatu distribusi densitas baik sebagai fungsi densitas probabilitas maupun fungsi densitas kumulatif. Klaim merupakan pengalihan risiko dari tertanggung kepada penanggung. Risiko yang terjadi secara individu disebut klaim individu, sedangkan kumpulan dari klaim individu disebut klaim agregasi. Karena klaim agregasi merupakan kumpulan klaim individu, maka dapat diketahui pola klaim agregasi dari perilaku jumlah dan besar klaim individu. Sehingga model klaim agregasi diperoleh dari model distribusi jumlah dan besar klaim individu dari distribusi masing-masing klaim. Biasanya besar klaim berdistribusi eksponensial atau distribusi dalam keluarga eksponensial seperti distribusi Normal, *Weibull*, *Rayleigh* dan sebagainya. Beberapa keluarga eksponensial juga masuk ke dalam distribusi nilai ekstrim. Distribusi nilai ekstrim merupakan distribusi dari suatu variabel random yang memiliki batasan nilai minimum dan maksimum. Sehingga distribusi nilai ekstrim banyak digunakan sebagai distribusi besar klaim dikarenakan besar klaim biasanya memiliki ukuran yang cukup besar atau ekstrim. Distribusi *Rayleigh* merupakan salah satu distribusi nilai ekstrim. Sehingga dalam penelitian ini akan diuraikan simulasi pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh*. Pemodelan klaim agregasi diuraikan berdasarkan fungsi densitas probabilitasnya dan dapat diketahui ukuran rata-rata dan varian. Dalam asuransi ukuran rata-rata risiko digunakan untuk perhitungan premi murni serta dengan nilai varian dapat diperoleh nilai risiko atau *value at risk* (VaR) yang merupakan metode yang sering kali digunakan dalam perhitungan risiko.

2. Asuransi

Menurut Bowers dkk (1997), dalam sistem asuransi menyatakan bahwa perusahaan asuransi merupakan pihak yang menanggung risiko kerugian dari tertanggung jika kerugian terjadi.

3. Prinsip Perhitungan Premi Murni

Premi asuransi adalah sejumlah uang yang dibayarkan oleh tertanggung kepada perusahaan asuransi sebagai kewajiban atas keikutsertaannya dalam asuransi. Pada prinsipnya premi asuransi merupakan nilai sekarang dari manfaat (*benefit*) yang ingin didapatkan oleh tertanggung pada jangka waktu yang telah disepakati sebelumnya.

4. Nilai Risiko (*Value at Risk*)

Value at Risk (VaR) menjadi standar ukuran risiko yang digunakan untuk mengevaluasi paparan risiko. Pada kasus umum, VaR adalah sejumlah modal yang dibutuhkan untuk memastikan, dengan tingkat derajat kepastian yang perusahaan tidak menjadi bangkrut secara teknis. Sehingga perhitungan VaR dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$VaR_p(X) = p \times \sigma \times B \quad (1)$$

5. Konvolusi

Dalam Bowers et all,1997, konvolusi metode untuk menentukan distribusi jumlah peubah acak yang saling bebas. Jika peubah acak $S = X + Y$ maka

$$F_s(S) = Pr(S \leq s) \\ = \sum_{Y \leq s} P_x(s - y)p_y(y) \quad (2)$$

dan fkp dari penjumlahan dua peubah acak yaitu

$$f_s(S) = \frac{d}{ds} \sum_{Y \leq s} P_x(s - y)f_y(y) \\ = \sum_{Y \leq s} p_x(s - y)p_y(y) \quad (3)$$

6. Klaim Agregasi

Berdasarkan jurnal klaim agregasi (Pramesti, 2011) model klaim individu diperoleh jika unit individu ke- i , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, N$ dipandang sebagai unit besar klaim individu ke- i dan dinotasikan dengan X_i maka:

$$X = \{X_i\}_{i=1,2,3,\dots,N} \quad (4)$$

X_i yang dapat diasumsikan berdistribusi kontinu merupakan peubah acak berdistribusi identik saling bebas. Kemudian pada model klaim agregasi diasumsikan mengikuti suatu distribusi campuran dengan klaim agregasi yang merupakan jumlahan dari N klaim individu yaitu:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad (5)$$

dengan N peubah acak yang menyatakan frekuensi klaim yang saling bebas.

Berdasarkan persamaan (5) dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif dari klaim agregasi sebagai berikut:

$$F_s(x) = P(S \leq x) \\ = P(X_1 + X_2 + \dots + X_N = x) \\ = \sum_{i=1}^x P(\{S = x\} | N = n_i) p(N = n_i) \\ = \sum_{n=0}^x P(X_1 + X_2 + \dots + X_N = x) p(N = n) \\ = \sum_{n=0}^x P^{*n}(x) p(N = n) \quad (6)$$

dengan

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

dan berdasarkan persamaan (3) maka

$$P^{*n}(x) = \sum_{y \leq x} p(y)P^{*(n-1)}(x - y)$$

Kemudian dengan menggunakan cara yang sama dapat diperoleh fungsi densitas probabilitas (fkp) sebagai berikut:

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) p(N = n) \quad (7)$$

Berdasarkan fungsi distribusi kumulatif klaim agregasi dapat ditentukan nilai ekspektasi dan varian klaim agregasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(S) &= E[E(S = x|N = n)] \\ &= \sum_n n E(S = x|N = n) p(N = n) \\ &= E(N) E(X) \end{aligned} \quad (8)$$

Sehingga dapat diperoleh varian klaim agregasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var(S) &= E[E(S^2|N = n)] - (E(S))^2 \\ &= E(N)V(X) + (E(X))^2 V(N) \end{aligned} \quad (9)$$

7. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini akan diperoleh pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh*. Dimana distribusi *Rayleigh* merupakan hal khusus dari distribusi Weibull ketika $\beta = 2$ dan $\alpha = \sqrt{\frac{2}{k}}$ dengan fungsi kepekatan peluang distribusi *Rayleigh* sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}, & x \geq 0, k > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \quad (10)$$

Sehingga ekspektasi dan varian distribusi *Rayleigh* sebagai berikut:

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{k}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (11)$$

$$Var(X) = \frac{2}{k} \left(\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) \right) \quad (12)$$

Kemudian fkp dari distribusi *Poisson* sebagai berikut:

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Maka ekspektasi dan varian distribusi *Poisson* sebagai berikut:

$$E(N) = \lambda \quad (14)$$

$$Var(N) = \lambda \quad (15)$$

Berdasarkan persamaan (7), (10), dan (13) dapat diperoleh model klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh* sebagai berikut:

$$f_s(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{y \leq x} ky e^{\left(\frac{-ky^2}{2}\right)} P^{*(n-1)}(x-y) \right) \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \right) \quad (16)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (8), (9), (11), (12), (14), dan (15) dapat diperoleh ekspektasi dan varian klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh* sebagai berikut

$$E(S) = \frac{\sqrt{2\pi} \lambda}{2 \sqrt{k}} \quad (17)$$

dan

$$Var(S) = \frac{2}{k} \Gamma(2) \lambda \quad (18)$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh* menggunakan *software R*. Pemodelan ini akan memperoleh nilai ekspektasi risiko yang merupakan premi murni total dan VaR yang merupakan risiko maksimum dari klaim agregasi yang berdistribusi *Rayleigh*. Simulasi dari pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan besar klaim berdistribusi *Rayleigh* dilakukan dengan menggunakan data bangkitan jumlah klaim berdistribusi *Poisson* dan data besar klaim berdistribusi *Rayleigh*. Tetapi data besar klaim dibangkitkan dengan data yang berdistribusi Weibull. Karena distribusi *Rayleigh* merupakan hal khusus dari distribusi Weibull ketika k adalah parameter tunggal yang ekuivalen dengan distribusi Weibull $\beta = 2$ dan $\alpha = \sqrt{\frac{2}{k}}$. Dalam penentuan model klaim agregasi akan ditentukan parameter yang cocok untuk data klaim agregasi dengan melakukan perbandingan dari tiga nilai parameter skala (α) yang berbeda dari distribusi

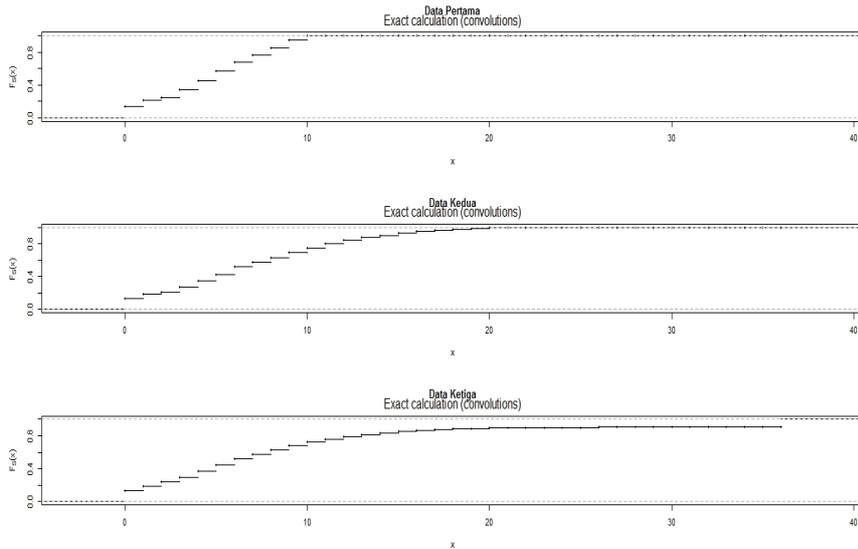
weibull yaitu 3, 4 dan 5. Sehingga untuk nilai parameter distribusi Rayleigh (k) dengan $k = \frac{2}{\alpha^2}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$k_1 = \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2}{3^2} = 0,222, \text{ untuk } \alpha = 3$$

$$k_2 = \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2}{4^2} = 0,125, \text{ untuk } \alpha = 4$$

$$k_3 = \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2}{5^2} = 0,08, \text{ untuk } \alpha = 5$$

Sehingga diperoleh hasil grafik klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh menggunakan *software* R sebagai berikut:



Gambar 1. Plot CDF Data Klaim Agregasi Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh menggunakan *software* R

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa *plot* cdf data kedua titik penyebaran data pmerata dan mengikuti arah persebaran data dengan mendekati nilai cdf 1. Bentuk *plot* cdf data kedua yang melandai ke arah positif menandakan bahwa *plot* cdf menyerupai *plot* cdf distribusi Rayleigh. Sehingga *plot* cdf data kedua yaitu data klaim agregasi pada jumlah klaim berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda = 2$ dan besar klaim berdistribusi Rayleigh dengan parameter $k = 0,125$ yang cocok dan dapat digunakan untuk penentuan nilai ekspektasi dan *value at risk* (VaR) data klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Dari data kedua dapat diperoleh data perhitungan klaim agregasi pada jumlah klaim berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda=2$ dan besar klaim berdistribusi Rayleigh dengan parameter $k=0,125$ menggunakan *software* R sebagai berikut:

Tabel 1. Data Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dengan Parameter $\lambda = 2$ dan Besar Klaim Berdistribusi

Jumlah klaim (n)	p(n)	Besar klaim (x)	f(x)	Banyak pemegang polis
0	0,135	0	0	21
1	0,270	3,463	0,204	20
2	0,270	7,029	0,040	24
3	0,180	2,804	0,214	23
4	0,090	1,487	0,161	7
5	0,036	2,026	0,196	3
6	0,012	2,080	0,108	2
Total	0,995	18,890	1,015	100

Rayleigh dengan Parameter $k = 0,125$ Selama 1 Tahun Periode Asuransi dengan menggunakan *software* R

Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat bahwa terdapat 21 nasabah yang mengeklaim 0 kali dengan besar klaim sebesar 0. Kemudian terdapat 20 nasabah yang mengeklaim 1 kali dengan besar klaim sebesar 3,463 dan terdapat 2 nasabah yang mengeklaim 6 kali dengan besar klaim sebesar 2,080. Dari data diatas terlihat dari 100 nasabah telah melakukan klaim sebanyak 192 klaim selama 1 tahun periode asuransi. Kemudian perhitungan premi murni total dan risiko maksimum dilakukan dengan menggunakan *software* R. Sehingga diperoleh nilai ekspektasi sebesar 7,588 dan *value at risk* (VaR) 95% sebesar 16 pada klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Sehingga dari nilai nilai ekspektasi dan *value at risk* (VaR) 95% dapat diperoleh nilai premi murni total sebesar Rp 166.944.228,- dengan nilai premi murni per pemegang polis sebesar Rp 1.669.442,- dan risiko maksimum sebesar Rp 352.000.000,- dengan *benefit* Rp 22.000.000 dari 100 pemegang polis. Maka premi murni total dan risiko maksimum dari 100 pemegang polis ini dapat digunakan perusahaan asuransi untuk acuan perhitungan premi perusahaan asuransi kedepannya dengan asumsi kejadian klaim asuransi berikutnya tidak menyimpang dari kejadian klaim periode sebelumnya.

8. Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

1. Model klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh sebagai berikut:

$$f_s(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{y \leq x} kye^{\left(\frac{-ky^2}{2}\right)} P^{*(n-1)}(x-y) \right) \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \right)$$

2. Nilai premi murni total dari 100 pemegang polis yang diperoleh dari perhitungan nilai ekspektasi klaim agregasi sebesar Rp 166.944.228,- dengan nilai premi murni per pemegang polis sebesar Rp 1.669.442,- dan risiko maksimum yang diperoleh dari perhitungan nilai VaR 95% klaim agregasi sebesar Rp 352.000.000,- dengan *benefit* Rp 22.000.000 menggunakan *software* R dari 100 pemegang polis.
3. Sehingga premi murni total dan risiko maksimum dapat digunakan perusahaan asuransi untuk acuan perhitungan premi perusahaan asuransi kedepannya dengan asumsi kejadian klaim asuransi berikutnya tidak menyimpang dari kejadian klaim periode sebelumnya.

9. Daftar Pustaka

- Afify, W. M. (2011). Clasisical Estimation of Mixed Rayleigh Distribution in Type1 Progressiv Concered. *Jurnal Teori Statistika dan Aplikasi*. 10: 619-632.
- Bain, L. J., & Engelhard, M. (1992) *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Ed. ke-2. PWS-KENT publishing Company. Boston.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. Ed. ke-2. The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- Effendy, A. R. (2016). *Teori Risiko Aktuarial dengan Software R*. Universitas Gajah Mada Press. Yogyakarta.
- Hogg, R. V., & Craig, A. T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics*. Academic Press. New York.
- Pramesti, G. (2011). Distribusi Rayleigh untuk Klaim Agregasi. *Jurnal Media Statistika*. 4(2) : 106-109.
- Walpole, R.E. (1995). *Pengantar Statistika*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Young, R Virginia. (2004). Encyclopedia of Actuarial Science. *John Wiley & Sons*, Ltd.

KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (ϕ) EULER

Rini Karina Agustini¹, Suharsono S,¹ Wamiliana¹, Notiragayu¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : rini karina07@gmail.com¹

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan karakteristik dari fungsi phi (ϕ) Euler, membuktikan sifat-sifat fungsi phi (ϕ) Euler serta membuktikan apakah fungsi phi (ϕ) Euler merupakan fungsi multiplikatif. Untuk memperlihatkannya jika m dan n adalah bilangan bulat positif dan $\text{fpb}(m,n) = 1$, maka $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$ dan juga $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$.

Kata kunci: Fungsi phi, Fungsi Euler, Persamaan Karakteristik

1. Pendahuluan

Matematika adalah pola berpikir, mengorganisasikan, dan pembuktian yang logik. Matematika adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol. Didalam matematika, terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963).

Dalam teori bilangan, pada tahun 1763 Leonhard Euler memperkenalkan fungsi phi Euler. Fungsi ini hanya memperhitungkan bilangan bulat. Alasan mengapa dinamakan fungsi phi, karena fungsi ini menggunakan lambang phi (ϕ). Meskipun fungsi ini memiliki nama phi, namun dalam perhitungannya sama sekali tidak menggunakan phi (ϕ) yang bernilai 1,61803399. Penggunaan phi (ϕ) hanya untuk sebuah 'fungsi'. Pada teori bilangan, beberapa fungsi memiliki karakteristik atau sifat fungsi multiplikatif seperti pada fungsi Mobius. Oleh karena itu akan dibuktikan apakah fungsi phi juga merupakan fungsi multiplikatif.

Fungsi phi Euler diterapkan pada bilangan bulat positif, $\phi(n)$ merupakan fungsi aritmatika yang digunakan untuk menghitung banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan n yang saling prima terhadap n .

Yang dapat ditunjukkan sebagai berikut :

Bilangan bulat yang kurang dari 12 dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$12 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah $\{1,5,7,11\}$. Dan jumlah bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah 4 sehingga $\phi(12) = 4$.

Fungsi multiplikatif dapat didefinisikan sebagai berikut:

- (i) Fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ dikatakan fungsi aritmetika.
- (ii) Fungsi aritmetika f dikatakan fungsi multiplikatif jika
 - a) $f \neq 0$.
 - b) $(m,n) = 1$, maka $f(mn) = f(m)f(n)$
- (iii) Fungsi aritmetika g adalah multiplikatif lengkap jika untuk semua bilangan asli m dan n , berlaku $g(mn) = g(m)g(n)$.

Jadi $f(n)$ adalah multiplikatif jika $f(1)=1$.

2. Metode

Metode yang digunakan untuk menentukan karakteristik fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :

1. Diberikan bilangan bulat positif n .
2. Membuktikan sifat-sifat dari fungsi phi Euler.
3. Menentukan fungsi phi Euler untuk bilangan bulat positif n .
4. Membuktikan apakah fungsi phi Euler merupakan fungsi multiplikatif

3. Hasil dan Pembahasan

Beberapa sifat fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :

Teorema 4.1 :

Untuk n bilangan prima dan $k > 0$, adalah

$$\begin{aligned}\phi(n^k) &= n^k - n^{k-1} \\ &= n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Bukti :

Jika $\text{fpb}(m, n^k) = 1$. Maka terdapat n^{k-1} bilangan bulat diantara 1 dan n^k yang dapat dibagi oleh n , yaitu $n, 2n, 3n, \dots, (n^{k-1})n$. Maka dimisalkan $\{1, 2, \dots, n^k\}$, kecuali $n^k - n^{k-1}$ yang merupakan suatu bilangan bulat yang relatif prima terhadap p^k dan berdasarkan definisi fungsi phi, $\phi(n^k) = n^k - n^{k-1}$. Berdasarkan definisi fungsi phi Euler dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned}\phi(n^k) &= n^k - n^{k-1} \\ &= n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

Teorema 4.2 :

Jika bilangan bulat $n > 1$, memiliki faktor prima $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ maka :

$$\begin{aligned}\phi(n) &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

Bukti :

Karena $\text{fpb}(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}, p_{i+1}^{k_{i+1}}) = 1$

Diberikan definisi fungsi multiplikatif sebagai berikut

$$\begin{aligned}\phi((p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) p_{i+1}^{k_{i+1}}) &= \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) \phi(p_{i+1}^{k_{i+1}}) \\ &= \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) (p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1})\end{aligned}$$

Tetapi $\phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} p_{i+1}^{k_{i+1}}) &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1}) \\ &\Rightarrow \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

Contoh :

$$\phi(100) = 40$$

Penyelesaian:

$$\phi(100) = \phi(2^2 \cdot 5^2) = 100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$$

Teorema 4.3 (Karakteristik Fungsi Phi Euler)

Jika $\text{fpb}(m, n) = 1$ maka $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Dan $\phi(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif.

Bukti :

Sebelum menunjukkan bahwa $\phi(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif yaitu $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$, maka haruslah terpenuhi dua syarat berikut :

- (i) $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$
- (ii) $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$

Akan diperlihatkan bahwa :

- (i) Apabila diambil $m = 1$ dan $n = 1$ maka hasilnya akan selesai, artinya terlihat jelas bahwa pasangan (mn) pastilah pasangan relatif prima. Jadi, misalkan diambil $m > 1$ dan $n > 1$. Dan $a_1, \dots, a_{\phi(m)}$ yang merupakan bilangan bulat positif $\leq n$ yang relatif prima ke n , misalkan $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$ dan $\text{fpb}(k, mn) = 1$. Kemudian a dan b didefinisikan

$$k \equiv a \pmod{m} \quad ; 0 \leq a < m \quad \text{dan} \quad k \equiv b \pmod{n} \quad ; 0 \leq b < n$$

Untuk memperlihatkan bahwa definisi diatas terpenuhi yaitu apabila diambil bilangan $k = 5, m = 2$ dan $n = 3$ maka akan terpenuhi bahwa $\text{fpb}(k, mn) = 1$ yaitu $\text{fpb}(5, (2 \cdot 3)) = 1$. Kemudian dapat dengan mudah didefinisikan (berdasarkan Teorema Sisa Cina)

$$k \equiv a \pmod{m} \quad ; 0 \leq a < m$$

$$5 \equiv a \pmod{2} \quad ; 0 \leq a < 2$$

Dari definisi kekongruenan, maka

$$5 = (2) \cdot 2 + 1$$

Jadi, 1 adalah sisa dari pembagiannya sehingga definisi tersebut terpenuhi yaitu

$$5 \equiv 1 \pmod{2} \quad ; 0 \leq 1 < 2$$

Begitu pun dengan definisi berikutnya

$$k \equiv b \pmod{n} \quad ; 0 \leq b < n$$

$$5 \equiv b \pmod{3} \quad ; 0 \leq b < 3$$

$$5 = (1) \cdot 3 + 2$$

Jadi, 2 adalah sisa pembagiannya sehingga definisi tersebut juga terpenuhi yaitu

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad ; 0 \leq a < m$$

Karena $k = a + tm$ untuk suatu bilangan bulat t dan terpenuhi bahwa $\text{fpb}(k, m) = 1$ yaitu $\text{fpb}(5, 2) = 1$, maka dapat ditarik kesimpulan $\text{fpb}(a, m) = 1$ yaitu $\text{fpb}(1, 2) = 1$. Begitu juga karena $k = b + tn$ untuk suatu bilangan bulat t dan terpenuhi $\text{fpb}(k, n) = 1$ yaitu $\text{fpb}(5, 3) = 1$ maka $\text{fpb}(b, 3) = 1$. Oleh karena itu, terdapat pasangan $i \in \{1, 2, \dots, \phi(m)\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, \phi(n)\}$ yaitu

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

Dengan menggunakan pembuktian seperti diatas maka definisi tersebut terpenuhi, karena terdapat $\phi(m)$ yaitu $\phi(2) = 1$ dan $\phi(n)$ yaitu $\phi(3) = 2$ dengan pasangan (i, j) maka $\phi(mn)$ yaitu $\phi(6) = 2$ dan k adalah solusi unik artinya k solusi adalah tunggal (berdasarkan teorema sisa Cina) maka terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n) \text{ yaitu}$$

$$\Leftrightarrow \phi(2 \cdot 3) \leq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq 1 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq 2$$

Maka terbukti untuk (i) bahwa $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$

- (ii) Untuk pasangan (i, j) dengan $i \in \{1, 2, \dots, \phi(m)\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, \phi(n)\}$ dan pandang bilangan bulat $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$ (berdasarkan Teorema Sisa Cina) dengan bentuk

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

Untuk memperlihatkan definisi tersebut terpenuhi yaitu jika diambil $k = 5$ dan $k = 7, m = 2$ dan $n = 3$ sehingga terpenuhi bahwa $\text{fpb}(k, m) = 1$ dan $\text{fpb}(k, n) = 1$. Pada pembuktian ini karena masing-masing pasangan (i, j) dengan solusi k nya adalah solusi yang berbeda maka akan terpenuhi bahwa $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$. Dapat diperlihatkan sebagai berikut

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$5 \equiv a_i \pmod{2}$$

$$5 = (2) \cdot 2 + 1$$

Sehingga 1 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

Untuk definisi selanjutnya

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

$$7 \equiv b_j \pmod{3}$$

$$7 = (1) \cdot 3 + 4$$

Sehingga 4 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

Karena masing-masing pasangan (i, j) dengan solusi k yang berbeda maka terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$$

$$\phi(2 \cdot 3) \geq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq 1 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq 2$$

Maka terbukti untuk (ii) bahwa $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$

Jadi, kedua syarat tersebut sudah terpenuhi yaitu (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
dan $\phi(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah diatas maka dapat ditarik kesimpulan bahwa apabila pasangan (m,n) adalah bilangan bulat positif dan $\text{fpb}(m,n) = 1$ dan terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n) \text{ dan}$$

$$\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$$

maka $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ dan $\phi(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif. Sehingga terbukti bahwa karakteristik fungsi Phi Euler adalah fungsi yang multiplikatif.

5. Daftar Pustaka

Burton, D.M. (1980). *Elementary Number Theory*. University Of New Hampshire, United State of Afrika.

Stewart, B.M. (1952). *Theory of Numbers*. The Macmillan Company, New York.

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK DENGAN PENGARUH VAKSINASI

Farida¹, Agus Sutrisno¹, Dorrah Aziz¹, Tiryono Ruby¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : farida.pasha1569@gmail.com¹

Abstrak

Kondisi umum kesehatan dipengaruhi oleh berbagai faktor yaitu lingkungan, perilaku, dan pelayanan kesehatan. Dari faktor inilah muncul masalah kesehatan, yaitu penyakit. Salah satunya ialah campak. Campak adalah infeksi virus yang ditandai dengan munculnya ruam yaitu bintik-bintik merah di seluruh tubuh dan sifatnya sangat menular. Bagi penderita campak, virus campak ada di dalam percikan cairan yang dikeluarkan saat mereka bersin dan batuk. Virus campak akan menyebar, saat menghirup percikan cairan ini atau menyentuh benda yang sudah terkontaminasi virus ini siapapun dapat tertular. Analisis model matematika penyebaran penyakit campak menggunakan sistem persamaan diferensial dengan peubah *Susceptible*, *Infected*, *Recovered* (SIR). Sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit campak, vaksinasi akan ditambahkan ke dalam model tersebut. Model yang diamati terdiri atas dua kasus berdasarkan titik kesetimbangannya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Kemudian, diberikan simulasi untuk setiap kasus yang menggambarkan perilaku dan kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Hasil yang diperoleh dari titik kesetimbangan bebas penyakit saat $R_0 < 1$ stabil, sehingga semakin lama penyakit campak akan menghilang dari populasi. Untuk titik kesetimbangan endemik saat $R_0 > 1$ stabil, maka saat kesetimbangan ini penyakit akan ada sampai pada waktu yang tidak terbatas.

Kata kunci: model SIR, campak, vaksinasi, sistem persamaan diferensial, kestabilan Routh-Hurwitz.

1. Pendahuluan

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika turut memberikan peranan dalam memodelkan dan menganalisis suatu permasalahan. Dengan menggunakan model matematika dapat menghasilkan suatu formulasi masalah yang dihadapi. Model matematika adalah suatu usaha dalam menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk matematika.

Penyebaran penyakit campak yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Model matematika yang sering digunakan untuk menganalisa penyebaran suatu penyakit adalah model SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Model epidemik membagi populasi menjadi populasi *Susceptible* (individu yang rentan terinfeksi penyakit), populasi *infected* (individu yang terinfeksi penyakit), dan populasi *recovered* (individu yang sembuh dari penyakit).

Vaksinasi merupakan pemberian vaksin ke dalam tubuh seseorang untuk memberikan kekebalan terhadap penyakit tersebut. Model yang akan terbentuk merupakan suatu persamaan diferensial. Persamaan tersebut akan digunakan untuk mencari titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada model SIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi serta mengetahui simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.

2. Bahan dan Metode

Model matematis epidemiologi SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan Mc Kendrick pada tahun 1927. Model tersebut terdiri dari tiga kategori yaitu: *susceptible* (S) atau individu yang rentan terserang penyakit, *infected* (I) atau individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan dan *recovered* (R) atau individu yang diasumsikan telah sembuh atau kekebalan tubuhnya telah kembali normal sehingga kebal terhadap penyakit (Murray, 2002).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling berkaitan dan konsisten. Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan sebuah derivatif fungsi x_n terhadap t , dan g_1 adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Neuhauser, 2004).

Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika diuraikan dalam sebuah persamaan differensial, maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol. Misalkan diberikan suatu sistem persamaan differensial yang terbentuk

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) dapat dikatakan sebagai titik kesetimbangan dari sistem (2), apabila dipenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan penyelesaian keseimbangan dari sistem (2) (Campbell and Haberman, 2008).

Teorema 1 (Olsder et al., 2011) diberikan teorema mengenai kestabilan suatu sistem nonlinier yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian.

1. Apabila semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan diferensial bernilai negatif, maka titik kesetimbangan dari sistem tersebut stabil.
2. Jika terdapat satu nilai eigen matriks Jacobian dari sistem persamaan diferensial bernilai positif, maka titik kesetimbangan dari sistem tersebut tidak stabil.

Kestabilan titik kesetimbangan merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan. Matriks Jacobi dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali persamaan $Jx = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(\lambda I - J)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|\lambda I - J| = 0$. Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka dapat ditulis $\begin{bmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda - d \end{bmatrix}$ atau $\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$ (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Secara umum kestabilan suatu titik kesetimbangan mempunyai 2 perilaku, yaitu:

- 3.1 Stabil, jika
 - a. $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i , atau
 - b. Terdapat $Re(\lambda_i) = 0$ untuk sebarang j , dan $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i \neq j$.
- 3.2 Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu i sehingga $Re(\lambda_i) > 0$ (Tu, 1994).

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu kriteria yang digunakan untuk memperlihatkan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung. Jika suatu persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Adapun prosedur dalam kriteria *Routh-Hurwitz* adalah :

1. Persamaan polinom orde ke- n ditulis dalam bentuk $a_m s^n - a_{m-1} s^{n-1} + a_{m-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$,
2. Jika terdapat koefisien bernilai 0 atau negatif, maka terdapat satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif yang berarti sistem tersebut tidak stabil.
3. Jika seluruh koefisien bernilai positif, maka dapat dibentuk suatu matriks yang sering disebut *array Routh* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} S^n \\ S^{n-1} \\ S^{n-2} \\ S^{n-3} \\ \vdots \\ S^1 \\ S^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-2} \dots a_0 \\ a_{m-1} & a_{m-3} \dots 0 \\ b_1 & b_2 \dots b_k \\ c_1 & c_2 \dots c_k \\ \vdots & \vdots \dots \vdots \\ g_1 & 0 \dots 0 \\ h_1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Koefisien b_1, b_2, \dots, b_k dan c_1, c_2, \dots, c_k dapat ditentukan dengan formula-formula berikut.

$$b_1 = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-2} \\ a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix},$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-4} \\ a_{m-1} & a_{m-5} \end{vmatrix},$$

$$b_k = -\frac{1}{a_{m-1}} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-2k} \\ a_{m-1} & a_{m-2k+1} \end{vmatrix},$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$c_k = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-2k+1} \\ b_1 & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

4. Jumlah akar yang tidak stabil dapat terlihat pada banyaknya perubahan tanda dikolom pertama matriks (3).
5. Syarat perlu agar sistem dikatakan stabil adalah apabila koefisien dari persamaan karakteristik bernilai positif, sedangkan syarat cukupnya adalah apabila suku dari kolom pertama matriks (3) bernilai positif (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Dalam epidemiologi, *Next Generation Matrix* adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan angka reproduksi dasar. Matriks ini merupakan matriks yang dikonstruksi dari sub-sub populasi yang menyebabkan infeksi. Selanjutnya disusun matriks φ dan ψ dengan φ merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit dan ψ merupakan matriks laju perkembangan, kematian, atau kesembuhan. Kemudian perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi φ dan ψ di titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan F dan V adalah hasil masing-masing linearisasi dari φ dan ψ . Sehingga diperoleh *Next Generation Matrix* yaitu $K = FV^{-1}$. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari *Next Generation Matrix* (Derouich dan Boutayeb, 2008).

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah ini adalah:

1. Menentukan parameter laju perubahan individu pada subpopulasi SIR.

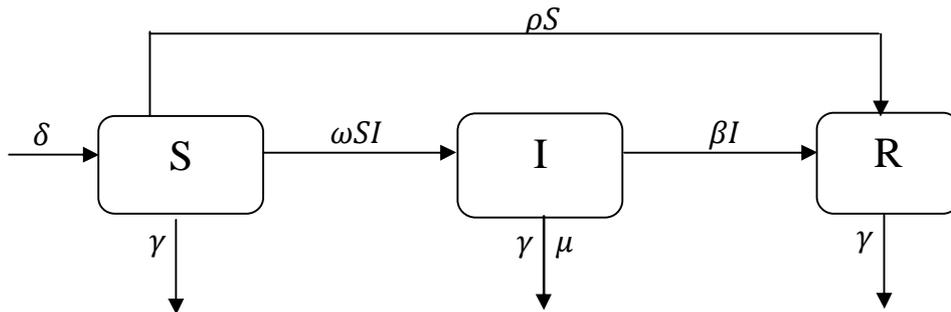
2. Mencari model matematika SIR untuk penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
3. Menentukan titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
4. Menganalisis kestabilan dari model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.
5. Melakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi.

3. Hasil dan Pembahasan

Pembentukan model penyebaran penyakit campak dibatasi dengan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

1. Populasi penduduk diasumsikan tertutup artinya tidak ada imigran dan emigran.
2. Populasi penduduk bersifat tidak konstan artinya laju kelahiran dan kematian diasumsikan tidak sama.
3. Setiap individu yang baru lahir dan yang masih hidup akan masuk dalam populasi rentan terhadap penyakit campak.
4. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
5. Penyakit menular melalui kontak langsung antara populasi rentan (*Susceptible*) dengan populasi terinfeksi (*Infected*).
6. Populasi terinfeksi (*Infected*) memiliki kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit campak.
7. Tidak ada masa inkubasi dari penyakit campak.
8. Setiap individu yang diberi vaksin masuk ke dalam kelas sembuh (*Recovered*) dan akan kebal terhadap penyakit campak. Kekebalan terjadi karena vaksin bersifat permanen artinya individu yang mendapatkan vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama.

Berdasarkan asumsi-asumsi dapat disajikan ke dalam diagram transfer berikut.



Gambar 1. Skema kompartemen populasi model SIR dengan pengaruh vaksinasi.

Dari skema kompartemen diperoleh model epidemiologi SIR dengan pengaruh vaksinasi ditulis ke sistem sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \rho S - \beta I - \gamma R \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dengan $\delta(t)$ merupakan jumlah kelahiran populasi, $\omega(t)$ merupakan laju kontak antara jumlah populasi *Susceptible* dengan *Infected*, $\gamma(t)$ merupakan laju kematian alami, $\mu(t)$ merupakan laju kematian yang disebabkan penyakit, $\beta(t)$ merupakan laju kesembuhan, dan $\rho(t)$ merupakan jumlah individu yang memperoleh vaksinasi. Nilai parameter δ , ω , γ , μ , β adalah positif. Batas laju vaksinasi adalah $0 \leq \rho \leq 1$. Karena asumsi menyatakan bahwa jumlah kelahiran tidak sama dengan jumlah kematian maka total populasi tidak konstan. Dari populasi N dapat ditulis persamaan berikut.

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (5)$$

Berdasarkan penelitian Awaluddin (2018) laju perubahan jumlah populasi N dengan jumlah kelahiran dikurangi kematian alami dari populasi N dan dikurangi dengan kematian yang disebabkan oleh penyakit pada populasi I (*infected*). Hal ini dapat dirubah ke persamaan berikut.

$$\frac{dN}{dt} = \delta - \gamma N - \mu I \quad (6)$$

Pada asumsi (2) dan (8) bahwa jumlah populasi tidak konstan karena perbedaan antara jumlah kelahiran dan kematian serta populasi S (*susceptible*) dan I (*infected*) akan menuju R (*recovered*), sehingga pada populasi R (*recovered*) dapat diganti dengan jumlah populasi $N(t)$, dengan demikian diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dN}{dt} &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Titik kesetimbangan dari sistem (7) terjadi pada saat $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, dan $\frac{dN}{dt} = 0$. Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit terjadi pada saat jumlah individu terinfeksi sama dengan nol ($I = 0$) sehingga di titik kesetimbangan bebas penyakit untuk sistem (7) diperoleh

$$E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho + \gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma} \right). \quad (8)$$

Untuk titik kesetimbangan endemik terjadi pada saat $I \neq 0$. sehingga di titik kesetimbangan endemik untuk sistem (7) diperoleh

$$E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma + \mu + \beta}{\omega}, (q - 1) \left(\frac{\rho + \gamma}{\omega} \right), \frac{\delta \omega - \mu(q - 1)(\rho + \gamma)}{\omega \gamma} \right) \quad (9)$$

dengan $q = \frac{\delta \omega}{(\rho + \gamma)(\gamma + \mu + \beta)}$.

Pada model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yang menyebabkan infeksi adalah kelas *Infected* sehingga pada sistem (7) yang digunakan adalah:

$$\frac{dI}{dt} = \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I$$

Akan membentuk $\varphi = [\omega SI]$ dan $\psi = [\gamma I + \mu I + \beta I]$, dengan φ merupakan matriks dari laju kontak antara populasi *Susceptible* dengan *Infected* dan ψ merupakan laju kematian alami, kematian yang disebabkan oleh penyakit dan kesembuhan dari penyakit.

Sehingga diperoleh $R_0 = \left[\frac{\omega \delta}{\rho + \gamma(\gamma + \mu + \beta)} \right]$.

Akan dilakukan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan sebagai berikut.

Tulis:

$$\begin{aligned} f(S, I, N) &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ g(S, I, N) &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ h(S, I, N) &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned} \quad (10)$$

maka matriks Jacobian dari persamaan (10) adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(f(S, I, N))}{\partial N} \\ \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(g(S, I, N))}{\partial N} \\ \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial S} & \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial I} & \frac{\partial(h(S, I, N))}{\partial N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega I - \rho - \gamma & -\omega S & 0 \\ \omega I & \omega S - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit $E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho+\gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma}\right)$ ke persamaan (11) diperoleh matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$J(E_*) = \begin{bmatrix} -(\rho + \gamma) & -\frac{\omega\delta}{\rho + \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\omega\delta}{\rho + \gamma} - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_*)$ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J(E_*)) = 0$ dengan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh nilai eigen,

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 + \lambda^2(3\gamma + \mu + \beta + \rho - z) + \lambda(3\gamma^2 + 2\gamma\mu + 2\gamma\beta + 2\rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - 2\gamma z - \rho z) + \gamma^3 + \rho\gamma^2 + \mu\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \rho\gamma\mu + \rho\gamma\beta - \rho z\gamma - \gamma^2 z) = 0 \quad (12)$$

Untuk menunjukkan kestabilan dari persamaan karakteristik yang dijelaskan pada penelitian A'maludin (2016) dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, memisalkan:

$$\begin{aligned} a &= 3\gamma + \mu + \beta + \rho - z \\ b &= 3\gamma^2 + 2\gamma\mu + 2\gamma\beta + 2\rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - 2\gamma z - \rho z \\ c &= \gamma^3 + \rho\gamma^2 + \mu\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \rho\gamma\mu + \rho\gamma\beta - \rho z\gamma - \gamma^2 z \end{aligned}$$

dengan $z = \frac{\omega\delta}{\rho+\gamma}$

Selanjutnya dengan menuliskan persamaan (12) ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & c \\ \frac{ab-c}{a} & \\ \left(\frac{ab-c}{a}\right)a & 0 \\ \frac{ab-c}{a} & a \end{bmatrix} \quad (13)$$

Matriks (13) telah memenuhi syarat cukup pada teorema 1 (Olsder *et al.*, 2011) agar sistem tersebut dikatakan stabil karena semua suku pada kolom pertama matriks bertanda positif. Oleh sebab itu, karena syarat perlu dan syarat cukup sudah terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (12) stabil, yang artinya titik kesetimbangan bebas penyakit pada persamaan (8) dikatakan stabil. Dengan mensubstitusikan nilai titik endemik $E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}, (q-1)\left(\frac{\rho+\gamma}{\omega}\right), \frac{\delta\omega-\mu(q-1)(\rho+\gamma)}{\omega\gamma}\right)$ ke persamaan (11) diperoleh matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:
dengan $S = \frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}$ dan $I = (q-1)\left(\frac{\rho+\gamma}{\omega}\right)$
misal $S = x$ dan $I = y$

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\omega\gamma - \rho - \gamma & -\omega x & 0 \\ \omega\gamma & \omega x - \gamma - \mu - \beta & 0 \\ 0 & -\mu & -\gamma \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E^*)$ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J(E^*)) = 0$ dengan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh nilai eigen,

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 + \lambda^2(-\omega x + \omega\gamma + 2\gamma + \mu + \beta + \rho - \omega x\gamma + \omega\gamma\gamma + 2\gamma^2 + \mu\gamma + \beta\gamma + \rho\gamma) + \lambda(\omega\gamma\gamma + \omega\gamma\mu + \omega\gamma\beta - \omega x\rho + \rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - \omega x\gamma + \gamma^2 + \gamma\mu + \gamma\beta) + \omega\gamma\gamma(\gamma + \mu + \beta) + \rho\gamma(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) + \gamma^2(-\omega x + \gamma + \mu + \beta)) = 0 \quad (14)$$

Untuk menunjukkan kestabilan dari persamaan karakteristik yang dijelaskan pada penelitianA' maludin (2016) dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, memisalkan:

$$\begin{aligned} k &= -\omega x + \omega\gamma + 2\gamma + \mu + \beta + \rho - \omega x\gamma + \omega\gamma\gamma + 2\gamma^2 + \mu\gamma + \beta\gamma + \rho\gamma \\ l &= \omega\gamma\gamma + \omega\gamma\mu + \omega\gamma\beta - \omega x\rho + \rho\gamma + \rho\mu + \rho\beta - \omega x\gamma + \gamma^2 + \gamma\mu + \gamma\beta \\ m &= \omega\gamma\gamma(\gamma + \mu + \beta) + \rho\gamma(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) + \gamma^2(-\omega x + \gamma + \mu + \beta) \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menuliskan persamaan (14) ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ k & m \\ \frac{kl-m}{k} & \\ \left(\frac{kl-m}{k}\right)k & 0 \\ \frac{\frac{kl-m}{k}}{k} = k & \end{bmatrix} \quad (15)$$

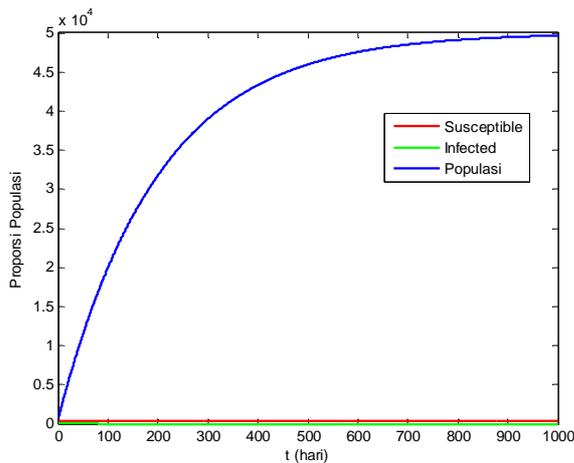
Matriks (15) telah memenuhi syarat perlu dan syarat cukup pada teorema 1 (Olsder, *et al.*, 2011), seingga dapat disimpulkan bahwa persamaan (14) stabil dan dengan kata lain titik kesetimbangan endemik (9) stabil.

Berdasarkan penelitian Awaluddin (2018) dan adanya perubahan nilai parameter, diberikan nilai awal proporsi individu rentan, terinfeksi dan populasi dengan $S(0) = 450$, $I(0) = 50$ dan $N(0) = 500$.Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi. Dari simulasi dapat dilihat kestabilan model (7).

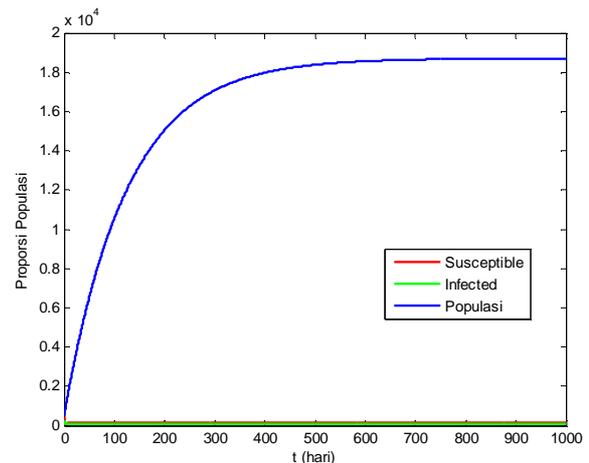
Tabel 1. Nilai Simulasi Parameter

Parameter	Nilai Parameter	
	Bebas penyakit Saat $R_0 < 1$	Endemik Saat $R_0 > 1$
δ	250	180
ω	0.0018	0.002
γ	0.005	0.007
μ	0.006	0.002
β	0.92	0.81
ρ	0.8	0.4

Berikut diberikan simulasi pada saat titik kesetimbangan bebas penyakit $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$.



Gambar 2. Simulasi titik kesetimbangan bebas penyakit $R_0 < 1$



Gambar 3. Simulasi titik kesetimbangan endemik $R_0 > 1$

1. Berdasarkan

populasi manusia semakin lama semakin meningkat. Sementara laju perubahan populasi terinfeksi (*Infected*) akan menuju kepunahan sehingga kurva akan menuju nol. Sedangkan untuk laju perubahan populasi rentan (*Susceptible*) akan menuju perbandingan laju kelahiran dengan laju kematian alaminya ditambah laju orang yang telah di vaksinasi. Diperoleh nilai eigen sebesar $(-0.8050, -0.0050, -3720)$ sehingga pada saat $R_0 < 1$ keadaan titik stabil.

Pada gambar 3 diperoleh $R_0 = 2.428 > 1$. Dari gambar 3, terlihat bahwa laju perubahan populasi manusia semakin lama semakin mengalami kenaikan, karena diakibatkan oleh faktor kematian alaminya dan jumlah kelahiran. Sementara untuk laju perubahan populasi terinfeksi (*Infected*) akan mendekati kurva populasi rentan (*Susceptible*). Sedangkan laju perubahan populasi rentan (*Susceptible*) menurun karena akan menuju perbandingan laju kelahiran dengan laju kematian alaminya ditambah laju orang yang telah divaksinasi. Diperoleh nilai eigen sebesar $(-0.0080 + 0.000i, -0.6169 + 0.4869i, -0.6169 - 0.4869i)$ sehingga pada saat $R_0 > 1$ keadaan titik kesetimbangan endemik stabil.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika SIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \rho S - \beta I - \gamma R \end{aligned}$$

Karena populasi S (*susceptible*) dan I (*infected*) akan menuju R (*recovered*) dan jumlah populasi tidak konstan karena perbedaan antara jumlah kelahiran dan kematian, sehingga pada populasi R (*recovered*) dapat diganti dengan jumlah populasi $N(t)$, dengan demikian diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - \omega SI - \rho S - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} &= \omega SI - \gamma I - \mu I - \beta I \\ \frac{dN}{dt} &= \delta - \gamma N - \mu I \end{aligned}$$

2. Diperoleh dua titik kestabilan dari model matematika pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksinasi yaitu :
- Titik kestabilan bebas penyakit yaitu $E_*(S_*, I_*, N_*) = \left(\frac{\delta}{\rho+\gamma}, 0, \frac{\delta}{\gamma} \right)$ yang stabil pada saat $R_0 < 1$. Sehingga saat $R_0 < 1$, semakin lama penyakit campak akan menghilang dari populasi.
 - Titik kestabilan endemik penyakit yaitu $E^*(S^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\gamma+\mu+\beta}{\omega}, (q-1) \left(\frac{\rho+\gamma}{\omega} \right), \frac{\delta\omega-\mu(q-1)(\rho+\gamma)}{\omega\gamma} \right)$, yang stabil pada saat $R_0 > 1$. Sehingga saat kesetimbangan ini penyakit akan ada sampai pada waktu yang tidak terbatas.

5. Daftar Pustaka

- A'maludin, H., Faruk, A., dan Cahyono, E. S. (2016). Analisis Kestabilan Model Epidemik SIR untuk Penyakit Tuberkulosis, hlm. 207-213. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*, BKS-PTN Barat: Palembang
- Awaluddin, M., Affandi, P., dan Faisal. 2018. Model Epidemiologi SIR dengan Vaksinasi dan Pengobatan. *Jurnal Matriks*. **1**:61-70.
- Campbell, S. L., and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. Princeton University Press: New Jersey.
- Derouich, M. and Boutayeb, A. 2008. An Avian Mathematical Model. *Applied Mathematical Science*. **36**(2): 1749-1760.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biologi An Introduction. Third edition*. Springer-Verlag: New York Berlin Heidelberg.
- Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education: New Jersey.
- Olsder, G. J., et al. 2011. *Mathematical System Theory*. 4th Edition. VVSD: Netherland.
- Tu, PNV. 1994. *Dynamical System An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer Verlag: New York.

EVALUASI NILAI UN SMA/MA IPA PROVINSI LAMPUNG DENGAN GRAF *MAXIMUM SPANNING TREE*

Sugama Maskar¹, Refiesta Ratu Anderha¹, Andriyanto¹

¹Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Teknokrat Indonesia, Bandar Lampung
Jalan H. Zainal Abidin Pagar Alam No.9 -11, Labuhan Ratu, Kedaton, Kota Bandar Lampung
Penulis Korespondensi : sugama_maskar@teknokrat.ac.id¹

Abstrak

The purpose of this paper is to evaluate the National Examination scores for Senior High School level science program of Lampung Province in the academic year 2016-2017. Method in this research is to determine subjects that affect other subjects, hereinafter referred to the subject center. The determination of the subject center using the analysis of Maximum Spanning Tree (MST) graph model. The result of initial analysis of MST graph shows that there are two subjects that become the center, mathematics and biology. Then the eccentricity analysis is did by determining longest simple path on the MST graph. Mathematics has longest simple path, therefore mathematics is the center of the subjects. The Conclusion of this research is mathematics allegedly closely related to other subjects. As a result, ideas on mathematics can be explored and applied to other subjects so that the average of National Examination for Senior High School level in Lampung Province in the next year will increase.

Kata kunci: *evaluation, MST, national examination, Lampung.*

1. Pendahuluan

Ujian Nasional (UN) merupakan salah satu tahapan penting yang harus dilaksanakan oleh setiap Sekolah Menengah Atas (SMA) atau setara. Bagi pemerintah, nilai UN menjadi salah satu alat evaluasi pembelajaran melalui Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (Kemendikbud) untuk mengukur mutu pendidikan di Indonesia. Menurut PP No. 13 Tahun 2015, UN bertujuan untuk menilai pencapaian standar kompetensi lulusan secara nasional pada mata pelajaran tertentu. Menteri Pendidikan dan Kebudayaan (Mendikbud), Muhadjir Effendy dalam situs kemdikbud.go.id (2017) memberikan pernyataan bahwa:

“Hasil UN tersebut selanjutnya harus bisa dijadikan dasar perencanaan dan intervensi yang tepat untuk menata langkah dalam memperbaiki mutu pendidikan di Indonesia. Tindak lanjut tersebut tidak hanya dilakukan oleh pemerintah pusat (Kemendikbud), melainkan juga oleh pemerintah daerah, sekolah, maupun guru. Dengan begitu, UN sebagai alat evaluasi pembelajaran dapat dimanfaatkan dengan baik untuk meningkatkan mutu pendidikan secara berkelanjutan.”

Berdasarkan pendapat tersebut, perlu adanya analisis yang cermat untuk mengevaluasi data nilai UN yang ada. Hasil analisis tersebut selanjutnya dapat digunakan oleh berbagai pihak diantaranya pihak sekolah, pemerintah daerah, pemerintah pusat (Kemendikbud), maupun penggiat pendidikan sebagai bahan perbaikan mutu pendidikan.

Apa itu evaluasi pendidikan? Evaluasi pendidikan diterapkan untuk mengetahui prestasi siswa dan mendiagnosis hasil pendidikan, serta memanipulasi peranan penting dalam meningkatkan kualitas pendidikan. Lebih jauh, evaluasi juga dapat menentukan sejauh mana prosedur pendidikan sesuai dengan kemampuan siswa, seberapa praktis dan seberapa berhasilnya dalam mencapai tujuan pendidikan (Jahani, 2012). Selanjutnya, Self dalam Jahani (2012) menyatakan bahwa evaluasi adalah aturan yang mengatur proses pengumpulan dan analisis data. Evaluasi digunakan untuk menentukan apakah tujuan pendidikan sudah terpenuhi atau masih dalam proses, dan sejauh mana. Self juga percaya bahwa tujuan utama dalam pendidikan adalah untuk membuat perubahan dalam perilaku siswa.

Melakukan evaluasi berdasarkan analisis data merupakan salah satu teknik yang baik untuk mendapatkan fakta dari sesuatu yang diteliti. Menurut Qomari (2009) salah satu tahapan yang penting dalam penelitian adalah analisis data dimana data dapat diperoleh dari hasil observasi, wawancara, angket, atau teknik pengumpulan data yang lain untuk kemudian diolah atau dianalisis untuk membantu peneliti menjawab permasalahan yang diteliti. LeCompte dan Schensul dalam Kawulich (2004) mendefinisikan analisis data sebagai proses mendeskripsikan dan menginterpretasikan data agar dapat dipahami. Kemudian,

Patton dalam Kawulich (2004) menunjukkan bahwa terdapat tiga hal yang dilakukan pada saat proses analisis data: Data dikumpulkan, kemudian data dikelompokkan, terakhir data diidentifikasi dan dicari hubungannya dengan permasalahan yang diteliti.

Pada penelitian ini peneliti tertarik untuk memberikan kontribusi dalam mengevaluasi data nilai UN dengan melakukan analisis data hasil UN. Peneliti tertarik untuk mengetahui mata pelajaran yang memiliki pengaruh paling tinggi pada mata pelajaran lain di UN. Pengaruh yang dimaksud artinya bahwa mata pelajaran tersebut berkaitan erat dengan mata pelajaran lain di UN. Peneliti beranggapan apabila mata pelajaran yang dimaksudkan dapat diidentifikasi, hal tersebut dapat menjadi acuan bahan evaluasi selanjutnya untuk meningkatkan mutu pembelajaran. Peneliti juga beranggapan bahwa gagasan pada mata pelajaran yang berpengaruh tersebut dapat diimplementasikan pada mata pelajaran lain sebagai upaya untuk menentukan kompetensi dasar yang tepat sasaran pada suatu mata pelajaran.

Berdasarkan permasalahan tersebut, peneliti mencoba mencari teknik analisis data yang tepat untuk menjawabnya. Saat ini teknik analisis data semakin berkembang sehingga peneliti memiliki banyak pilihan untuk menggunakan teknik yang tepat. Pada penelitian ini, untuk mengukur tingkat pengaruh anatara dua mata pelajaran di UN, peneliti menggunakan teori statistika dengan teknik regresi, khususnya koefisien korelasi. Selanjutnya teori graf, *spanning tree*, digunakan untuk mencari mata pelajaran yang paling berpengaruh pada nilai UN tersebut.

Walpole dkk (2012) menyatakan bahwa analisis korelasi mencoba mengukur kekuatan hubungan atau pengaruh antara dua variabel, katakanlah X dan Y, dengan menggunakan suatu bilangan yang disebut koefisien korelasi. Sebagai contoh, jika X dan Y mewakili panjang dan keliling dari jenis tulang tertentu dalam tubuh orang dewasa, kita mungkin akan melakukan studi antropologis untuk menentukan apakah ada kaitan antara nilai X yang besar dengan nilai Y yang besar dan sebaliknya.

Spanning tree telah banyak diterapkan dalam berbagai kajian ilmu seperti jaringan komputer, pembangunan rel kereta api, penentuan jarak optimal, sampai pemasaran produk (Nurviana 2016). Untuk menentukan mata pelajaran yang paling berpengaruh pada UN, peneliti menggunakan model graf yang disebut pohon atau tree. Rosen (2013) dalam bukunya menyebutkan bahwa graf pohon dinamakan begitu karena memang menyerupai pohon. Pohon keluarga adalah contoh dari model graf pohon dimana titik graf diinterpretasikan sebagai anggota keluarga dan sisi graf sebagai hubungan keluarga. Apabila dicermati pohon keluarga pasti memiliki seseorang yang menempati posisi paling atas atau biasa disebut nenek moyang. Berdasarkan hal tersebut, graf pohon merupakan model yang tepat untuk digunakan dalam mencari pusat mata pelajaran yang mempengaruhi mata pelajaran lain di UN.

Selanjutnya, untuk membentuk graf pohon tersebut peneliti menggunakan teori *Maximum Spanning Tree (MST)*. *Maximum Spanning Tree (MST)* adalah graf pohon merentang yang memiliki bobot maksimum. Model graf MST tersebut dapat dibentuk dengan cara mengeleminasi beberapa bobot untuk setiap sisi dan menerapkan algoritma Kruskal (Pemmaraju and Skiena 2003). Kenapa peneliti tidak menggunakan *Minimum Spanning Tree*? Alasannya karena bobot yang digunakan merupakan representasi dari nilai koefisien korelasi antara dua mata pelajaran. Nilai koefisien korelasi bernilai antara 0 sampai dengan 1 untuk hubungan yang linear, dengan interpretasi bahwa semakin nilai koefisien korelasi tersebut mendekati 1, hubungan atau pengaruh dua variabel tersebut semakin besar. Nilai 0 menunjukkan tidak ada pengaruh antara dua variabel tersebut dan 1 menunjukkan pengaruh yang sempurna antara dua variabel tersebut. Akibatnya, peneliti menggunakan analisis *Maximum Spanning Tree (MST)* terhadap model graf nilai UN yang nantinya akan terbentuk.

Berdasarkan pemaparan tersebut, peneliti tertarik untuk mengevaluasi nilai UN dengan menggunakan analisis *Maximum Spanning Tree (MST)* untuk mencari pusat mata pelajaran yang paling mempengaruhi nilai mata pelajaran lainnya di UN. Pada penelitian ini peneliti menggunakan data nilai UN Sekolah Menengah Atas (SMA) dan Madrasah Aliyah (MA) program Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) tahun pelajaran 2016-2017 se-Provinsi Lampung dengan alasan peneliti merupakan tenaga pendidik (dosen) di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Sastra dan Ilmu Pendidikan (FSIP), Universitas Teknokrat Indonesia (UTI) yang notabene berdomisili di Provinsi Lampung. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi nyata kepada Provinsi Lampung terutama pada bidang pendidikan.

2. Bahan dan Metode

Analisis data pada penelitian ini dimulai dengan mengumpulkan data nilai UN SMA program IPA tahun pelajaran 2016-2017 se-Provinsi Lampung. Data tersebut diperoleh dari situs resmi Kementerian Pendidikan Dan Kebudayaan (Kemendikbud) yang merekap semua nilai UN seluruh indonesia, yaitu puspendik.kemendikbud.go.id. Data yang diambil adalah data nilai mata pelajaran di UN per sekolah. Terdapat enam mata pelajaran yang di UN kan pada level SMA/MA program IPA, yaitu (BND), (BNG), (MAT), (BIO), (FIS), (KIM).

Data UN SMA/MA program IPA tahun pelajaran 2018-2019 tersebut kemudian diolah menggunakan *Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)* versi 15 untuk mencari nilai koefisien korelasi antar pelajaran. Nilai koefisien korelasi tersebut diperoleh menggunakan uji korelasi *Pearson* atau *Spearman*. Koefisien korelasi *Pearson* digunakan apabila kedua variabel menunjukkan hubungan yang linier, sebaliknya korelasi *Spearman* digunakan apabila kedua variabel menunjukkan hubungan yang tidak linier.

Nilai koefisien korelasi yang telah diperoleh kemudian diklasifikasikan berdasarkan tingkatannya. Tingkatan nilai koefisien korelasi tersebut terdapat pada Tabel 1 (Sugiyono, 2015).

Tabel 1. Tingkatan Koefisien Korelasi

Interval Koefisien	Tingkat Hubungan
0.00 – 0.199	Sangat rendah
0.20 – 0.399	Rendah
0.40 – 0.599	Sedang
0.60 – 0.799	Kuat
0.80 – 1.00	Sangat kuat

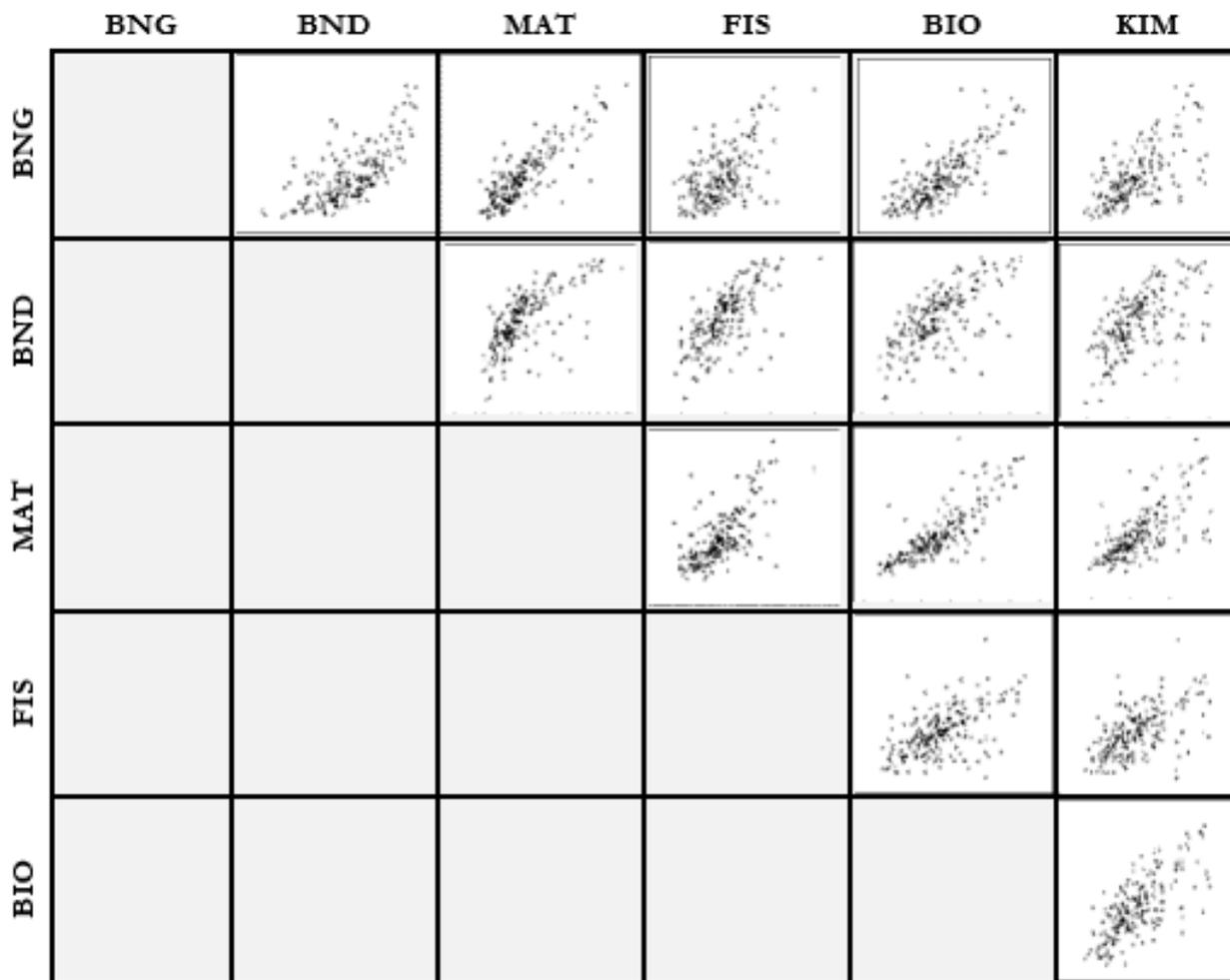
Selanjutnya, peneliti membuat model graf berdasarkan 6 mata pelajaran dan nilai koefisien korelasi tersebut. Mata pelajaran diinterpretasikan sebagai titik graf dan nilai koefisien korelasi sebagai bobot sisi graf. Analisis *Maximum Spanning Tree (MST)* digunakan untuk membentuk graf pohon dari graf awal agar dapat ditentukan pusat mata pelajaran yang paling berpengaruh pada nilai UN. Penentuan mata pelajaran yang paling berpengaruh tersebut menggunakan algoritma Kruskal. Adapun algoritma Kruskal pada penelitian ini sedikit berbeda karena menggunakan *Maximum Spanning Tree*. Berdasarkan Wattimena dan Lawalata (2013) algoritma Kruskal bersal dari analogi *growing forest* untuk membentuk pohon merentang minimum T dari graf G . Algoritma Kruskal akan terus menambahkan sisi-sisi ke dalam hutan atau *forest* yang sesuai sehingga tidak akan ada lagi *forest*, melainkan hanyalah sebuah pohon merentang. Dengan mengubah nilai minimum menjadi maksimum, kerja Algoritma Kruskal menjadi sebagai berikut:

- 1) Bobot sisi graf G diurut menurun dari bobot terbesar ke terkecil,
- 2) Pilih sisi (u, v) yang mempunyai bobot paling maksimum yang tidak membentuk sirkuit di T . Tambahkan (u, v) kedalam T .
- 3) Ulangi langkah 2 sampai pohon merentang maksimum terbentuk, yaitu ketika sisi di dalam pohon merentang T berjumlah $n - 1$ (n merupakan jumlah simpul pada graf).

Setelah Graf *MST* ditentukan langkah selanjutnya adalah menentukan akar dari graf *MST* tersebut dengan cara menentukan titik graf yang mempunyai derajat paling tinggi. Jika terdapat lebih dari satu titik yang mempunyai derajat paling tinggi atau dengan kata lain graf *MST* tersebut tidak memiliki akar, maka analisis eksentrisitas dilakukan untuk menentukan mata pelajaran yang menjadi pusat. Eksentrisitas titik dari graf pohon yang tidak memiliki akar adalah lintasan terjauh yang dapat ditempuh oleh titik tersebut. Suatu titik disebut pusat apabila tidak ada titik pada graf pohon yang dimaksud memiliki nilai eksentrisitas yang lebih kecil daripada titik tersebut (Rosen, 2013). Namun, pada penelitian ini penentuan titik pusat dipilih titik yang memiliki nilai eksentrisitas terbesar. Hal tersebut dilakukan karena penentuan model graf pohon pada penelitian ini menggunakan analisis *Maximum Spanning Tree*, bukan *Minimum Spanning Tree* seperti yang telah dijelaskan pada bagian pendahuluan.

3. Hasil dan Pembahasan

Seperti telah dibahas sebelumnya, analisis korelasi pada penelitian ini dilakukan dengan tujuan mengetahui nilai koefisien korelasi antara dua mata pelajaran di UN. Sebelum menentukan metode penentuan nilai koefisien korelasi, menggunakan nilai koefisien korelasi *Pearson* atau *Spearman*, terlebih dahulu peneliti menentukan hubungan antara dua mata pelajaran di UN dengan menggunakan grafik *Skatterplot*. Pembentukan grafik *Skatterplot* dilakukan menggunakan perangkat lunak *SPSS* versi 15. Adapun grafik *Skatterplot* antara dua mata pelajaran di UN tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Scatterplot Data Nilai UN SMA/MA IPA Provinsi Lampung T.A. 2016-2017

Perhatikan gambar tersebut. *Scatterplot* tersebut menunjukkan hanya dua pasang mata pelajaran yang cenderung mempunyai hubungan linear, yaitu Bahasa Inggris dengan Matematika serta Matematika dengan Biologi. Pasangan dua mata pelajaran lain cenderung mempunyai hubungan yang tidak linear. Berdasarkan hal tersebut, penentuan nilai koefisien korelasi menggunakan koefisien korelasi *Spearman*.

Nilai koefisien korelasi *Spearman* juga ditentukan dengan menggunakan software *SPSS* versi 15. Nilai koefisien korelasi *Spearman* antar dua mata pelajaran di UN tersebut terdapat pada Tabel 1. Berdasarkan Tabel 1, nilai koefisien korelasi tertinggi adalah mata pelajaran Matematika-Biologi dengan nilai koefisien korelasi sebesar 0.808. Nilai koefisien korelasi terendah adalah mata pelajaran Bahasa Inggris-Fisika dengan nilai 0.496. Berdasarkan data tersebut, rata-rata nilai koefisien korelasinya cukup baik, hal tersebut diperkuat dengan data pada Tabel 2 berikut.

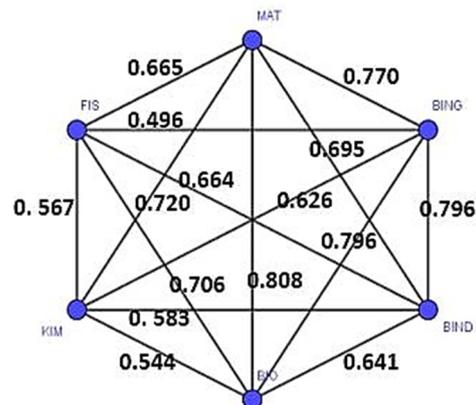
Tabel 2. Tabel Tingkat Hubungan Nilai MataPelajaran UN SMA/MA IPA ProvinsiLampung T.A. 2016-2017

Pasang Mata Pelajaran UN	Nilai Koefisien Korelasi	Tingkat Hubungan
BING-BND	0.674	Kuat
BING-MAT	0.770	Kuat
BING-FIS	0.496	Sedang
BING-BIO	0.796	Kuat
BING-KIM	0.626	Kuat
BIND-MAT	0.695	Kuat
BIND-FIS	0.664	Kuat
BIND-BIO	0.641	Kuat
BIND-KIM	0.583	Sedang
MAT-FIS	0.665	Kuat

Pasang Mata Pelajaran UN	Nilai Koefisien Korelasi	Tingkat Hubungan
MAT-BIO	0.808	Sangat Kuat
MAT-KIM	0.720	Kuat
FIS-BIO	0.706	Kuat
FIS-KIM	0.567	Sedang

Tabel 2 tersebut menunjukkan bahwa tingkat hubungan nilai mata pelajaran UN SMA/MA provinsi Lampung tersebut rata-rata memiliki tingkat hubungan yang kuat dan tingkat hubungannya positif, ditunjukkan dengan tidak ada nilai negatif pada koefisien korelasi tersebut. Mata pelajaran Matematika-Biologi bahkan memiliki tingkat hubungan yang sangat kuat. Artinya bahwa untuk setiap pasang mata pelajaran di UN tersebut jika mata pelajaran tertentu nilainya baik, maka mata pelajaran yang lainnya juga akan baik, begitupun sebaliknya.

Selanjutnya setelah nilai koefisien korelasi mata pelajaran di UN tersebut diperoleh, dibentuk graf *MST* untuk mencari mata pelajaran yang menjadi pusat. Penentuan graf *MST* pada makalah ini menggunakan algoritma Kruskal. Adapun sebelum mengimplementasikan algoritma tersebut, dibuat terlebih dahulu graf awal, yaitu sebuah graf komplit dengan 6 buah titik yang merepresentasikan mata pelajaran di UN dan sisi graf yang merepresentasikan hubungan antara dua mata pelajaran di UN. Bobot sisi graf komplit tersebut diisi oleh koefisien korelasi antar dua mata pelajaran di UN. Graf awal mata pelajaran di UN tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Awal Mata Pelajaran UN SMA/MA IPA Provinsi Lampung T.A. 2016-2017

Berdasarkan graf awal tersebut akan dibentuk graf *MST* dengan algoritma Kruskal dengan terlebih dahulu mengurutkan bobot sisi graf dari yang tertinggi ke terendah. Data urut nilai bobot sisi graf tersebut terdapat pada Tabel 3.

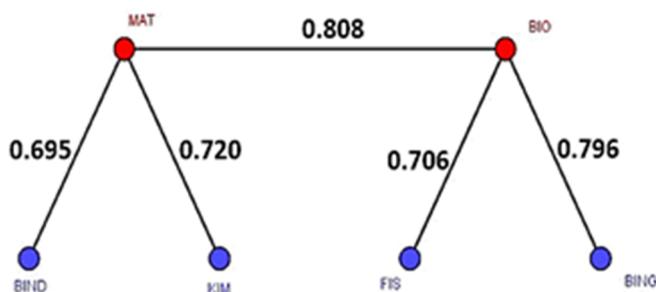
Tabel 3. Data Urut Nilai Bobot Sisi Graf Awal

Pasang Mata Pelajaran UN	Nilai Koefisien Korelasi
MAT-BIO	0.808
BING-BIO	0.796
BING-MAT	0.770
MAT-KIM	0.720
FIS-BIO	0.706
BIND-MAT	0.695
BING-BIND	0.674
MAT-FIS	0.665
BIND-FIS	0.664
BIND-BIO	0.641
BING-KIM	0.626
BIND-KIM	0.583
FIS-KIM	0.567
BING-FIS	0.496

Berdasarkan data urut tersebut, selanjutnya dilakukan algoritma Kruskal untuk membentuk graf *MST*. Langkah-langkah algoritma Kruskal untuk pembentukan graf *MST* tersebut dijelaskan sebagai berikut:

1. Tambahkan sisi pada mata pelajaran Matematika dan Biologi, karena memiliki bobot yang paling besar.
2. Tambahkan sisi pada mata pelajaran Biologi dan Bahasa Inggris sebagai bobot terbesar kedua.
3. Sisi pada matematika dan Bahasa Inggris tidak bisa ditambahkan karena akan membentuk sirkuit antara Matematika, Biologi, dan Bahasa Inggris. Oleh karena itu, diambil bobot terbesar selanjutnya yaitu sisi mata pelajaran Kimia dan Matematika.
4. Tambahkan sisi graf pada Matematika dan Bahasa Indonesia sebagai bobot terbesar kelima.
5. Tambahkan sisi pada titik Fisika dan Biologi. Karena telah terbentuk sisi sebanyak $n-1$ dengan n menyatakan banyak titik pada graf tersebut, sehingga penarikan sisi pada langkah 5 merupakan langkah terakhir.

Graf *MST* yang terbentuk terdapat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf *MST* UN SMA/MA IPA Provinsi Lampung T.A. 2016-2017

Pelajaran yang memiliki derajat paling besar, yaitu Matematika dan Biologi, $d(MAT) = d(BIO) = 3$, sehingga graf *MST* tersebut tidak memiliki akar. Berdasarkan pemaparan sebelumnya apabila graf pohon tidak memiliki akar, dilakukan analisis eksentrisitas untuk menentukan pusat dari graf pohon tersebut. Eksentrisitas titik dari graf pohon yang tidak memiliki akar adalah lintasan terjauh yang dapat ditempuh oleh titik tersebut (Rosen, 2013). Data nilai lintasan dari titik Matematika dan Biologi terhadap mata pelajaran lain terdapat pada Tabel 3.

Tabel 4. Data Nilai Eksentrisitas Matematika dan Biologi

Mata Pelajaran	MAT	KIM	FIS	BIO	BIND	BING
MAT	0	0.720	1.514	0.808	0.695	1.604

BIO	0.808	1.528	0.706	0	1.503	0.796
-----	-------	-------	-------	---	-------	-------

Rosen (2013) menyatakan bahwa suatu titik disebut pusat apabila tidak ada titik pada graf pohon yang dimaksud memiliki nilai eksentrisitas yang lebih kecil daripada titik tersebut. Seperti yang telah dibahas sebelumnya karena pada penelitian ini menggunakan graf pohon *Maximum Spanning Tree*, pusat mata pelajaran yang dimaksud adalah mata pelajaran yang memiliki nilai eksentrisitas yang paing tinggi. Tabel 4 menunjukkan bahwa nilai lintasan tertinggi pada mata pelajaran Matematika adalah 1.604 dan pada mata pelajaran Biologi sebesar 1.528. Akibatnya, nilai eksentrisitas paling tinggi dimiliki oleh mata pelajaran Matematika, sehingga Matematika merupakan pusat dari mata pelajaran pada UN SMA/MA program IPA Provinsi Lampung tahun pelajaran 2016-2017.

4. Kesimpulan

Dari hasil pemodelan graf *MST* terhadap nilai UN SMA/MA IPA se-Provinsi Lampung diperoleh bahwa mata pelajaran yang menjadi pusat adalah Matematika. Mata pelajaran Matematika diduga sangat berkaitan erat dengan mata pelajaran lainnya. Artinya, nilai matematika berhubungan positif dengan mata pelajaran lain di UN tersebut, apabila nilai mata pelajaran Matematika meningkat, nilai mata pelajaran lain juga cenderung meningkat.

Hasil analisis tersebut juga menyiratkan bahwa apabila terdapat siswa yang mempunyai nilai mata pelajaran matematika diatas rata-rata dari siswa yang lain, nilai mata pelajaran lain siswa tersebut juga cenderung akan diatas rata-rata siswa lainnya. Hal tersebut juga berlaku sebaliknya, apabila terdapat siswa dengan rata-rata nilai UN matematikanya dibawah rata-rata siswa lainnya, nilai mata pelajaran lain siswa tersebut juga di UN akan cenderung dibawah rata-rata siswa lainnya.

Untuk meningkatkan nilai UN, khususnya UN SMA/MA IPA di provinsi lampung, Pemerintah Provinsi Lampung dapat memulai dengan meningkatkan kemampuan matematika siswanya. Dengan meningkatnya kemampuan matematika siswa di sekolah, berdasarkan pemodelan graf *MST* tersebut, diduga siswa tidak akan menemukan kesulitan berarti untuk mempelajari pelajaran lain. Akibatnya nilai UN pelajaran lain juga akan meningkat.

Sebaiknya dilalukan penelitian lebih lanjut dari hasil evaluasi nilai UN SMA/MA program IPA Provinsi Lampung dengan analisis graf *MST* pada penelitian ini. Penelitian selanjutnya dapat berupa perluasan objek penelitian, bisa ditambahkan pada program Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS) atau Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) agar diperoleh hasil lebih umum.

Penelitian lanjutan juga dapat berupa identifikasi gagasan yang terdapat pada ilmu matematika. Gagasan pada ilmu Matematika tersebut nantinya dapat diterapkan pada cabang ilmu lainnya. Penerapan gagasan tersebut dapat diimplementasikan untuk menyusun kompetensi dasar pada mata pelajaran lain. Gagasan ilmu matematika juga dapat diterapkan guru pada siswanya ketika proses pembelajaran atau sebagai kompetensi sikap sebagai tolak ukur keberhasilan pembelajaran di kelas untuk semua cabang ilmu.

5. Daftar Pustaka

- _____. (2017). *Rekap Hasil Ujian Nasional Tingkat Sekolah* [internet]. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan [accessed 19 January 2017]. Available from <https://puspendik.kemdikbud.go.id/hasil-un/>.
- Jahanian, R. (2012). Educational Evaluation: Function and Applications in Educational Contexts. *International Journal of Academic Research in Economics and Management Sciences*, 1(2), 253-257
- Kawulich, Barbara. (2004). Data Analysis Techniques in Qualitative Research. *Journal of Research in Education*, 14(1), 96-113.
- Lawalata, S. & Wattimena, A.Z. (2013). Aplikasi Algoritma Kruskal dalam Pengoptimalan Panjang Pipa. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 7(2), 13-18.

- Maulipaksi, Desliana. (2017). *Hasil UN 2017: Indeks Integritas Meningkat* [internet]. [accessed 10 October 2017] . Available from <https://www.kemdikbud.go.id/main/blog/2017/05/hasil-un-2017-indeks-integritas-meningkat>.
- Nurviana. (2016). Mengukur Mutu Pendidikan Berdasarkan Nilai Ujian Nasional Program IPA SMAN 3 Putra Bangsa Lhoksukon Aceh Utara Tahun 2014 Dan 2015. S2 Tesis. Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Pemmaraju S. & Skiena, S. (2003). *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*. Cambridge University Press, New York.
- Qomari, Rohmad. (2009). Teknik Penelusuran Analisis Data Kuantitatif dalam Penelitian Kependidikan. *Jurnal Pemikiran Alternatif Kependidikan*, 14(3), 1-11
- Republik Indonesia. (2015). *Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 3 Tahun 2015*. Sekretariat Negara, Jakarta
- Rosen, Kenneth H. (2013). *Discrete Mathematics and its Applications, 7th edition*. McGraw-Hill: New York.
- Sugiyono. (2015). *Statistika untuk Penelitian*. Alfabeta, Bandung
- Walpole, R., Myers, R. (2012). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists, 9th edition*. Pearson Education, New York.

PENENTUAN RUTE TERPENDEK PADA OPTIMALISASI JALUR TOL TRANS JAWA DENGAN MENERAPKAN ALGORITMA *FLOYD-WARSHALL*

Maharani Damayanti¹, Notiragayu¹, La Zakaria¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : maharanidamayanti56@gmail.com¹

Abstrak

Di Pulau Jawa, Tol Trans Jawa merupakan salah satu bagian prioritas program nasional yang diharapkan mampu menghubungkan antara Jawa bagian barat hingga timur sehingga dapat dibangun infrastruktur yang terkoneksi. Oleh karena itu, untuk efisiensi penggunaan Tol Trans Jawa maka dalam makalah ini akan diteliti jarak dan rute terpendek antar daerah dengan menggunakan algoritma Floyd-Warshall. Dengan algoritma ini dihasilkan bobot terkecil dari semua jalur yang menghubungkan sebuah daerah dengan daerah lainnya (disebut sebagai pasangan titik). Selain itu juga ditentukan untuk semua pasangan titik demi titik hingga mencapai titik tujuan dengan jumlah bobot yang paling minimum. Simulasi dalam mencapai tujuan makalah ini menggunakan software MATLAB.

Kata kunci: Jalur Tol Trans Jawa, Graf, Rute Terpendek, Floyd-Warshall

1. Pendahuluan

Di pulau Jawa, Tol Trans Jawa merupakan salah satu bagian prioritas program nasional yang diharapkan mampu menghubungkan antara Jawa bagian barat hingga bagian timur sehingga lahirnya infrastruktur yang terkoneksi. Pencarian rute terpendek telah diterapkan diberbagai bidang untuk mengoptimasi kinerja suatu sistem baik untuk meminimalkan biaya ataupun mempercepat jalurnya suatu proses. Salah satu aplikasi pencarian rute terpendek yang paling menarik untuk dibahas adalah masalah transportasi. Sebagai studi kasus pada makalah ini adalah jalur Tol Trans Jawa untuk penentuan rute terpendek dan jarak untuk semua pasangan titik (jalur yang menghubungkan sebuah daerah dengan daerah lainnya) sangat diperlukan untuk memberi efisiensi pada jarak yang akan ditempuh.

Berdasarkan teori graf, permasalahan rute terpendek dapat didefinisikan sebagai sebuah permasalahan dalam menemukan lintasan antara dua buah titik pada graf berbobot yang memiliki gabungan nilai dari jumlah bobot pada sisi graf yang dilewati dengan jumlah yang paling minimum (Salaki, 2011). Ada beberapa metode untuk pencarian rute terpendek yaitu algoritma *Dijkstra*, algoritma *Bellman-Ford*, algoritma *Floyd-Warshall* dan sebagainya. Dalam menemukan rute terpendek algoritma *Dijkstra* lebih cepat namun algoritma *Dijkstra* yang menerapkan prinsip *greedy* tidak selalu berhasil memberikan solusi optimum untuk kasus penentuan lintasan terpendek (*single pair shortest path*) karena algoritma *Dijkstra* hanya memikirkan solusi terbaik yang akan diambil pada setiap langkah tanpa memikirkan konsekuensi ke depan serta algoritma *Dijkstra* tidak dapat menangani sisi graf berbobot negative. Sedangkan pada algoritma *Bellman-Ford* dapat menangani masalah lintasan terpendek pada sisi graf berbobot negatif, namun membutuhkan waktu yang lebih lama (Kamayudi, 2006). Pada algoritma *Floyd-Warshall* yang menggunakan program dinamis lebih menjamin keberhasilan dalam penentuan solusi minimum karena algoritma ini dapat membandingkan semua kemungkinan lintasan pada graf untuk setiap sisi dari semua titik yang dilewati (Novandi, 2007).

Oleh sebab itu, pada makalah ini solusi yang digunakan untuk menyelesaikan kasus penentuan rute terpendek adalah dengan menerapkan algoritma *Floyd-Warshall* untuk memperoleh jarak dan rute terpendek untuk setiap pasangan titik dengan menggunakan *software* MATLAB.

Graf $G(V, E)$ merupakan suatu himpunan dari titik dan garis. Graf berarah G terdiri dari serangkaian titik $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, serangkaian garis $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, dan pemetaan yang memetakan setiap sisi ke beberapa pasangan titik (v_i, v_j) (Deo, 1989). Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bobot maka $W(e)$ disebut bobot dari *edge* (Munir, 2001).

Algoritma *Floyd-Warshall* adalah salah satu pemrograman dinamis, yaitu suatu metode yang melakukan pemecahan masalah dengan memandang solusi yang akan diperoleh sebagai suatu keputusan

yang saling terkait. Artinya solusi-solusi tersebut dibentuk dari solusi yang berasal dari tahap sebelumnya dan ada kemungkinan solusi lebih dari satu (Ramadhan, 2011).

Menurut (Jayanti, 2014) mekanisme algoritma *Floyd-Warshall* dalam menentukan lintasan terpendek terdiri dari beberapa langkah yang harus dilaksanakan antara lain :

1. Merepresentasikan suatu graf sebagai suatu matriks berbobot. Dimana bobot untuk setiap *edge* adalah

$$W_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ W(i, j), & \text{jika } i \neq j \text{ dan } (i, j) \in E \\ \infty, & \text{jika } i \neq j \text{ dan } (i, j) \notin E \end{cases} \quad (1)$$

Format *output* berupa matriks $n \times n$ berjarak $D = [d_{ij}]$ dimana d_{ij} adalah jarak dari *vertex* i ke j .

2. Melakukan dekomposisi algoritma *Floyd-Warshall* sebagai berikut.

- $d_{ij}^{(k)}$ merupakan panjang dari *shortest path* dari i ke j , sehingga semua *vertex intermediate* yang terdapat pada path (jika ada) terkumpul pada $\{1, 2, \dots, k\}$.
 - $d_{ij}^{(0)}$ dikumpulkan pada W_{ij} yaitu tidak ada *vertex intermediate*
 - $d^{(k)}$ menjadi matriks $n \times n$ $[d_{ij}^{(k)}]$
 - Tentukan $d_{ij}^{(n)}$ sebagai jarak dari i ke j kemudian hitung $d^{(n)}$
 - Hitung $d^{(k)}$ untuk $k = 0, 1, \dots, n$
3. Menentukan susunan *shortest path*, yaitu dengan dilakukan dua pengamatan terlebih dahulu sebelum langkah lebih jauh
- Sebuah *shortest path* tidak berisi *vertex* yang sama sebanyak dua kali
 - Untuk sebuah *shortest path* dari i ke j dengan beberapa *vertex intermediate* pada path dipilih dari kumpulan $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan dua kemungkinan, yaitu
 1. k bukan merupakan *vertex* pada path (path terpendek memiliki panjang $d_{ik}^{(k-1)}$).
 2. k merupakan *vertex* pada path (path terpendek memiliki panjang $d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$).
 - Setelah melakukan pengamatan di atas, kemudian dilakukan penentuan *shortest path* dari i ke j yang memuat *vertex* k .
 - *Shortest path* tersebut memuat sebuah *subpath* dari i ke k dan sebuah *subpath* dari k ke j .
 - Setiap *subpath* hanya bisa memuat *vertex intermediate* pada $\{1, \dots, k-1\}$ dan memiliki nilai terkecil, kemudian sebut sebagai $d_{ik}^{(k-1)}$ dan $d_{kj}^{(k-1)}$ sehingga path memiliki panjang $d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$.
4. Melakukan iterasi yang dimulai dari iterasi ke 0 sampai dengan n . Perhitungan yang dilakukan yaitu :
- Menentukan $D(0)$ atau iterasi ke 0 $= [W_{ij}]$ merupakan matriks berbobot
 - Menentukan $D(k)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\} \quad (2), \text{ untuk } k = 1, \dots, n \text{ dimana } n \text{ adalah jumlah vertex.}$$

2. Metodologi Penelitian

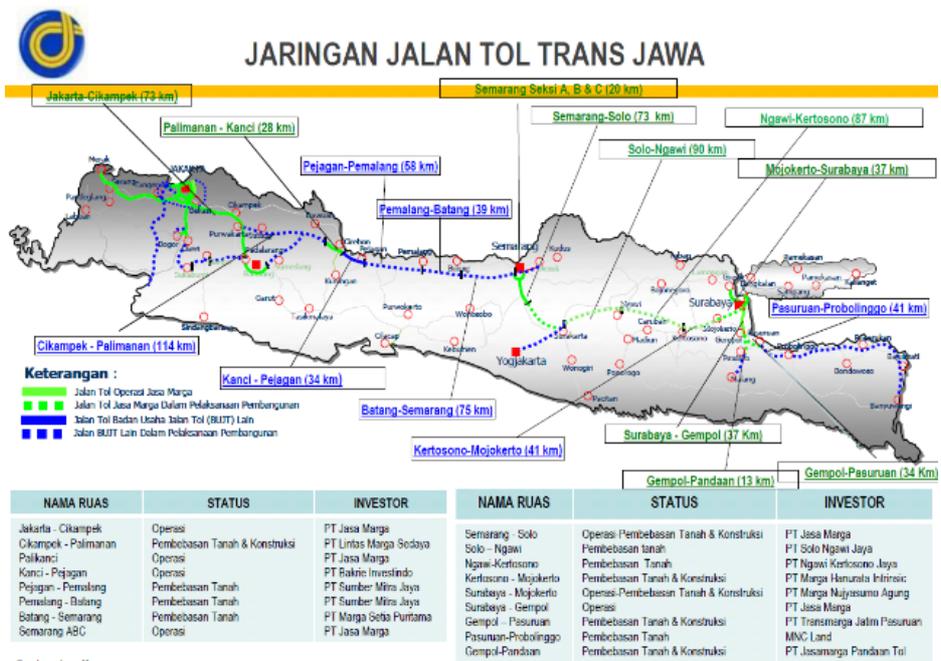
Adapun langkah-langkah dari penelitian ini adalah

1. Mendefinisikan Masalah
Mendefinisikan masalah ialah tahapan dalam menetapkan permasalahan yang berhubungan dengan penentuan rute terpendek
2. Studi Literatur
Studi literatur ialah tahapan dalam mengumpulkan materi referensi mengenai algoritma yang dapat menyelesaikan masalah rute terpendek dari buku-buku, jurnal ilmiah, artikel populer, dan lain-lain.
3. Pengumpulan Data
Pengumpulan data merupakan tahapan dalam mengumpulkan data jaringan jalur Tol Trans Jawa, untuk memperoleh jarak antar sebuah jalur dengan jalur lainnya berdasarkan data Jasa Marga dan sumber-sumber yang akurat.
4. Pemodelan Graf dari Data
Pada tahap ini data dari antar sebuah jalur dengan jalur lainnya pada jalur Tol Trans Jawa dibentuk menjadi sebuah graf berbobot yang memiliki arah.
5. Penerapan Algoritma Floyd-Warshall
Pada tahap ini graf yang telah dibentuk dihitung dengan menggunakan algoritma Floyd-Warshall dengan langkah-langkah sebagai berikut :
Dimisalkan W adalah matriks awal graf berbobot. W^* adalah matriks berbobot terpendek dengan W_{ij} sama dengan *shortest path* dari titik v_i ke v_j .
 - i. $W = D(0)$

- ii. untuk $k = 1$ hingga n
 untuk $i = 1$ hingga n
 untuk $j = 1$ hingga n
 - iii. $d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$
 - iv. $W^* = D(k)$
6. Hasil Rute
 Hasil akhir yang didapatkan dari algoritma Floyd-Warshall yaitu matriks untuk iterasi ke- n . Dari matriks ke- n dapat diketahui nilai *shortest path* untuk setiap titik pada suatu graf.

3. Hasil Dan Pembahasan

Permasalahan yang berhubungan dengan penentuan rute terpendek yang akan di bahas pada makalah ini adalah penentuan rute terpendek pada jalur Tol Trans Jawa, masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menerapkan teori optimasi untuk penentuan rute terpendek. Jalur Tol Trans Jawa adalah penghubung dari Jakarta sampai dengan Surabaya yang menghubungkan 21 titik daerah yaitu dimulai dari Merak - Jakarta, Jakarta - Cikampek, Cikampek - Palimanan, Palimanan - Kanci, Kanci - Penjagaan, Penjagaan - Pemalang, Pemalang - Batang, Batang - Semarang, Semarang seksi A,B,C, Semarang - Solo, Solo - Ngawi, Ngawi - Kertosono, Kertosono - Mojokerto, Surabaya – Mojokerto, Surabaya - Gempol, Gempol – Pasuruan, Pasuruan – Purbolinggo, Gempol – Pandaan. Dengan adanya beberapa pilihan jalur ini maka penulis akan menentukan rute terpendek dari setiap pasang titik daerah untuk memudahkan para pengguna jalur Tol Trans Jawa.



Gambar 1. Jaringan Jalur Tol Trans Jawa

Tabel 1. Jalur Jaringan Jalur Tol Trans Jawa dan Jarak Untuk Setiap Jalur Jaringan Jalur Tol Trans Jawa

No	Jalur	Jarak
1.	Merak – Jakarta	98 km
2.	Jakarta – Cikampek	73 km
3.	Cikampek – Palimanan	114 km
4.	Palimanan – Kanci	28 km
5.	Kanci – Panjagaan	34 km
6.	Panjagaan – Pemalang	58 km
7.	Pemalang – Batang	39 km
8.	Batang – Semarang	75 km
9.	Semarang Seksi A, B, C	20 km
10.	Semarang – Solo	73 km

11.	Solo – Ngawi	90 km
12.	Ngawi – Kertosono	87 km
13.	Kertosono – Mojokerto	41 km
14.	Surabaya – Mojokerto	37 km
15.	Surabaya – Gempol	37 km
16.	Gempol – Pasuruan	34 km
17.	Pasuruan – Purbolinggo	41 km
18.	Gempol – Pandaan	13 km

Tabel 2. *Vertex* Dari Jaringan Jalur Tol Trans Jawa

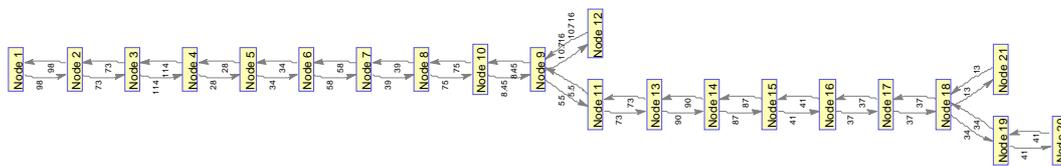
<i>Vertex</i>	Nama Tol
v_1	Merak
v_2	Jakarta
v_3	Cikampek
v_4	Palimanan
v_5	Kanci
v_6	Panjagaan
v_7	Pemalang
v_8	Batang
v_9	Jatingaleh (Semarang)
v_{10}	Krapyak (Semarang Seksi A)
v_{11}	Srondol (Semarang Seksi B)
v_{12}	Kaligawe (Semarang Seksi C)
v_{13}	Solo
v_{14}	Ngawi
v_{15}	Kertosono
v_{16}	Mojokerto
v_{17}	Surabaya
v_{18}	Gempol
v_{19}	Pasuruan
v_{20}	Purbolinggo
v_{21}	Pandaan

Dari Gambar 1, Tabel.1 dan Tabel.2, didapatkan jaringan jalur Tol Trans Jawa berdasarkan sumber Jasa Marga maka berikut adalah jalur dari jalur Tol Trans Jawa dan jarak untuk setiap pasangan daerah yang dihubungkan oleh Tol Trans Jawa.

Tabel 3. *Edge* Dari Jaringan Tol Trans Jawa

<i>Edge</i>	Pasangan <i>Vertex</i>	Nama Jalur	Bobot (Km)
e_1	$v_1 - v_2$	Merak - Jakarta	98
e_2	$v_2 - v_3$	Jakarta - Cikampek	73
e_3	$v_3 - v_4$	Cikampek – Palimanan	114
e_4	$v_4 - v_5$	Palimanan – Kanci	28
e_5	$v_5 - v_6$	Kanci – Panjagaan	34
e_6	$v_6 - v_7$	Panjagaan – Pemalang	58
e_7	$v_7 - v_8$	Pemalang – Batang	39
e_8	$v_8 - v_{10}$	Batang – Semarang (Seksi A)	75
e_9	$v_9 - v_{10}$	Jatingaleh – Krapyak (Semarag seksi A)	8,45
e_{10}	$v_9 - v_{11}$	Jatingaleh – Srondol (Semarang Seksi B)	5,5

e_{11}	$v_9 - v_{12}$	Jatingaleh – Kaligawe (Semarang Seksi C)	10,716
e_{12}	$v_{11} - v_{13}$	Semarang (Seksi B) – Solo	73
e_{13}	$v_{13} - v_{14}$	Solo – Ngawi	90
e_{14}	$v_{14} - v_{15}$	Ngawi - Kertosono	87
e_{15}	$v_{15} - v_{16}$	Kertosono – Mojokerto	41
e_{16}	$v_{17} - v_{16}$	Surabaya – Mojokerto	37
e_{17}	$v_{17} - v_{18}$	Surabaya – Gempol	37
e_{18}	$v_{18} - v_{19}$	Gempol – Pasuruan	34
e_{19}	$v_{19} - v_{20}$	Pasuruan – Purbolinggo	41
e_{20}	$v_{18} - v_{21}$	Gempol – Pandaan	13



Gambar 2. Graf dari Jalur Tol Trans Jawa

Dari Gambar 2 dapat di bentuk sebuah representasi matriks sebagai berikut.

$$W = D(0) = \begin{pmatrix} 0 & 98 & \text{inf} \\ 98 & 0 & 73 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & 73 & 0 & 114 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 114 & 0 & 28 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 28 & 0 & 34 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 34 & 0 & 58 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 58 & 0 & 39 & \text{inf} \\ \text{inf} & 39 & 0 & 75 & \text{inf} \\ \text{inf} & 75 & 0 & 8,45 & 5,5 & 10,176 & \text{inf} \\ \text{inf} & 8,45 & 0 & \text{inf} \\ \text{inf} & 5,5 & \text{inf} & 0 & \text{inf} & 73 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 10,176 & \text{inf} & \text{inf} & 0 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 73 & \text{inf} & 0 & 90 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 90 & 0 & 87 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 87 & 0 & 41 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 41 & 0 & 37 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 37 & 0 & 37 & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 37 & 0 & 34 & \text{inf} & 13 \\ \text{inf} & 34 & 0 & 41 & \text{inf} \\ \text{inf} & 41 & 0 & \text{inf} \\ \text{inf} & 13 & \text{inf} & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks awal dari representasi graf, kemudian dilakukan proses perhitungan dengan algoritma Floyd-Warshall untuk mencari bobot terkecil antara semua titik, dimana semakin kecil bobot maka semakin optimal rute tersebut. Berikut adalah hasil iterasi algoritma Floyd-Warshall yang ke-21.

$$W = D(21) = \begin{pmatrix} 0 & 98 & 171 & 285 & 313 & 347 & 405 & 444 & 519 & 527.45 & 524.5 & 529.176 & 597.5 & 687.5 & 774.5 & 815.5 & 852.5 & 889.5 & 923.5 & 964.5 & 902.5 \\ 98 & 0 & 73 & 187 & 215 & 249 & 307 & 346 & 421 & 429.45 & 426.5 & 431.176 & 499.5 & 589.5 & 676.5 & 717.5 & 754.5 & 791.5 & 825.5 & 866.5 & 804.5 \\ 171 & 73 & 0 & 114 & 142 & 176 & 234 & 273 & 348 & 356.45 & 353.5 & 358.176 & 426.5 & 516.5 & 603.5 & 644.5 & 681.5 & 718.5 & 752.5 & 793.5 & 731.5 \\ 285 & 187 & 114 & 0 & 28 & 62 & 120 & 159 & 234 & 242.45 & 239.5 & 244.176 & 312.5 & 402.5 & 489.5 & 530.5 & 567.5 & 604.5 & 638.5 & 679.5 & 617.5 \\ 313 & 215 & 142 & 28 & 0 & 34 & 92 & 131 & 206 & 214.45 & 211.5 & 216.176 & 284.5 & 374.5 & 461.5 & 502.5 & 539.5 & 576.5 & 610.5 & 651.5 & 589.5 \\ 347 & 249 & 176 & 62 & 34 & 0 & 58 & 97 & 172 & 180.45 & 177.5 & 182.176 & 250.5 & 340.5 & 427.5 & 468.5 & 505.5 & 542.5 & 576.5 & 617.5 & 555.5 \\ 405 & 307 & 234 & 120 & 92 & 58 & 0 & 39 & 114 & 122.45 & 119.5 & 124.176 & 192.5 & 282.5 & 369.5 & 410.5 & 447.5 & 484.5 & 518.5 & 559.5 & 497.5 \\ 444 & 346 & 273 & 159 & 131 & 97 & 39 & 0 & 75 & 83.45 & 80.5 & 85.176 & 153.5 & 243.5 & 330.5 & 371.5 & 408.5 & 445.5 & 479.5 & 520.5 & 458.5 \\ 519 & 421 & 348 & 234 & 206 & 172 & 114 & 75 & 0 & 8.45 & 5.5 & 10.176 & 78.5 & 168.5 & 255.5 & 296.5 & 333.5 & 370.5 & 404.5 & 445.5 & 383.5 \\ 527.45 & 429.45 & 356.45 & 242.45 & 214.45 & 180.45 & 122.45 & 83.45 & 8.45 & 0 & 13.95 & 18.626 & 86.95 & 176.95 & 263.95 & 304.95 & 341.95 & 378.95 & 412.95 & 453.95 & 391.95 \\ 524.5 & 426.5 & 353.45 & 239.5 & 211.5 & 177.5 & 119.5 & 80.5 & 5.5 & 13.95 & 0 & 15.676 & 73 & 163 & 250 & 291 & 328 & 365 & 399 & 440 & 378 \\ 529.176 & 431.176 & 358.176 & 244.176 & 216.176 & 182.176 & 124.176 & 85.176 & 10.176 & 19.166 & 16.216 & 0 & 89.216 & 179.216 & 266.216 & 307.216 & 344.216 & 381.216 & 415.216 & 456.216 & 394.216 \\ 597.5 & 499.5 & 426.5 & 312.5 & 284.5 & 250.5 & 192.5 & 153.5 & 78.5 & 86.95 & 73 & 88.676 & 0 & 90 & 177 & 218 & 255 & 292 & 326 & 367 & 305 \\ 687.5 & 589.5 & 516.5 & 402.5 & 374.5 & 340.5 & 282.5 & 243.5 & 168.5 & 176.95 & 163 & 178.676 & 90 & 0 & 87 & 128 & 165 & 202 & 236 & 277 & 215 \\ 774.5 & 676.5 & 603.5 & 489.5 & 461.5 & 427.5 & 369.5 & 330.5 & 255.5 & 263.95 & 250 & 265.676 & 177 & 87 & 0 & 41 & 78 & 115 & 149 & 190 & 128 \\ 815.5 & 717.5 & 644.5 & 530.5 & 502.5 & 468.5 & 410.5 & 371.5 & 296.5 & 304.95 & 291 & 306.676 & 218 & 128 & 41 & 0 & 37 & 74 & 108 & 149 & 87 \\ 852.5 & 754.5 & 681.5 & 567.5 & 539.5 & 505.5 & 447.5 & 408.5 & 333.5 & 341.95 & 328 & 343.676 & 255 & 165 & 78 & 37 & 0 & 37 & 71 & 112 & 50 \\ 889.5 & 791.5 & 718.5 & 604.5 & 576.5 & 542.5 & 484.5 & 445.5 & 370.5 & 378.95 & 365 & 380.676 & 292 & 202 & 115 & 74 & 37 & 0 & 34 & 75 & 13 \\ 923.5 & 825.5 & 752.5 & 638.5 & 610.5 & 576.5 & 518.5 & 479.5 & 404.5 & 412.95 & 399 & 414.676 & 326 & 236 & 149 & 108 & 71 & 34 & 0 & 41 & 47 \\ 964.5 & 866.5 & 793.5 & 679.5 & 651.5 & 617.5 & 559.5 & 520.5 & 445.5 & 453.95 & 440 & 455.676 & 367 & 277 & 190 & 149 & 112 & 75 & 41 & 0 & 88 \\ 902.5 & 804.5 & 731.5 & 617.5 & 589.5 & 555.5 & 497.5 & 458.5 & 383.5 & 391.95 & 378 & 393.676 & 305 & 215 & 128 & 87 & 50 & 13 & 47 & 88 & 0 \end{pmatrix}$$

Hasil akhir yang didapatkan dari algoritma Floyd-Warshall yaitu matriks untuk iterasi ke-n dan pada kasus jalur Tol Trans Jawa telah didapatkan matriks untuk iterasi ke-21. Dari matriks ke-21 dapat diketahui nilai *shortest path* untuk setiap *vertex* pada graf jalur Tol Trans Jawa. Terdapat 420 rute terpendek untuk jalur Tol Trans Jawa, berikut adalah beberapa hasil rute untuk beberapa *vertex* pada jalur Tol Trans Jawa.

- Rute terpendek dari **Merak** ke **Jakarta** dan sebaliknya adalah 98 km
- Rute terpendek dari **Merak** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Jakarta, Cikampek, Palimanan, Kanci, Panjagaan, Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi B), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 902.5 km
- Rute terpendek dari **Jakarta** ke **Cikampek** dan sebaliknya adalah 73 km
- Rute terpendek dari **Jakarta** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Jakarta, Cikampek, Palimanan, Kanci, Panjagaan, Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 804.5 km
- Rute terpendek dari **Cikampek** ke **Palimanan** dan sebaliknya adalah 114 km
- Rute terpendek dari **Cikampek** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Palimanan, Kanci, Panjagaan, Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 731.5 km
- Rute terpendek dari **Palimanan** ke **Kanci** dan sebaliknya adalah 28 km
- Rute terpendek dari **Palimanan** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Kanci, Panjagaan, Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 617.5 km
- Rute terpendek dari **Kanci** ke **Panjagaan** dan sebaliknya adalah 34 km
- Rute terpendek dari **Kanci** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Kanci, Panjagaan, Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 589.5 km
- Rute terpendek dari **Panjagaan** ke **Pemalang** dan sebaliknya adalah 58 km
- Rute terpendek dari **Panjagaan** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Pemalang, Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 555.5 km
- Rute terpendek dari **Pemalang** ke **Batang** dan sebaliknya adalah 39 km
- Rute terpendek dari **Pemalang** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Batang, Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 497.5 km

- Rute terpendek dari **Batang** ke **Jatingaleh (Semarang)** dan sebaliknya adalah 75 km
- Rute terpendek dari **Batang** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 458.5 km
- Rute terpendek dari **Jatingaleh** ke **Krapyak (Semarang Seksi A)** dan sebaliknya adalah 8.45 km
- Rute terpendek dari **Jatingaleh** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 383.5 km
- Rute terpendek dari **Krapyak (Semarang Seksi A)** ke **Srandol (Semarang Seksi B)** dan sebaliknya adalah 13.95 km
- Rute terpendek dari **Krapyak (Semarang Seksi A)** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Srandol (Semarang Seksi A), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 391.95km
- Rute terpendek dari **Srandol (Semarang Seksi B)** ke **Kaligawe (Semarang Seksi C)** dan sebaliknya, melewati Jatingaleh adalah 15.676 km
- Rute terpendek dari **Srandol (Semarang Seksi B)** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 378 km
- Rute terpendek dari **Kaligawe (Semarang Seksi C)** ke **Solo** dan sebaliknya, melewati Jatingaleh dan Srandol (Semarang Seksi B) adalah 89.216 km
- Rute terpendek dari **Kaligawe (Semarang Seksi C)** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Jatingaleh, Srandol (Semarang Seksi B), Solo, Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 394.216 km
- Rute terpendek dari **Solo** ke **Ngawi** dan sebaliknya adalah 90 km
- Rute terpendek dari **Solo** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Ngawi, Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 305 km
- Rute terpendek dari **Ngawi** ke **Kertosono** dan sebaliknya adalah 87 km
- Rute terpendek dari **Ngawi** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Kertosono, Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 215 km
- Rute terpendek dari **Kertosono** ke **Mojokerto** dan sebaliknya adalah 41 km
- Rute terpendek dari **Kertosono** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Mojokerto, Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 128 km
- Rute terpendek dari **Mojokerto** ke **Surabaya** dan sebaliknya adalah 37 km
- Rute terpendek dari **Mojokerto** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Surabaya, Gempol dan Pasuruan adalah 87 km
- Rute terpendek dari **Surabaya** ke **Gempol** dan sebaliknya adalah 37 km
- Rute terpendek dari **Surabaya** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Gempol dan Pasuruan adalah 50 km
- Rute terpendek dari **Gempol** ke **Pasuruan** dan sebaliknya adalah 34 km
- Rute terpendek dari **Gempol** ke **Pandaan** dan sebaliknya adalah 13 km
- Rute terpendek dari **Pasuruan** ke **Purbolinggo** dan sebaliknya adalah 41 km
- Rute terpendek dari **Pasuruan** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Gempol adalah 47 km
- Rute terpendek dari **Purbolinggo** ke **Pandaan** dan sebaliknya, melewati Pasuruan dan Gempol adalah 88 km

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan pada makalah ini adalah.

1. Telah berhasil dibentuk rute terpendek pada jalur Tol Trans Jawa untuk setiap pasangan titik.
2. Algoritma Floyd-Warshall dapat menyelesaikan permasalahan rute terpendek pada jalur Tol Trans Jawa dengan menghitung jarak seluruh jalur atau lintasan yang ada antar daerah.

5. Daftar Pustaka

- Diaz, Novandi, & Aprian. 2007. *Perbandingan Algoritma Dijkstra dan Algoritma Floyd-Warshall dalam Penentuan Lintasan terpendek (Single Pair Shortest Path)*, Makalah IF2251 Strategi Algoritmik Tahun 2007, 1-5.
- Deo, Narsingh. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India, New Delhi.
- Jayanti, Ni Ketut Dewi. 2014. *Penggunaan Algoritma Floyd-Warshall dalam Masalah Jalur Terpendek pada Penentuan Tata Letak Parkir*. STMIK STIKOM, Bali, 76-77.

- Kamayudi, A. 2006. *Studi dan Implementasi Algoritma Dijkstra, Bellman-Ford dan Floyd-Warshall dalam Menangani Masalah Lintasan Terpendek dalam Graf*. Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung, 1.
- Munir, Rinaldi. 2001. *Matematika Diskrit*. Ed. Ke-3. Informatika, Bandung.
- Ramadhan, Fahmi. 2011. *Algoritma Bellman-Ford dan Floyd-Warshall*. ITT Telkom, Bandung.
- Salaki, D. T. 2011. *Penentuan Lintasan Terpendek dari FMIPA ke Rektorat dan Fakultas lain di UNSRAT Manado Menggunakan Algoritma Dijkstra*. *Ilmiah Sains*, 11(Dijkstra), 73-76.

BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL ATAU LOOP MAKSIMAL DUA SERTA GARIS NON PARALEL MAKSIMAL ENAM

Dracjat Indrawan¹, Wamiliana¹, Asmiati¹, Amanto¹

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : dracjat@gmail.com¹

ABSTRAK

Graf $G(V, E)$ disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu path yang menghubungkan sepasang titik di G . Jika ada n titik dan m garis maka banyak graf terbentuk, baik yang terhubung atau tak terhubung. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang formula untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel atau loop maksimal dua jika diberikan $n = 5$ dan $m \geq 4$ serta $g \leq 6$, g adalah banyaknya garis non paralel.

Kata Kunci : graf, graf terhubung, loop, garis paralel

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu kajian matematika yang memiliki banyak terapannya diberbagai bidang sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, *vertex* atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Dalam suatu teori graf dikenal istilah *loop*. *Loop* adalah suatu garis dalam suatu graf yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Graf berlabel adalah suatu graf yang titik atau sisinya memiliki label atau nama. Jika titik-titiknya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika sisi-sisinya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi, sedangkan jika keduanya, titik dan sisi, yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan total (pelabelan titik dan garis). Pada penelitian ini didiskusikan tentang banyaknya graf terhubung dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua dan garis non paralel maksimal enam yang terbentuk jika di berikan $n = 5$ serta $m \geq 4$ dan menentukan rumus dari pola-pola tersebut untuk menghitung banyaknya graf.

Graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan tak terurut suatu himpunan $((G), (G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots\}$ merupakan himpunan titik, $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots\}$ merupakan himpunan sisi atau garis dari pasangan tak terurut $V(G)$. Suatu sisi atau garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *loop*, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan titik-titik yang sama. (Deo, 1989).

Barisan merupakan suatu fungsi yang semua domainnya merupakan bilangan bulat positif (Rosen, 2012). Secara umum, barisan dinotasikan sebagai berikut :

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots \dots \dots a_n$$

Barisan yang sering digunakan adalah barisan aritmatika dan barisan geometri. Barisan aritmatika adalah barisan yang berbentuk $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$, dengan a dan d adalah bilangan riil, dimana d merupakan beda. Barisan yang memiliki pola $a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$, dengan a dan r adalah bilangan riil dimana r merupakan rasio (beda) disebut barisan geometri (Rosen, 2012). Beberapa konsep dasar teknik pencacahan yang banyak digunakan antara lain adalah faktorisasi, permutasi, dan kombinasi.

1. Faktorisasi

Hasil kali semua bilangan bulat antara n sampai 1 didefinisikan sebagai besaran $n!$ sering di sebut n faktorial, dan dinotasikan dengan

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \dots \dots 1$$

(Ayres dan Schmidt,2004)

2. Permutasi

Permutasi r objek dari n objek adalah suatu urutan r objek yang diambil dari n objek yang berbeda yang dapat dibentuk. Secara umum, permutasi r objek dari n buah objek dapat dihitung dengan persamaan

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika $r = n$, maka persamaan menjadi

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$P(n,n)$ sering disebut permutasi n objek karena permutasi tersebut menyusun keseluruhan objek yang ada (Siang, 2002).

3. Kombinasi

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r ($r \leq n$) disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau $C(n,r)$ atau ${}_n C_r$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

2. Metode Penelitian

Beberapa penelitian terkait yang pernah dilakukan antara lain :

1. Wamiliana, dkk. (2016) melakukan penelitian tentang graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu :

$$N(G'_{5,m}) = N(G_{5,m}) + \sum_{g=1}^6 N(G'_{5,m,g})$$

$$= \left(\frac{m+4}{4}\right) + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5}) + N(G'_{5,m,6})$$

$$= \left(\frac{m+4}{4}\right) + 10\left(\frac{m+3}{4}\right) + 45 \times \left(\frac{m+2}{4}\right) + 120 \times \left(\frac{m+1}{4}\right) + 85 \times \left(\frac{m}{4}\right) + 30 \times \left(\frac{m-1}{4}\right) + 5 \times \left(\frac{m-2}{4}\right)$$

dengan :

$N(G'_{5,m})$ = Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

2. Selanjutnya, Amanto dkk. (2017), melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat dengan hasil sebagai berikut :

$$N(G'_{4,m,g_i}) = N(G'_{4,m,g_0}) + N(G'_{4,m,g_1}) + N(G'_{4,m,g_2}) + N(G'_{4,m,g_3})$$

$$N(G'_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m \binom{m+3}{3} + 15 \binom{m+3}{5} + 4 \binom{m+3}{6}$$

dengan :

- n = banyaknya titik
- m = banyaknya garis
- g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu $i = 0,1,2,3$
- G'_{n,m,g_i} = graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan n titik, m garis, dan g_i banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.

3. Hasil dan Pembahasan

Notasikan :

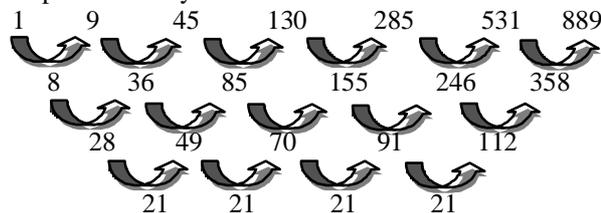
- n = banyaknya titik
 - m = banyaknya garis
 - g = banyaknya garis yang bukan paralel
 - p_i = garis i paralel yang menempel pada suatu titik, $i=2,3,4,\dots$
 - l_i = garis i *loop* yang menempel pada titik
 - $j \cdot p_i$ = jumlah i paralel yang menempel pada j garis, $j \in N \cup \{0\}$
- $$m = \sum_{i=1}^j p_i + g$$

Tabel 1. Pola jumlah graf terhubung dengan garis paralel atau loop maksimal dua

m	Jumlah graf terhubung dengan garis paralel atau loop maksimal dua dan garis non paralel maksimal enam		
	g		
	4	5	6
4	1 x 125		
5	9 x 125	1 x 222	
6	45 x 125	10 x 222	1 x 205
7	130 x 125	55 x 222	11 x 205
8	285 x 125	185 x 222	66 x 205
9	531 x 125	470 x 222	251 x 205
10		1001 x 222	721 x 205
11			1722 x 205

Perhatikan Tabel 1. pada $g = 4, m \geq 4$ membentuk pola 1, 9, 45, 130, 285, 531, 889,....

Barisan yang terbentuk dari pola tersebut yaitu:



Karena selisih tepatnya berada pada orde ke-tiga maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika orde tiga. Bentuk umum barisan aritmatika orde tiga suku ke- m yaitu:

$$a_m = a_3 m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

Notasikan :

$G_{n,m,g}$ = graf terhubung dengan n titik, m garis dan g adalah banyaknya garis non paralel

$N(G_{n,m,g})$ = banyaknya $G_{n,m,g}$

Hasil 1. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel dengan garis paralel $n = 5, m \geq 4, g = 4$ atau loop maksimal dua adalah :

$$N(G_{5,m,4}) = \frac{125}{2} (m - 3)(7m^2 - 56m + 114)$$

Bukti :

Karena terletak pada orde ke-tiga, maka bentuk umum suku ke- m dari barisan aritmatika polinomialnya adalah

$$a_m = a_3 m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

untuk $m = 4$; $125 = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0$ (1)

untuk $m = 5$; $1125 = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + a_0$ (2)

$$\text{untuk } m = 6 ; 5625 = 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + a_0 \quad (3)$$

$$\text{untuk } m = 7 ; 16250 = 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0 \quad (4)$$

Pada Persamaan (4.2.1) sampai dengan (4.2.4) membentuk sistem persamaan linear yang dapat diubah dalam bentuk matriks $Ax = b$, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 343 & 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 1125 \\ 5625 \\ 16250 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan nilai a_0, a_1, a_2 , dan a_3 dapat menggunakan aturan Cramer dengan nilai matriks A_j yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 343 & 49 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 125 & 16 & 4 & 1 \\ 1125 & 25 & 5 & 1 \\ 5625 & 36 & 6 & 1 \\ 16250 & 49 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 64 & 125 & 4 & 1 \\ 125 & 1125 & 5 & 1 \\ 216 & 5625 & 6 & 1 \\ 343 & 16250 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 125 & 1 \\ 125 & 25 & 1125 & 1 \\ 216 & 36 & 5625 & 1 \\ 343 & 49 & 16250 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 4 & 125 \\ 125 & 25 & 5 & 1125 \\ 216 & 36 & 6 & 5625 \\ 343 & 49 & 7 & 16250 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks A, A_0, A_1, A_2 , dan A_3 diperoleh nilai determinan matriks menggunakan metode kofaktor yaitu:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 343 & 49 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 64 \begin{vmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 125 \begin{vmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 216 \begin{vmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 343 \begin{vmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-128) + 750 - 1296 + 686 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Kemudian untuk menentukan nilai determinan A_0, A_1, A_2 , dan A_3 dapat dihitung dengan menggunakan prosedur yang sama, sehingga diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 125 & 16 & 4 & 1 \\ 1125 & 25 & 5 & 1 \\ 5625 & 36 & 6 & 1 \\ 16250 & 49 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ \det(A_3) &= 5250 \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 64 & 125 & 4 & 1 \\ 125 & 1125 & 5 & 1 \\ 216 & 5625 & 6 & 1 \\ 343 & 16250 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ \det(A_2) &= -57750 \\ \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 64 & 16 & 125 & 1 \\ 125 & 25 & 1125 & 1 \\ 216 & 36 & 5625 & 1 \\ 343 & 49 & 16250 & 1 \end{vmatrix} \\ \det(A_1) &= 211500 \\ \det(A_0) &= \begin{vmatrix} 64 & 16 & 4 & 125 \\ 125 & 25 & 5 & 1125 \\ 216 & 36 & 6 & 5625 \\ 343 & 49 & 7 & 16250 \end{vmatrix} \\ \det(A_0) &= -256500 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai determinan yang diperoleh, maka nilai a_0, a_1, a_2 , dan a_3 yaitu:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{5250}{12} = \frac{875}{2} \\ a_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-57750}{12} = -\frac{9625}{2} \\ a_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{211500}{12} = \frac{35250}{2} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)} = \frac{-256500}{12} = -\frac{42750}{2}$$

Jadi, rumus umum suku ke- m pada barisan aritmatika polinomial orde tiga tersebut adalah

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{875}{2}m^3 - \frac{9625}{2}m^2 + \frac{35250}{2}m - \frac{42750}{2} \\ &= \frac{1}{2}(875m^3 - 9625m^2 + 35250m - 42750) \\ &= \frac{125}{2}(m-3)(7m^2 - 56m + 114) \end{aligned}$$

Hasil 2. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel dengan garis paralel $n = 5$, $m \geq 4$, $g = 5$ atau *loop* maksimal dua adalah :

$$N(G_{5,m,5}) = \frac{37}{4}(m-3)(m-4)(21m^2 - 203m + 502)$$

Hasil 3. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel dengan garis paralel $n = 5$, $m \geq 4$, $g = 6$ atau *loop* maksimal dua adalah :

$$N(G_{5,m,6}) = \frac{41}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(21m^2 - 238m + 692)$$

Untuk Pembuktian Hasil 2 dan Hasil 3 caranya sama dengan mencari Hasil 1.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil konstruksi graf-graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua, maka diperoleh kesimpulan bahwa :

Jumlah graf-graf terhubung berlabel berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua untuk $n = 5, m \geq 4$, diperoleh rumus yaitu:

- a. $N(G_{5,m,4}) = \frac{125}{2}(m-3)(7m^2 - 56m + 114)$
- b. $N(G_{5,m,5}) = \frac{37}{4}(m-3)(m-4)(21m^2 - 203m + 502)$
- c. $N(G_{5,m,6}) = \frac{41}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(21m^2 - 238m + 692)$

5. Daftar Pustaka

- Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari, 2017. Counting the Number of Disconnected Vertex Laebllled Graph with Order Maksimal Four. *Science International*, Vol.29, No.6, Hal. 1181-1186.
- Deo, N. 1989. *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.
- Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Seventh Edition. McGraw-Hill, New York. USA.
- Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu Komputer*. Andi Offset. Yogyakarta.
- Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Journal INSIST* Vol.1, No.1, eISSN. Page 4-7.

SOLUSI EKSAK KLASIK PERSAMAAN TRICOMI

Aura Purwaningrum¹, Suharsono S.¹, Tiryono Ruby¹, Agus Sutrisno¹

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jalan Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : aura.purwaningrum08@gmail.com¹

ABSTRAK

Persamaan umum Tricomi adalah persamaan diferensial parsial berbentuk: $\partial_{xx}g + a(x)\partial_{yy}g = 0$ dimana $g(x, y)$ dan $a(x)$ adalah sebuah fungsi biasa. Solusi dari persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q [a(s) t_y(s, b)] ds dq$$

Dengan $t(x, y) = g_y$.

Kata kunci: Persamaan Tricomi, Persamaan Diferensial Parsial, Solusi eksak.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hal itu karena banyak permasalahan kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial, Persamaan Diferensial secara umum dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Dalam sejarah tentang persamaan diferensial parsial, pada tahun 1923 Francesco Giacomo Tricomi melakukan sebuah penelitian tentang persamaan diferensial, kemudian saat ini dikenal persamaan Tricomi dengan bentuk $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ dengan solusi $u(x, y)$. Persamaan ini digunakan untuk analisis aliran transonik pada *aerodinamika*. Persamaan ini berbentuk hiperbolik pada $x < 0$, eliptik pada $x > 0$ dan berdegenerasi pada $x = 0$. Untuk lebih mempermudah dalam memahami dan mencari solusi dari persamaan Tricomi ini dalam hal yang lebih sederhana, maka penulis akan mencari formula solusi eksak dari persamaan Tricomi dengan menggunakan teknik integral dan teorema dasar kalkulus.

Dalam persamaan diferensial parsial terdapat teorema bahwa, misalkan $u = f(x, y)$ merupakan fungsi dari dua variabel x dan y . Kontinu dalam neighborhood di titik (x, y) , maka $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (Whittemore, 1898). Teori lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah teorema dasar kalkulus I dan teorema dasar kalkulus II. Pada buku (Purcell, 2010), teorema dasar kalkulus I, misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a, b) . Maka:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

Sedangkan teorema dasar kalkulus II, misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan misalkan F sembarang anti-turunan dari f pada $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam mencari solusi eksak dari persamaan Tricomi adalah metode studi pustaka dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi yang berhubungan dengan penelitian.
2. Mengasumsikan persamaan Tricomi kedalam sistem persamaan diferensial parsial orde pertama.
3. Menyelesaikan asumsi yang ada dengan menggunakan teknik integral sehingga didapatkan formula solusi eksaknya.

4. Membuktikan bahwa solusi eksak memenuhi persamaan Tricomi.
5. Menggunakan solusi eksak kedalam beberapa kasus penerapan persamaan Tricomi.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan umum Tricomi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx}g + a(x)\partial_{yy}g = 0 \quad (1)$$

Dimana $g(x, y)$ merupakan fungsi biasa yang memuat variabel x dan y dan $a(x)$ merupakan sembarang fungsi yang memuat variabel x . Untuk $a(x) = x$ persamaan ini merupakan Persamaan Tricomi Klasik.

Misalkan $u = \frac{\partial g}{\partial x} = \partial_x g = g_x$ dan $v = \frac{\partial g}{\partial y} = \partial_y g = g_y$, maka persamaan Tricomi dapat ditulis dalam sistem persamaan diferensial parsial orde satu dengan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) = 0 \\ u_y(x, y) - v_x(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Untuk mempermudah pemahaman, misalkan parameter $t = t(x, y) = v(x, y)$. Dari persamaan pertama pada sistem (2), maka

$$\begin{aligned} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) &= 0 \\ u(x, y) &= -\int_a^x [a(s)t_y(s, y)] ds + h(y) \end{aligned} \quad (3)$$

Dimana $a \in \mathbb{R}$ dan h adalah sembarang fungsi dari variabel real.

Dari persamaan kedua pada sistem (2), dengan menggunakan aturan dasar integral yang bergantung pada parameter maka didapatkan formula,

$$\begin{aligned} u_y(x, y) - v_x(x, y) &= 0 \\ u_y(x, y) &= v_x(x, y) \\ -\int_a^x [a(s)t_{yy}(s, y)] ds + h'(y) &= t_x(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} h'(y) &= t_x(x, y) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, y)] ds \\ h(y) &= \int_b^y [t_x(x, r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, r)] ds] dr \end{aligned} \quad (5)$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Tetapi h harus bergantung hanya pada y .

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Integral Kalkulus, maka

$$\begin{aligned} \partial_x h(y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_b^y \left[t_x(x, r) + \int_a^x [a(s)t_{yy}(s, r)] ds \right] dr \right) \\ \partial_x h(y) &= \int_b^y [t_{xx}(x, r) + a(x)t_{yy}(x, r)] dr \\ 0 = \partial_x h(y) &= \int_b^y [t_{xx}(x, r) + a(x)t_{yy}(x, r)] dr \quad \forall y \end{aligned} \quad (6)$$

Jika t adalah solusi dari persamaan Tricomi maka kondisi di atas terpenuhi.

Dengan mengintegrasikan $h(y)$ terhadap y maka akan didapatkan formula $u(x, y)$ yang baru, yaitu:

$$h(y) = \int_b^y t_x(x, r) dr + \int_a^x a(s)t_y(s, y) ds - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds$$

substitusikan kedalam $u(x, y)$ (3), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\int_a^x [a(s)t_y(s, y)] ds + \int_b^y t_x(x, r) dr + \int_a^x a(s)t_y(s, y) ds - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds \\ u(x, y) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds \end{aligned} \quad (7)$$

Maka, solusi persamaan Tricomi adalah t dengan fungsi g sehingga $g_x = u$ dan $g_y = t$ dengan

$$u(x, y) = \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s)t_y(s, b) ds.$$

Oleh karena itu, dari $g_y = t$ persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_y &= t(x, y) \\ g(x, y) &= \int_b^y t(x, r) dr + k(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Dimana k adalah sembarang fungsi variabel real.

Dari $g_x = u$

$$g_x = u(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 g_x &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_b^y t(x, r) dr + k(x) \right) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 \int_b^y t_x(x, r) dr + k'(x) &= \int_b^y t_x(x, r) dr - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 k'(x) &= - \int_a^x a(s) t_y(s, b) ds \\
 k(x) &= - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq \tag{9}
 \end{aligned}$$

Jika $t(x, y)$ adalah solusi, maka solusi eksak klasik persamaan Tricomi dapat dituliskan dalam rumus:

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq \tag{10}$$

Dengan $t(x, y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem (2).

Untuk membuktikan bahwa $g(x, y)$ adalah solusi dari persamaan Tricomi maka $g(x, y)$ harus memenuhi persamaan.

$$\begin{aligned}
 g_{xx} &= \int_b^y t_{xx}(x, r) dr - a(x) t_y(x, b) \\
 &= - \int_b^y a(x) t_{yy}(x, r) dr - a(x) t_y(x, b) \\
 &= -a(x) t_y(x, y) + a(x) t_y(x, b) - a(x) t_y(x, b) \\
 &= -a(x) t_y(x, y) \\
 &= -a(x) \int_b^y a(x) t_{yy}(x, r) dr \\
 &= -a(x) g_{yy}
 \end{aligned}$$

Jadi, $g_{xx} = -a(x) g_{yy}$

$$g_{xx} + a(x) g_{yy} = 0$$

Terbukti benar bahwa rumus $g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq$

Merupakan solusi eksak klasik persamaan Tricomi.

Contoh 1:

Berdasarkan persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$, maka persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\partial_{xx} g + x \partial_{yy} g = 0$$

Dalam hal ini $a(x) = x$. Misalkan $t(x, y) = y$ adalah solusi trivial, maka dengan menggunakan persamaan (12) dengan $a = b = 0$, maka:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \int_0^y r dr - \int_0^x \int_0^q s t_y(s, b) ds dq \\
 &= \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} x^3
 \end{aligned}$$

Jadi, $g(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} x^3$ merupakan solusi eksak dari persamaan Tricomi.

Contoh 2:

Dari persamaan (1) dengan $a(x) = \sin(x)$ maka dapat di cari solusi eksak dari bentuk persamaan:

$$\partial_{xx} g + \sin(x) \partial_{yy} g = 0 \tag{11}$$

Misalkan $t(x, y) = y$ adalah solusi trivial dan $a = b = 0$. Maka:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \int_0^y r dr - \int_0^x \int_0^q \sin(s) t_y(s, b) ds dq \\
 &= \frac{1}{2} y^2 + \sin(x) - x
 \end{aligned}$$

Jadi, $g(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \sin(x) - x$ merupakan solusi eksak dari persamaan (11).

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, didapatkan rumus umum untuk mencari solusi eksak dari persamaan tricomi adalah

$$g(x, y) = \int_b^y t(x, r) dr - \int_a^x \int_a^q a(s) t_y(s, b) ds dq$$

Dengan $t(x, y) = g_y$ adalah solusi trivial yang memenuhi persamaan kedua dari sistem

$$\begin{cases} u_x(x, y) + a(x)v_y(x, y) = 0 \\ u_y(x, y) - v_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

Sehingga didapatkan solusi eksak dari persamaan Tricomi $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ adalah

$$g(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

5. Daftar Pustaka

Purcell, E.J, Varberg, D dan Rigdon, S.E. 2010. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Sembilan*. Erlangga, Jakarta.

Whittemore, J.K. 1898. *A Doubly-infinite System of Simple Groups*. Mathematical Papers of the Chicago Congress, Chicago.

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIKBERORDE EMPAT

Lucia Dessie Natasha¹, Wamiliana¹, Aang Nuryaman¹, Amanto¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : luciadessie12@gmail.com¹

Abstrak

Suatu graf G disebut tgraf terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu path yang menghubungkan sepasang titik di G . Loop adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama, garis parallel adalah dua garis atau lebih yang titik-titik ujungnya sama, dan graf sederhana adalah suatu graf tanpa loop dan garis paralel. Graf berlabel adalah graf yang setiap titik atau garisnya diberi nilai atau label. Label yang diberikan pada titik disebut sebagai pelabelan titik, label yang diberikan pada tiap garis disebut pelabelan garis, dan jika label diberikan pada tiap garis dan titik disebut sebagai pelabelan total. Jika diberikan n titik dan m garis, banyak graf yang dapat dibentuk adalah graf terhubung, graf tidak terhubung, graf sederhana ataupun graf tidak sederhana. Pada penelitian ini akan didiskusikan banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde empat.

Kata kunci : graf, graf terhubung, loop, garis paralel, dan graf berlabel.

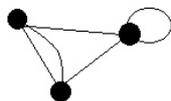
1. Pendahuluan

Teori Graf berawal dari permasalahan jembatan Konisberg yang melalui sungai Pregel di Kaliningrat. Terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan yang dipisahkan oleh sungai ini. Permasalahannya adalah menentukan apakah mungkin melakukan perjalanan yang dimulai dari satu daratan dan melalui setiap jembatan tersebut tepat satu kali serta kembali ke tempat semula. Pada tahun 1736 seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler menemukan jawaban dari permasalahan ini dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam bentuk graf. Ia mendapati bahwa tidak mungkin dapat melewati jembatan tersebut tepat satu kali jika derajat tiap titik jumlahnya tidak genap, sehingga model graf tersebut saat ini dikenal sebagai graf Eulerian.

Penelitian mengenai teori graf di bidang murni pun sudah semakin berkembang. Pada tahun 2017 Amanto, dkk., memperoleh rumus umum untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik menggunakan garis parallel atau loop dengan orde maksimal empat. Pada penelitian ini akan ditentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik yang mungkin memuat loop atau garis paralel untuk orde empat.

2. Bahan dan Metode

Suatu graf G terdiri dari dua struktur $V(G)$ dan $E(G)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan takkosong yang elemen-elemennya berupa titik dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$ yang disebut sebagai garis atau *edge*. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari suatu graf G .

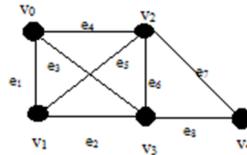


Gambar 1. Contoh graf dengan 3 titik dan 5 garis

Suatu garis dikatakan menempel (*incident*) dengan titik u jika u merupakan salah satuujung dari garis tersebut. Dua titik u, v dikatakan bertetangga (*adjacent*) satu sama lain jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh garis yang sama dan dinotasikan dengan (u, v) . Walk adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. Walk yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk* (*walk* tertutup). Walk yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). Path yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*.

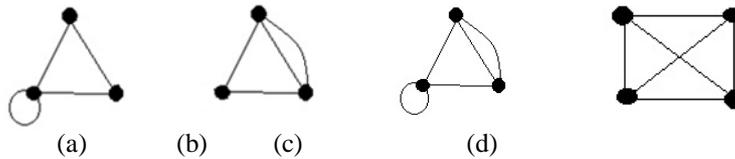
Suatu graf G dikatakan graf berlabel jika titik atau garisnya diberikan suatu nilai atau data tertentu. Jika tidak maka graf G dikatakan graf tak berlabel. Pelabelan graf dapat berupa pelabelan titik, pelabelan

garis, atau pelabelan titik dan garis. Jika pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik dan garis, maka pelabelan tersebut disebut dengan pelabelan total.



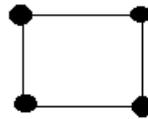
Gambar 2. Contoh graf dengan pelabelan total

Loop adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang titik-titik ujungnya sama. Graf sederhana adalah suatu graf tanpa *loop* atau garis paralel.



Gambar 3. (a) Contoh graf dengan *loop*, (b) Contoh graf dengan garis paralel, (c) Contoh graf dengan *loop* dan garis paralel, (d) Contoh graf sederhana

Suatu graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G . Suatu graf tidak terhubung G merupakan graf yang terdiri dari dua atau lebih graf terhubung.



Gambar 4. Contoh graf terhubung

Derajat suatu titik pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik v yang dinotasi $d(v)$. Titik terpencil adalah titik dengan $d(v) = 0$ karena tidak ada satu pun garis yang menempel dengan garis tersebut. Satu garis yang kembali ke titik semula (merupakan *loop*) dihitung berderajat dua. Titik yang berderajat satu disebut daun. Dengan kata lain, daun hanya bertetangga dengan satu titik. Secara umum, jika terdapat g *loop* dan e sisi bukan *loop* yang menempel dengan titik v , maka derajat titik v adalah :

$$d(v) = 2g + e$$

Dua graf dikatakan ekuivalen (dan disebut isomorfis) jika keduanya memiliki ciri-ciri yang samapada istilah dalam teori graf. Dua graf G dan G' dikatakan isomorfis jika ada korespondensi 1-1 antara *vertex* pada kedua graf tersebut dan antara *edge* keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u dan v pada G maka sisi e' pada G' juga bersisian dengan simpul u' dan v' . Dua graf isomorfis harus memiliki

1. Jumlah *vertex* yang sama.
2. Jumlah *edge* yang sama.
3. Mempunyai jumlah *vertex* yang sama berderajat tertentu

Berikut akan dipaparkan konsep-konsep mengenai teknik dasar pencacahan.

1. Faktorial
 Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Besaran n faktorial (simbol $n!$) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara n hingga 1.

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

2. Kombinasi
 Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r ($r \leq n$) disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau $C(n, r)$ atau ${}_n C_r$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul.

3. Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Barisan aritmatika tingkat ke- p adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama setiap suku berurutannya setelah p tingkatan. Tingkatan pada barisan aritmatika akan menghasilkan persamaan dengan pangkat tertingginya adalah p . Pangkat tertinggi dari suatu persamaan merupakan orde dari persamaan tersebut.

Fungsi polinomial adalah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya.

Bentuk umum persamaan polinomial pada deret aritmatika orde ke- p adalah

$$P_p(m) = \alpha_p m^p + \alpha_{p-1} m^{p-1} + \alpha_{p-2} m^{p-2} + \dots + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Dengan koefisien tertentu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}$. Polinom ini mempunyai derajat sebesar p , jika koefisien penentunya $\alpha_p \neq 0$ ^[4].

4. Cramer's Rule

Metode berikut memberikan rumus untuk solusi dari sistem linear tertentu dengan n persamaan dan n faktor yang tidak diketahui. Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem dari n persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke- j dari A dengan

entri-entri pada matriks $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, dengan $j = 1, 2, \dots, n$.

Penelitian yang pernah dilakukan,

Misal $m, n \in \mathbb{N}$, dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$

- Banyaknya g_n graf sederhana berlabel dengan n titik dinyatakan sebagai $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
- Banyaknya $g_n(m)$ graf sederhana dengan n titik dan m garis dinyatakan sebagai

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat menggunakan garis paralel atau *loop* adalah

- Untuk $n = 3$ dan $m \geq 1$, diperoleh rumus umum yaitu:

$$N(G_{3,m}) = (m + 1) \binom{m + 2}{2}$$

dengan $n =$ banyaknya titik pada graf, dan $m =$ banyaknya garis pada graf.

- Untuk $n = 4$, $1 \leq m \leq 10$, dan $0 \leq g_i \leq 3, i = 0, 1, 2, 3$ diperoleh rumus umum yaitu

$$N(G_{4,m,g_i}) = N(G_{4,m,g_0}) + N(G_{4,m,g_1}) + N(G_{4,m,g_2}) + N(G_{4,m,g_3})$$

$$N(G_{4,m,g_i}) = \binom{m + 3}{3} + \frac{3}{2} m \binom{m + 3}{3} + 15 \binom{m + 3}{5} + 4 \binom{m + 3}{6}$$

dengan

- g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu, $i = 0, 1, 2, 3$
- G_{n,m,g_i} = graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan n titik, m garis, dan g_i banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.
- $N(G_{n,m,g_i})$ = Banyaknya G_{n,m,g_i}

Untuk menentukan jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum sebagai berikut.

$$N(G'_{5,m}) = N(G'_{5,m}) + \sum_{g=1}^6 N(G'_{5,m,g})$$

$$= \binom{m + 4}{4} + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5}) + N(G'_{5,m,6})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10 \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan rumus banyaknya graf terhubung berorde empat adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan graf.
2. Menggambar graf terhubung berlabel titik dengan $n = 4$ dengan *loop* atau paralel.
3. Mengelompokkan graf terhubung untuk n titik dan m garis yang sama.
4. Menghitung jumlah graf terhubung untuk setiap n titik dan m garis.
5. Melihat pola yang terbentuk pada n titik dan m garis yang sama.
6. Menentukan rumus umum untuk menghitung jumlah graf terhubung berlabel titik dengan *loop* atau paralel pada $n = 4$.

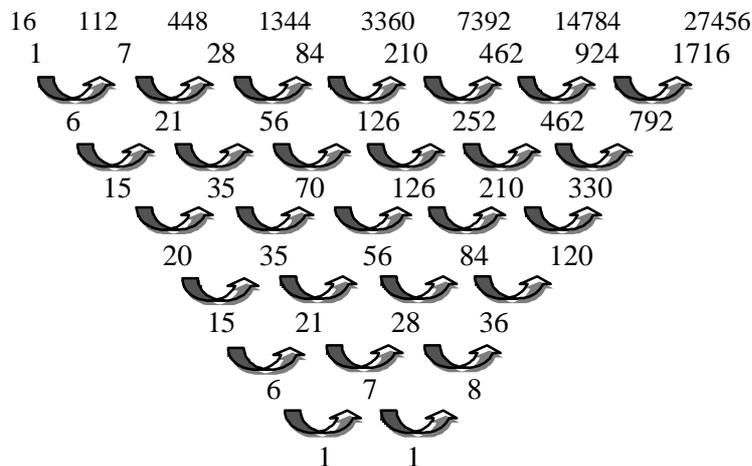
3. Hasil dan Pembahasan

Hasil konstruksi graf terhubung berlabel tanpa garis *loop* berorde lima dengan maksimal garis paralel lima, dapat dibentuk dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1. Jumlah graf terhubung berlabel titik untuk $n = 4$

m	Banyaknya graf terhubung			
	$g = 3$	$g = 4$	$g = 5$	$g = 6$
3	16			
4	112	15		
5	448	120	6	
6	1344	540	54	1
7	3360	1800	270	10
8	7392	4950	990	55
9	14784	11880	2970	220
10	27456	25740	7722	715
11		51480	18018	2002
12		96525	38610	5005
13			77220	11440
14			145860	24310
15				48620
16				92378

Berdasarkan Tabel 1. untuk $n = 4, m \geq 3, g = 3$ diperoleh suatu barisan yang membentuk suatu pola, yaitu:



Karena selisihnya tepat berada pada orde ke-enam, maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika polinomial orde enam suku ke- m yaitu:

$$P_6(m) = \alpha_6 m^6 + \alpha_5 m^5 + \alpha_4 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Hasil 1. Jumlah graf terhubung berlabel titik dengan $n = 4, m \geq 3, g = 3$ adalah

$$N(G_{4,m,3}) = 16 \times C_6^{m+3}$$

Bukti:

Karena terletak pada orde ke-enam, maka bentuk umum suku ke- m dari barisan aritmatika polinomialnya adalah

$$P_6(m) = \alpha_6 m^6 + \alpha_5 m^5 + \alpha_4 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Berdasarkan Tabel 1. diperoleh persamaan-persamaan berikut.

➤ Untuk $m = 3$

$$\begin{aligned} P_6(3) &= \alpha_6(3)^6 + \alpha_5(3)^5 + \alpha_4(3)^4 + \alpha_3(3)^3 + \alpha_2(3)^2 + \alpha_1(3) + \alpha_0 \\ 16 &= 729\alpha_6 + 243\alpha_5 + 81\alpha_4 + 27\alpha_3 + 9\alpha_2 + 3\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(1)

➤ Untuk $m = 4$

$$\begin{aligned} P_6(4) &= \alpha_6(4)^6 + \alpha_5(4)^5 + \alpha_4(4)^4 + \alpha_3(4)^3 + \alpha_2(4)^2 + \alpha_1(4) + \alpha_0 \\ 112 &= 4096\alpha_6 + 1024\alpha_5 + 256\alpha_4 + 64\alpha_3 + 16\alpha_2 + 4\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(2)

➤ Untuk $m = 5$

$$\begin{aligned} P_6(5) &= \alpha_6(5)^6 + \alpha_5(5)^5 + \alpha_4(5)^4 + \alpha_3(5)^3 + \alpha_2(5)^2 + \alpha_1(5) + \alpha_0 \\ 448 &= 15625\alpha_6 + 3125\alpha_5 + 625\alpha_4 + 125\alpha_3 + 25\alpha_2 + 5\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(3)

➤ Untuk $m = 6$

$$\begin{aligned} P_6(6) &= \alpha_6(6)^6 + \alpha_5(6)^5 + \alpha_4(6)^4 + \alpha_3(6)^3 + \alpha_2(6)^2 + \alpha_1(6) + \alpha_0 \\ 1344 &= 46656\alpha_6 + 7776\alpha_5 + 1296\alpha_4 + 216\alpha_3 + 36\alpha_2 + 6\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(4)

➤ Untuk $m = 7$

$$\begin{aligned} P_6(7) &= \alpha_6(7)^6 + \alpha_5(7)^5 + \alpha_4(7)^4 + \alpha_3(7)^3 + \alpha_2(7)^2 + \alpha_1(7) + \alpha_0 \\ 3360 &= 117649\alpha_6 + 16807\alpha_5 + 2401\alpha_4 + 343\alpha_3 + 49\alpha_2 + 7\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(5)

➤ Untuk $m = 8$

$$\begin{aligned} P_6(8) &= \alpha_6(8)^6 + \alpha_5(8)^5 + \alpha_4(8)^4 + \alpha_3(8)^3 + \alpha_2(8)^2 + \alpha_1(8) + \alpha_0 \\ 7392 &= 262144\alpha_6 + 32768\alpha_5 + 4096\alpha_4 + 512\alpha_3 + 64\alpha_2 + 8\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(6)

➤ Untuk $m = 9$

$$\begin{aligned} P_6(9) &= \alpha_6(9)^6 + \alpha_5(9)^5 + \alpha_4(9)^4 + \alpha_3(9)^3 + \alpha_2(9)^2 + \alpha_1(9) + \alpha_0 \\ 14784 &= 531441\alpha_6 + 59049\alpha_5 + 6561\alpha_4 + 729\alpha_3 + 81\alpha_2 + 9\alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

(7)

Persamaan (4.2.15) – (4.2.21) membentuk SPL yang dapat ditulis dalam bentuk matriks $Ax = b$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 4096 & 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 15625 & 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 46656 & 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 117649 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_6 \\ \alpha_5 \\ \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 112 \\ 448 \\ 1344 \\ 3360 \\ 7392 \\ 14784 \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan nilai $\alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$, dan α_0 menggunakan aturan *Cramer* dengan nilai-nilai matriks A ; sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 4096 & 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 15625 & 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 46656 & 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 117649 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 16 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 112 & 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 448 & 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 1344 & 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 3360 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 7392 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 14784 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 729 & 16 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 4096 & 112 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 15625 & 448 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 46656 & 1344 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 117649 & 3360 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 7392 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 14784 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 729 & 243 & 16 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 4096 & 1024 & 112 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 15625 & 3125 & 448 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 46656 & 7776 & 1344 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 117649 & 16807 & 3360 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 32768 & 7392 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 59049 & 14784 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 729 & 243 & 81 & 16 & 9 & 3 & 1 \\ 4096 & 1024 & 256 & 112 & 16 & 4 & 1 \\ 15625 & 3125 & 625 & 448 & 25 & 5 & 1 \\ 46656 & 7776 & 1296 & 1344 & 36 & 6 & 1 \\ 117649 & 16807 & 2401 & 3360 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 7392 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 14784 & 81 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 16 & 1 \\ 4096 & 1024 & 256 & 64 & 16 & 112 & 1 \\ 15625 & 3125 & 625 & 125 & 25 & 448 & 1 \\ 46656 & 7776 & 1296 & 216 & 36 & 1344 & 1 \\ 117649 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 3360 & 1 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 7392 & 1 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 14784 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 16 \\ 4096 & 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 112 \\ 15625 & 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 448 \\ 46656 & 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1344 \\ 117649 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 3360 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 7392 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 14784 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks $A, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$, dan A_0 diperoleh nilai determinan menggunakan metode kofaktor sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -24883200 & \det(A_3) &= 8294400 \\ \det(A_6) &= -552960 & \det(A_2) &= -2211840 \\ \det(A_5) &= -1658880 & \det(A_1) &= -6635520 \\ \det(A_4) &= 2764800 & \det(A_0) &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai determinan yang telah diperoleh, maka nilai dari $\alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$, dan α_0 adalah

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= \frac{\det(A_6)}{\det(A)} = \frac{-552960}{-24883200} = \frac{1}{45} & \alpha_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2211840}{-24883200} = \frac{4}{45} \\ \alpha_5 &= \frac{\det(A_5)}{\det(A)} = \frac{-1658880}{-24883200} = \frac{3}{45} & \alpha_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6635520}{-24883200} = \frac{12}{45} \\ \alpha_4 &= \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{27648000}{-24883200} = -\frac{5}{45} & \alpha_0 &= \frac{\det(A_0)}{\det(A)} = \frac{0}{-24883200} = 0 \\ \alpha_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{8294400}{-24883200} = -\frac{15}{45} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh rumus umum suku ke- m pada barisan aritmatika polinomial orde enam adalah

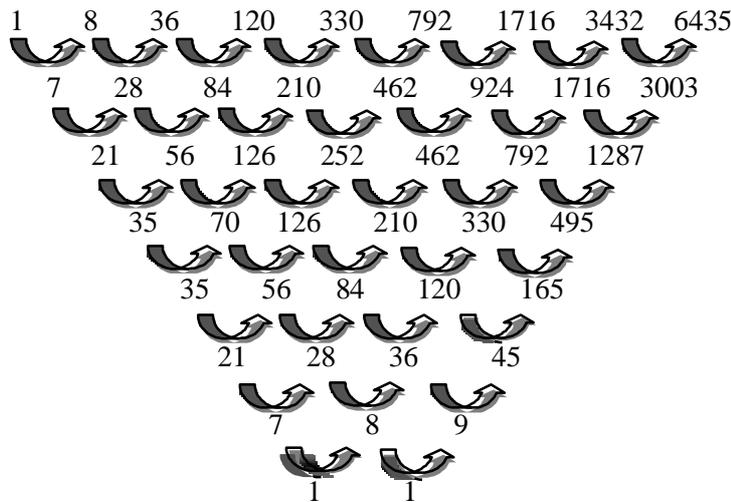
$$\begin{aligned} P_6(m) &= \frac{1}{45}m^6 + \frac{3}{45}m^5 - \frac{5}{45}m^4 - \frac{15}{45}m^3 + \frac{4}{45}m^2 + \frac{12}{45}m \\ P_6(m) &= \frac{1}{45}(m^6 + 3m^5 - 5m^4 - 15m^3 + 4m^2 + 12m) \\ P_6(m) &= \frac{1}{45}((m+3)(m+2)(m+1)(m)(m-1)(m-2)) \\ P_6(m) &= 16 \times C_6^{m+3} \end{aligned}$$

(Terbukti)

Berikut ini adalah rumus umum yang didapatkan untuk menentukan banyaknya graf terhubung untuk $n = 4$, dan $g = 4, 5, 6$ dengan menggunakan cara yang sama untuk mendapatkan Hasil 1 ($n = 4, g = 3$).

Berdasarkan tabel 3.1 untuk $n = 4, m \geq 4, g = 4$ diperoleh suatu barisan yang membentuk suatu pola, yaitu:

15 120 540 1800 4950 11880 25740 51480 96525



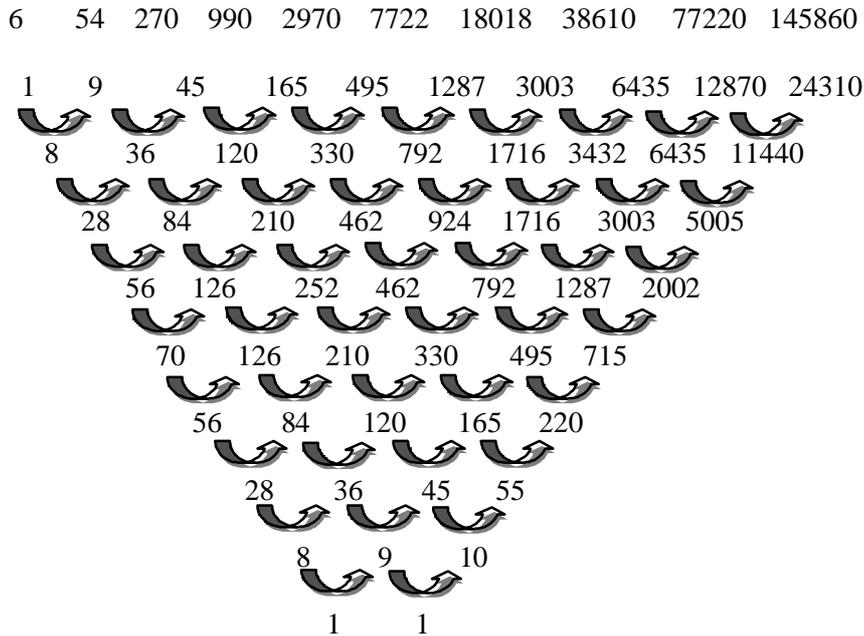
Karena selisihnya tepat berada pada orde ke-tujuh, maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika polinomial orde tujuh suku ke- m yaitu:

$$P_7(m) = \alpha_7m^7 + \alpha_6m^6 + \alpha_5m^5 + \alpha_4m^4 + \alpha_3m^3 + \alpha_2m^2 + \alpha_1m + \alpha_0$$

Hasil 2. Jumlah graf terhubung berlabel titik dengan $n = 4, m \geq 4, g = 4$ adalah

$$N(G_{4,m,4}) = 15 \times C_7^{m+3}$$

Berdasarkan tabel 3.1. untuk $n = 4, m \geq 5, g = 5$ diperoleh suatu barisan yang membentuk suatu pola, yaitu:



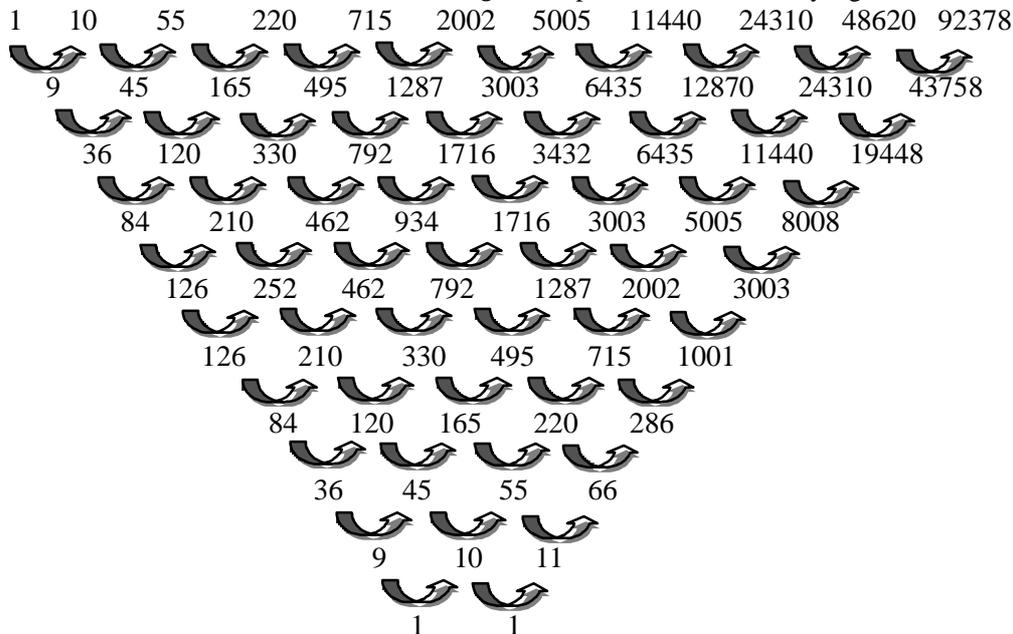
Karena selisihnya tepat berada pada orde ke-delapan, maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika polinomial orde delapan suku ke- m yaitu:

$$P_8(m) = \alpha_8 m^8 + \alpha_7 m^7 + \alpha_6 m^6 + \alpha_5 m^5 + \alpha_4 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Hasil 3. Jumlah graf terhubung berlabel titik dengan $n = 4, m \geq 5, g = 5$ adalah

$$N(G_{4,m,5}) = 6 \times C_8^{m+3}$$

Berdasarkan tabel 3.1. untuk $n = 4, m \geq 6, g = 6$ diperoleh suatu barisan yang membentuk suatu pola, yaitu:



Karena selisihnya tepat berada pada orde ke-sembilan, maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika polinomial orde sembilan suku ke- m yaitu:

$$P_9(m) = \alpha_9 m^9 + \alpha_8 m^8 + \alpha_7 m^7 + \alpha_6 m^6 + \alpha_5 m^5 + \alpha_4 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Hasil 4. Jumlah graf terhubung berlabel titik dengan $n = 4, m \geq 6, g = 6$ adalah

$$N(G_{4,m,6}) = C_9^{m+3}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan observasi terhadap graf terhubung berlabel titik berorde empat, maka banyaknya jumlah graf yang terbentuk berdasarkan jumlah g ialah

$$N(G_{4,m,4}) = 15 \times C_7^{m+3}; N(G_{4,m,5}) = 6 \times C_8^{m+3}; N(G_{4,m,6}) = C_9^{m+3}.$$

dengan g merupakan garis bukan loop atau paralel.

5. Daftar Pustaka

- Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari. 2017. *Counting The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs with Order Maximal Four*. Science International (Lahor) Vol.29, No.6, Hal.1181-1186.
- Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.
- Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit pada Ilmu Komputer*. Edisi Ketiga. ANDI, Yogyakarta.
- Conte, S.D. and Carl de Boor. 1980. *Dasar-Dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta.
- Anton, Howard and Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi 8. Erlangga. Jakarta.
- Agnarsson, G. And Raymon, D. G. 2007. *Graph Theory Modeling, Application, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education Inc, New Jersey.
- Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. *Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges*. Journal INSIST Vol.1, No.1, eISSN. Hal. 4-7.

BEBERAPA PENGGUNAAN RANTAI MARKOV PADA SAAT KONDISI STABIL (STEADY STATE)

Dimas Rahmat Saputra¹, Dian Kurniasari¹, Wamiliana¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : dimasrahmatsptr@gmail.com¹

Abstrak

Rantai Markov menggunakan peluang untuk mengetahui seberapa besar kemungkinan kejadian yang akan datang terjadi. Pada tahap tertentu peluang tersebut akan mencapai nilai keseimbangannya (steady). Peluang steady-state, dinotasikan adalah peluang untuk menemukan proses dalam keadaan tertentu, setelah sejumlah transisi terjadi cenderung kepada nilai tertentu, saling bebas terhadap distribusi peluang keadaan awal. Pada peluang steady-state tidak berarti berhenti pada satu state, tetapi proses terus membuat transisi dari state satu ke state lainnya. Peluang ini adalah peluang transisi yang sudah mencapai keseimbangan, sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi. Pada artikel ini akan didiskusikan beberapa studi kasus yang berhubungan dengan rantai Markov pada keadaan seimbang (steady-state).

Kata kunci: Rantai Markov, Peluang Steady-State, Persediaan Barang

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan nyata, sejumlah fenomena dapat dipikirkan sebagai percobaan yang mencakup sederetan pengamatan yang berturut-turut dan bukan satu kali pengamatan. (Assauri, 2008). Umumnya, tiap pengamatan dalam suatu percobaan tergantung pada beberapa atau semua pengamatan masa lalu dan hasil tiap pengamatan, ditentukan dengan hukum-hukum peluang. Studi tentang percobaan dalam bentuk seperti ini dikenal dengan teori proses stokastik.

Proses stokastik didefinisikan sebagai himpunan peubah acak yang diberi indeks $\{X_t\}$, dimana indeks t berjalan melalui himpunan T yang diberikan. Seringkali T diambil sebagai himpunan bilangan bulat nonnegatif, dan X_t menjelaskan karakteristik pengukuran yang utama pada waktu t (Hillier dan Lieberman, 2001). Proses ini adalah objek matematika yang biasanya didefinisikan sebagai kumpulan variabel acak. Secara historis, variabel acak dikaitkan atau diindeks oleh serangkaian angka, biasanya dilihat sebagai titik waktu, memberikan interpretasi proses stokastik yang mewakili nilai numerik dari beberapa sistem yang secara acak berubah dari waktu ke waktu. Pengamatan yang berturut-turut dalam suatu percobaan merupakan pengamatan-pengamatan bebas artinya hasil suatu pengamatan tertentu tidak tergantung pada sesuatu hasil pengamatan di masa lalu dan sebaliknya tidak mempengaruhi hasil pengamatan di masa mendatang. Hal seperti ini merupakan keadaan atau bentuk khusus dari proses stokastik dan dikenal dengan proses bebas. Namun dalam suatu percobaan yang lebih rumit, hasil suatu pengamatan tertentu akan tergantung pada hasil pengamatan sebelumnya (terdahulu) dan selanjutnya akan mempengaruhi hasil pengamatan di masa mendatang.

Proses stokastik yang memiliki sifat-sifat ketergantungan seperti ini dikenal dengan proses Markov. Prosedur ini dikembangkan oleh matematikawan Rusia, Andrei A Markov pada tahun 1907. Rantai Markov adalah suatu model stokastik yang menggambarkan barisan kejadian yang peluangnya hanya tergantung pada kejadian sebelumnya. Rantai Markov menggunakan peluang untuk mengetahui seberapa besar kemungkinan kejadian yang akan datang terjadi. Pada tahap tertentu peluang tersebut akan mencapai nilai keseimbangannya (steady).

Dalam rantai Markov terdapat peluang steady-state, yang dinotasikan dengan π_j . Peluang ini adalah peluang yang bertujuan menemukan proses dalam keadaan tertentu, misalkan j , setelah sejumlah transisi terjadi cenderung kepada nilai π_j , saling bebas terhadap distribusi peluang keadaan awal.

Rantai Markov dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya untuk memperkirakan peluang persediaan barang. Persediaan barang adalah bahan-bahan, bagian yang disediakan, dan bahan-bahan dalam proses yang terdapat dalam perusahaan untuk proses produksi, serta barang-barang jadi atau produk yang disediakan untuk memenuhi permintaan dari konsumen atau pelanggan. Berkaitan dengan hal

tersebut, maka akan didiskusikan dan memberikan contoh kasus tentang bagaimana menganalisis rantai Markov menggunakan peluang *steady-state*.

2. Bahan dan Metode

Proses stokastik didefinisikan sebagai himpunan peubah acak yang diberi indeks $\{X_t\}$, dimana indeks t berjalan melalui himpunan T yang diberikan. Seringkali T diambil sebagai himpunan bilangan bulat non negatif, dan X_{-t} menjelaskan karakteristik pengukuran yang utama pada waktu t (Hillier dan Lieberman, 2001).

Proses stokastik merupakan kumpulan dari variabel random $\{X_t(s) | t \in T, s \in S\}$, dengan T adalah himpunan indeks dan S adalah ruang sampel. Himpunan indeks sering merepresentasikan waktu. Jika $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ proses stokastik merupakan proses stokastik dengan waktu diskrit. Ketika $T = [0, \infty)$, proses stokastik merupakan proses stokastik dengan waktu kontinu (Taylor dan Karlin, 1998).

State adalah kondisi yang merupakan peubah acak X_t , dimana jika suatu peubah acak berada pada state tersebut maka dapat berpindah ke state lainnya. Biasanya state dilambangkan dengan bilangan asli, yaitu $1, 2, 3, \dots, N$. Himpunan atau kumpulan dari state-state tersebut membentuk ruang state dan dinyatakan dengan Ω , maka $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ (Cox dan Miller, 1965). Asumsi mengenai distribusi bersama X_0, X_1, \dots Diperlukan untuk mendapatkan hasil analisis. Salah satu asumsi yang mengarah pada analisis tractability adalah proses stokastik adalah rantai Markov, yang memiliki sifat sebagai berikut:

Proses stokastik $\{X_t\}$ dikatakan memiliki sifat Markov jika $P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$, untuk $t = 0, 1, \dots$ dan setiap deret $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$.

Dengan kata lain, sifat Markov ini mengatakan bahwa peluang bersyarat dari "peristiwa" masa depan, mengingat adanya "peristiwa" sebelumnya dan keadaan sekarang $X_t = i$, tidak bergantung pada peristiwa masa lalu dan hanya bergantung pada keadaan sekarang. Proses stokastik $\{X_t\}$ ($t = 0, 1, \dots$) adalah rantai Markov jika memiliki sifat Markov (Hillier dan Lieberman, 2001).

Rantai Markov adalah proses waktu integer $\{X_n, n \geq 0\}$ dimana setiap nilai sampel untuk setiap $X_n, n \geq 1$, terdapat pada himpunan berhingga S dan bergantung hanya pada kejadian masa lalu hanya melalui kejadian X_{n-1} . Secara spesifik, untuk semua bilangan positif n , dan untuk semua i, j, k, \dots, m , dalam himpunan S . Selain itu, Peluang $P\{X_n = j | X_{n-1} = i\}$ bergantung hanya pada i dan j dan bukan n dan dilambangkan dengan

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = p_{ij} \quad (\text{Gallager, 2011})$$

Dalam kebanyakan sistem yang muncul, state masa lalu dan sekarang mempengaruhi keadaan masa depan bahkan jika mereka tidak menentukannya secara unik. Banyak sistem memiliki sifat yang memberikan keadaan sekarang, state masa lalu tidak memiliki pengaruh terhadap masa depan. Hal ini disebut sifat Markov, dan sistem yang memiliki sifat ini disebut rantai Markov.

Dalam mempelajari rantai Markov, state memiliki peran yang penting. Untuk memahami sifat Markov lebih lanjut, berikut ini akan dijelaskan beberapa istilah yang berkaitan dengan rantai Markov.

State j dikatakan *accessible* dari state i jika $p_{ij}^{(n)} > 0$ untuk setiap $n \geq 0$. Jika state j menjadi *accessible* dari state i berarti dapat dikatakan sistem dapat berpindah ke state j ketika dimulai dari state i . Secara umum, kondisi state untuk dapat dikatakan *accessible* jika terdapat nilai untuk n untuk setiap $p_{ij}^{(n)} > 0$ untuk semua i dan j .

Jika state j *accessible* dari state i dan state i *accessible* dari state j , maka state i dan state j disebut *communicate*. Secara umum terdapat tiga sifat yaitu

1. Setiap state *ter-communicate* dengan state itu sendiri
2. Jika state i *communicate* dengan state j , maka state j *communicate* dengan state i
3. Jika state i *communicate* dengan state j dan state j *communicate* dengan state k , maka state i *communicate* dengan state k

Dari ketiga sifat *communicate* tersebut, state dapat dibagi menjadi satu atau beberapa kelas atau ruang (satu ruang dapat memuat sebuah state). Jika terdapat hanya satu kelas dan state di dalamnya *communicate*, maka rantai Markov tersebut dapat dikatakan *irreducible*.

State dikatakan *transient* jika saat memasuki state lain, prosesnya tidak kembali ke state sebelumnya. Selain itu, state i disebut *transient* jika dan hanya jika terdapat state j ($j \neq i$) yang *accessible* dari state i . Hal ini tidak berlaku jika state i tidak *accessible* dari state j . State dikatakan *recurrent* jika saat memasuki state lain, prosesnya akan kembali ke state awal. Karena state *recurrent* ini akan kembali setiap berpindah, state akan dikunjungi kembali secara tak terbatas jika proses berlanjut seterusnya (Hillier dan Lieberman, 2001).

Peluang *steady-state*, dinotasikan dengan π_j , adalah peluang untuk menemukan proses dalam keadaan tertentu, misalkan j , setelah sejumlah transisi terjadi cenderung kepada nilai π_j , saling bebas terhadap distribusi peluang keadaan awal. Pada peluang *steady-state* tidak berarti berhenti pada satu *state*,

tetapi proses terus membuat transisi dari *state* satu ke *state* lainnya, dan pada setiap *state* ke- n peluang transisi dari i ke j tetap p_{ij} . Peluang ini adalah peluang transisi yang sudah mencapai keseimbangan, sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi. Adapun peluang *steady-state* didefinisikan sebagai berikut.

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

dimana

π_j : peluang *steady-state*

$p_{ij}^{(n)}$: peluang perpindahan dari *state* i ke *state* j setelah n langkah

Adapun sifat dari peluang *steady-state* yaitu sebagai berikut.

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij} \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, M$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

(Hillier dan Lieberman, 2001)

3. Hasil dan Pembahasan

Rantai Markov memiliki konsep dasar *state* dari suatu sistem dan transisi atau perpindahan *state*. Rantai Markov adalah proses waktu integer $\{X_n, n \geq 0\}$ dimana setiap nilai sampel untuk setiap $X_n, n \geq 1$, terdapat pada himpunan berhingga S dan bergantung hanya pada kejadian masa lalu hanya melalui kejadian X_{n-1} . Peluang *steady-state*, dinotasikan dengan π_j , adalah peluang untuk menemukan proses dalam keadaan tertentu, misalkan j , setelah sejumlah transisi terjadi cenderung kepada nilai π_j , saling bebas terhadap distribusi peluang keadaan awal. Peluang ini adalah peluang transisi yang sudah mencapai keseimbangan, sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi. Adapun peluang *steady-state* didefinisikan

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

dimana

π_j : peluang *steady-state*

$p_{ij}^{(n)}$: peluang perpindahan dari *state* i ke *state* j setelah n langkah

Adapun sifat dari peluang *steady-state* yaitu sebagai berikut.

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij} \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, M$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

Berikut ini diberikan beberapa studi kasus :

1. Studi kasus 1

Suatu toko kamera menyimpan model kamera tertentu yang bisa dipesan mingguan. Misalkan D_1, D_2, \dots menggambarkan permintaan kamera ini (jumlah unit yang akan terjual jika persediaannya tidak habis) selama minggu pertama, minggu kedua, dan seterusnya. Diasumsikan bahwa D_i adalah variabel acak terdistribusi independen dan identik yang memiliki distribusi Poisson dengan rata-rata 1. Misalkan X_0 mewakili jumlah kamera yang ada sejak awal, X_1 jumlah kamera yang ada pada akhir minggu 1, X_2 jumlah kamera yang ada di penghujung minggu 2, dan seterusnya. Asumsikan bahwa $X_0 = 3$. Pada Sabtu malam, toko tersebut memesan barang yang dikirimkan tepat pada waktunya untuk pembukaan toko berikutnya pada hari Senin. Toko menggunakan kebijakan pesanan berikut: Jika jumlah kamera di tangan pada akhir setiap minggu adalah 0 atau 1, dua kamera tambahan akan dipesan. Jika tidak, tidak akan ada pemesanan. Tentukan peluang *steady-state* dari rantai Markov ini.

Dari studi kasus tersebut dapat ditentukan bahwa *state* dapat dimisalkan menjadi X , dengan X_t adalah jumlah kamera yang ada setelah pengiriman pada akhir minggu t . Kemudian dapat dimisalkan D_t sebagai jumlah kamera yang diminta setelah pengiriman pada akhir minggu t . Pada studi kasus ini terdapat ketentuan dimana jika jumlah kamera di tangan pada akhir setiap minggu adalah 0 atau 1, dua kamera tambahan akan dipesan. Jika tidak, tidak akan ada pemesanan. Dalam hal ini X_t dapat dibuat dalam rumusan berikut

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max(X_t + 2 - D_{t+1}) = 0 \\ \max(X_t - D_{t+1}) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Untuk } X_t = 1 \\ 2 \end{matrix} ; X_t \geq 2$$

Selanjutnya akan dibentuk matriks probabilitas transisi sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix}$$

Perlu diperhatikan jika jumlah kamera di tangan pada akhir setiap minggu adalah 0 atau 1, dua kamera tambahan akan dipesan. Jika tidak, tidak akan ada pemesanan. akan bernilai nol. Adapun entri matriks yang bernilai nol di atas adalah p_{14} dan p_{34} karena tidak mungkin kamera dapat bertambah sesuai *state* tersebut. Selanjutnya akan dibuat persamaan *steady-state* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,264 \pi_0 + 0,368 \pi_1 + 0,368 \pi_2 \\ \pi_1 &= 0,080 \pi_0 + 0,184 \pi_1 + 0,368 \pi_2 + 0,368 \pi_3 \\ \pi_2 &= 0,264 \pi_0 + 0,368 \pi_1 + 0,368 \pi_2 \\ \pi_3 &= 0,080 \pi_0 + 0,184 \pi_1 + 0,368 \pi_2 + 0,368 \pi_3 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut, didapatkan solusi yaitu

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,182 & \pi_2 &= 0,368 \\ \pi_1 &= 0,285 & \pi_3 &= 0,165 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian tersebut, maka didapatkan kesimpulan peluang pemesanan kamera tambahan sejumlah 0, 1, 2, dan 3 kamera berturut-turut adalah 0,182; 0,285; 0,368; dan 0,165, dengan peluang pemesanan kamera tambahan paling besar adalah pada saat minggu ke 2.

2. Studi Kasus 2

Perhatikan masalah persediaan darah yang dihadapi RSUD berikut.

Ada kebutuhan golongan darah yang langka, yaitu, tipe AB, Rhesus darah negatif. Permintaan D (dalam kantong) selama periode 3 hari diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P\{D = 0\} &= 0,4 & P\{D = 2\} &= 0,2 \\ P\{D = 1\} &= 0,3 & P\{D = 3\} &= 0,1 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa permintaan yang diharapkan adalah 1 kantong, karena $E(D) = 0.3(1)+0.2(2)+0.1(3) = 1$. Misalkan ada 3 hari antara pengiriman, rumah sakit mengusulkan kebijakan menerima 1 kantong di setiap pengiriman dan menggunakan darah yang lebih awal dahulu. Jika lebih banyak darah yang dibutuhkan ada di tangan, akan dibuat pengiriman darurat yang mahal. Darah dibuang jika masih di penyimpanan setelah 21 hari. Perhatikan *state* sistem sebagai jumlah kantong darah di persediaan tepat setelah pengiriman. Karena terdapat kebijakan kantong darah dibuang, kemungkinan *state* terbesar adalah 7. Tentukan peluang *steady-state* dari rantai Markov ini.

Dari studi kasus tersebut dapat ditentukan bahwa *state* dapat dimisalkan menjadi X_t , dengan X_t adalah jumlah kantong darah yang ada setelah pengiriman pada periode t . Kemudian dapat dimisalkan D_t sebagai jumlah kantong darah yang diminta setelah pengiriman pada periode t . Pada studi kasus ini terdapat ketentuan dimana kantong darah akan dibuang jika tidak digunakan dalam 21 hari, dengan periode pengiriman setiap tiga hari sekali, maka kemungkinan *state* paling besar adalah 7. Dalam hal ini X_t dapat dibuat dalam rumusan berikut,

$$X_{t+1} = \{ \max (X_t + 1 - D_t) = 0$$

Selanjutnya akan dibentuk matriks probabilitas transisi sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,0 & 0,0 & 0,00,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,3 & 0,30,4 & 0,0 & 0,00,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,1 & 0,20,3 & 0,4 & 0,00,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,10,2 & 0,3 & 0,40,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,00,1 & 0,2 & 0,30,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,00,0 & 0,1 & 0,20,3 & 0,4 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,00,0 & 0,0 & 0,10,2 & 0,7 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$$

Perlu diperhatikan berdasarkan rumusan diatas bahwa khusus entri dari matriks transisi dimana jika jumlah kantong darah yang tersedia pada periode berikutnya lebih banyak daripada periode sebelumnya dengan selisih lebih dari satu, maka jumlah permintaan barang akan bernilai minus. Akibatnya peluangnya akan bernilai nol. Adapun entri matriks yang memenuhi kriteria di atas adalah p_{17} sampai p_{13} , p_{27} sampai p_{23} , p_{37} sampai p_{34} , p_{47} , p_{46} , dan p_{57} . Selain itu, khusus untuk entri matriks dimana berdasarkan rumusan diatas yang mengharuskan jumlah permintaan kantong darah lebih dari sama dengan empat [$P (D \geq 4)$], maka peluangnya akan bernilai nol. Adapun entri matriks yang memenuhi kriteria tersebut adalah p_{41} , p_{51} , p_{52} , p_{61} sampai p_{63} , p_{71} sampai p_{74}

Selanjutnya akan dibuat persamaan *steady-state* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,6 \pi_1 + 0,4 \pi_2 \\ \pi_2 &= 0,3 \pi_1 + 0,3 \pi_2 + 0,4 \pi_3 \\ \pi_3 &= 0,1 \pi_1 + 0,2 \pi_2 + 0,3 \pi_3 + 0,4 \pi_4 \\ \pi_4 &= 0,1 \pi_2 + 0,2 \pi_3 + 0,3 \pi_4 + 0,4 \pi_5 \\ \pi_5 &= 0,1 \pi_3 + 0,2 \pi_4 + 0,3 \pi_5 + 0,4 \pi_6 \\ \pi_6 &= 0,1 \pi_4 + 0,2 \pi_5 + 0,3 \pi_6 + 0,4 \pi_7 \\ \pi_7 &= 0,1 \pi_5 + 0,2 \pi_6 + 0,7 \pi_7 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut, didapatkan solusi yaitu

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,134 & \pi_3 &= 0,134 \\ \pi_2 &= 0,134 & \pi_4 &= 0,178 \\ \pi_5 &= 0,141 & \pi_7 &= 0,174 \\ \pi_6 &= 0,130 & & \end{aligned}$$

Dari penyelesaian tersebut, maka didapatkan kesimpulan peluang kantong darah dibuang dalam periode tiga hari pertama hingga ketujuh tidak terlalu besar, yang artinya kantong darah tersebut selalu digunakan.

3. Studi Kasus 3

Lihat kembali studi kasus pertama dengan peluang sebagai berikut

$$\begin{aligned} P\{D = 0\} &= 0,25 & P\{D = 2\} &= 0,25 \\ P\{D = 1\} &= 0,5 & P\{D = 3\} &= 0 \end{aligned}$$

Kebijakan pemesanan sekarang diubah untuk memesan hanya 2 kamera di akhir minggu jika tidak ada stok. Seperti studi kasus pertama, tidak ada pesananditempatkan jika ada kamera dalam persediaan. Asumsikan bahwa ada satukameradalam stok pada saat itu (akhir minggu) kebijakan ditetapkan.Tentukan peluang *steady-state* dari rantai Markov ini.

Dari studi kasus tersebut dapat ditentukan bahwa *state* dapat dimisalkan menjadi X, dengan X_t adalah jumlah kamera yang ada setelah pengiriman pada akhir minggu t. Kemudian dapat dimisalkan D_t sebagai jumlah kamera yang diminta setelah pengiriman pada akhir minggu t. Pada studi kasus ini terdapat ketentuan dimana jika jumlah kamera di tangan pada akhir setiap minggu adalah 0 atau 1, dua kamera tambahan akan dipesan. Jika tidak, tidak akan ada pemesanan. Dalam hal ini X_t dapat dibuat dalam rumusan berikut.

$$X_{t+1} = \{ \max (X_t + 1 - D_t)$$

Selanjutnya akan dibentuk matriks probabilitas transisi sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,50 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Perlu diperhatikan berdasarkan rumusan diatas bahwa toko hanya memesan hanya 2 kamera di akhir minggu jika tidak ada stok. Seperti studi kasus pertama, tidak ada pesanan ditempatkan jika ada kamera dalam persediaan. Terdapat satu kamera dalam stok pada saat itu (akhir minggu) kebijakan ditetapkan. Adapun entri matriks yang tidak memenuhi kriteria di atas adalah p_{22} karena tidak memenuhi persyaratan yang ditetapkan oleh toko.

Selanjutnya akan dibuat persamaan *steady-state* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,25 \pi_0 + 0,50 \pi_1 + 0,25 \pi_2 \\ \pi_1 &= 0,75 \pi_0 + 0,25 \pi_1 \\ \pi_2 &= 0,25 \pi_0 + 0,50 \pi_1 + 0,25 \pi_2 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut, didapatkan solusi persamaan yaitu

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,45 & \pi_2 &= 0,15 \\ \pi_1 &= 0,40 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian tersebut, maka didapatkan kesimpulan peluang kamera dipesan kembali hanya 2 kamera ketika masih terdapat stok barang secara berturut-turut yaitu 0,45; 0,40; dan 0,15 untuk minggu awal, minggu pertama dan kedua.

4. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah bahwa proses Markov dapat digunakan sebagai solusi untuk menghitung peluang stok barang yang akan diambil dengan memanfaatkan jumlah barang yang ada pada saat ini.

Adapun dari tiga studi kasus yang telah dibahas, didapatkan hasil sebagai berikut:

1. Pada studi kasus pertama, dari penyelesaian tersebut, didapatkan kesimpulan peluang pemesanan kamera tambahan sejumlah 0, 1, 2, dan 3 kamera berturut-turut adalah 0,182; 0,285; 0,368; dan 0,165, dengan peluang pemesanan kamera tambahan paling besar adalah pada saat minggu ke 2.
2. Pada studi kasus kedua, dari penyelesaian tersebut, didapatkan kesimpulan peluang kantong darah dibuang dalam periode tiga hari pertama hingga ketujuh tidak terlalu besar, yang artinya kantong darah tersebut selalu digunakan.
3. Pada studi kasus ketiga, dari penyelesaian tersebut, didapatkan kesimpulan peluang kamera dipesan kembali hanya 2 kamera ketika masih terdapat stok barang secara berturut-turut yaitu 0,45; 0,40; dan 0,15 untuk minggu awal, minggu pertama dan kedua

5. Daftar Pustaka

Assauri, Soyjan. 2008. *Manajemen Produksi dan Operasi*. Jakarta: LPFEUI.

Cox, D. R., Miller, H. D. 1965. *The Theory of Stochastic Process*. London: Chapman and Hall.

Gallager, Robert G. 2011. *Stochastic Processes: Theory for Application*. New York: Cambridge University Press.

Hillier, F.S. dan Lieberman, G.J. 2001. *Introduction to Operation Research*. New York: McGraw-Hill.

Taylor, H.M. dan Karlin, S. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. San Diego: Academic Press.

RUANG BARISAN SELISIH $l_{3/2}(\Delta_2)$

Aulia Rahman¹, Muslim Anshori¹, Dorrah Aziz¹

¹Jurusan Matematika FMIPA UNILA
Jl. Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, B.Lampung 35145
Penulis Korespondensi : rahmanunila@gmail.com

ABSTRAK

Salah satu bidang kajian yang berada pada matematika adalah bidang analisis. Dalam bidang ini, konsep ruang barisan termasuk yang sering dibicarakan. Pada ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis, membahas tentang ruang barisan yang dimanal_∞ adalah koleksi ruang barisan yang $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$, c_0 adalah koleksi barisan bilangan yang konvergen ke-0, c adalah koleksi semua barisan yang konvergen dan l_p adalah $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Ruang barisan sendiri merupakan ruang yang isinya barisan sedangkan barisan sendiripun merupakan suatu fungsi yang domainnya bilangan asli yang bernilai real. Dalam Penelitian ini akan dikonstruksikan ruang barisan selisih pada ruang barisan $l_{3/2}$ dengan norma tertentu. Pada penelitian ini akan menunjukkan sifat ruang barisan selisih $l_{3/2}$, $l_{3/2}(\Delta)$, $l_{3/2}(\Delta_2)$ adalah ruang barisan terbatas, kovergen dan merupakan ruang banach. Selanjutnya dari penelitian ini sendiri akan menunjukkan bahwa ruang barisan selisih $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang banach.

Kata kunci: Ruang Bernorm, Ruang Barisan Selisih, Ruang Banach.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran, perhitungan dalam pengambilan keputusan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis. Bidang ini merupakan bagian dari matematika. Dalam bidang ini, konsep ruang barisan termasuk yang dibicarakan. Pada ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis, membahas tentang ruang barisan yang dimanal_∞ adalah koleksi ruang barisan yang $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$, c_0 adalah koleksi barisan bilangan yang konvergen ke-0, c adalah koleksi semua barisan yang konvergen dan l_p adalah $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Kemudian dari pemikiran dasar tersebut digunakan oleh Colak R. (1995), dengan menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_{\infty}(\Delta)$, $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$, dan $l_p(\Delta)$ (Colak, 1945). Dari pemikiran tersebut penulis mencoba mempelajari lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_{3/2}(\Delta_2)$.

2. Metode Penelitian

Metode-metode yang digunakan untuk menunjukkan Ruang Barisan Selisih $l_{3/2}(\Delta_2)$ ini adalah metode studi literatur dengan diawali studi sejumlah konsep tentang barisan, ruang bernorm, ruang barisan selisih dan ruang banach. Kemudian langkah penelitian ini selanjutnya akan dilakukan denag diantaranya sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa ruang $l_{3/2}$, adalah ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach
2. Menunjukkan bahwa ruang $l_{3/2}(\Delta)$, ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach
3. Menunjukkan bahwa ruang $l_{3/2}(\Delta_2)$, ruang barisan terbatas, konvergen, dan merupakan ruang Banach

3. Hasil Dan Pembahasan

Diketahui rumus umum ruang barisan selisih:

$$\Delta_m \tilde{x} = \{\Delta_m x_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i} \right\}$$

sebelumnya akan ditunjukkan terlebih dahulu sifat sifat ruang barisan $l_{3/2}$, dan $l_{3/2}(\Delta)$ ruang bernorm, konvergen dan merupakan ruang banach.

Sebelumnya perhatikan bahwa untuk $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ dengan $\|x\| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, merupakan ruang Banach, artinya untuk setiap barisan Cauchy $\{x^n\} \subset \mathbb{R}$, selalu konvergen, yaitu untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli m, n dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x^m - x^n\| < \varepsilon$.

Selanjutnya akan dibuktikan

$$l_{3/2} = \left\{ x = \{x_i\} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} < \infty \right\}$$

dengan $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right)^{1/3/2}$ merupakan ruang Banach.

Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right)^{1/3/2}$ merupakan norma pada $l_{3/2}$ adalah sebagai berikut:

(I). $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right)^{1/3/2} > 0$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{3/2}$

Karena untuk setiap bilangan mutlak selalu lebih besar sama dengan 0.

$\|x\| = \sup_{i=1}^{\infty} |x_i| = 0$ jika dan hanya jika $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots$ atau $(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots)$, yaitu $x = \bar{0}$

(II). $\|\alpha x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^{3/2} \right)^{1/3/2} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha| + |x_k|)^{3/2} \right\}^{1/3/2}$
 $= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right\}^{1/3/2}$
 $= |\alpha| \cdot \|x\|$

(IV). $\|x + y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{3/2} \right)^{1/3/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|)^{3/2} \right)^{1/3/2}$
 $= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right\}^{1/3/2} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{3/2} \right\}^{1/3/2}$
 $= \|x\| + \|y\|$

Terbukti $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2} \right)^{1/3/2}$ merupakan norma pada $l_{3/2}$

Selanjutnya akan ditunjukkan $l_{3/2}$ merupakan ruang barisan yang lengkap.

a) Diambil sebarang bilangan Chauchy $\tilde{x}^{(n)} = \{x_k^{(n)}\} \subset l_{3/2}$ dengan

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \dots, x_1^{(n)} \dots) \\ \tilde{x}_2 &= (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \dots, x_2^{(n)} \dots) \\ \tilde{x}_3 &= (x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots, x_3^{(n)} \dots) \\ &\vdots \\ \tilde{x}_k &= (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}, \dots, x_k^{(n)} \dots) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(n)} &= \{x_k^{(n)}\} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) \\ \tilde{x}^{(m)} &= \{x_k^{(m)}\} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots, x_k^{(m)}) \end{aligned}$$

$\tilde{x}^{(m)}, \tilde{x}^{(n)} \subset l_{3/2} \Leftrightarrow \{\tilde{x}^{(m)}\}, \{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}$ sebab;

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ berlaku:

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}) &= (\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}, \tilde{x}_2^{(m)} - \tilde{x}_2^{(n)}, \tilde{x}_3^{(m)} - \tilde{x}_3^{(n)}, \dots, \tilde{x}_k^{(m)} - \tilde{x}_k^{(n)}) \\ &\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} < \varepsilon \text{ atau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{3/2} \right\}^{1/3/2} &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \rightarrow |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{3/2} \right\}^{1/3/2} &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Untuk setiap $m, n \geq n_0$ hal ini berakibat:

$$x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \text{ untuk setiap } k$$

Atau diperoleh untuk setiap k barisan $\{x_k^{(n)}\}$ merupakan barisan bilangan Cauchy. Jadi untuk setiap k barisan $\{x_k^{(n)}\}$ konvergen. Katakanlah konvergen x_k atau, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k^{(n)} - x_k| = 0$

Dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$, mengingat (a) diperoleh

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} &= |x_1^m - x_1^n| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_1^{(m)} - x_1^{(n)}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Jadi barisan $\{x_k^{(n)}\}$ konvergen ke \tilde{x} .

Selanjutnya $\|\tilde{x}\|_{3/2} = \|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)} + \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} \leq \|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} + \|\tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} \dots \dots \dots (b)$

Jadi, terbukti barisan chauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l_{3/2}$. Dengan kata lain $l_{3/2}$ merupakan ruang banach.

Akan ditunjukkan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang banach terhadap norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_3$ dengan

$$\Delta\tilde{x} - \{\Delta x_k\} = \{x_{k+1} - x_k\}$$

Akan ditunjukkan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang linier, sebab untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\text{Maka } \Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{y} \in l_{3/2} \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k - \Delta y_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k) + (y_{k+1} - y_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \tilde{x} + \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta) \tag{1}$$

Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$ diperoleh $\alpha\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha\tilde{x}) &= \{\Delta\alpha x_k\} \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha| |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Dari persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta)$ ruang linier.

Selanjutnya akan ditunjukkan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|\cdot\|_{(\Delta, \frac{3}{2})}$

$$\|\cdot\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(N₁) Untuk setiap $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta)$

$$\|\cdot\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\|\cdot\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} = 0 \leftrightarrow |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |x_{k+1} - x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k \\ \leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |x_1 - x_2| = 0, |x_3 - x_2| = 0, \dots \dots \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \dots = 0$$

$$\tilde{x} = \{0\} = \vec{0}$$

(N₂) Untuk setiap α skalar $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \|\Delta\tilde{x}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} &= |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha| |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| + |x_1| + |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} \right) \\ &= |\alpha| \|\tilde{x}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

(N₃) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta) \leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{Jika } \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} &= |x_1 + y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k - y_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} + |y_1| + \|\Delta\tilde{y}\|_{(\frac{3}{2})} \\ &= \|\tilde{x}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} + \|\tilde{y}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

Dari N₁, N₂ dan N₃ benar bahwa $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan ruang bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukkan $l_{3/2}(\Delta)$ merupakan lengkap. Diambil sebarang bilangan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}(\Delta)$ dengan

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}_1 &= (\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_1^{(2)}, \Delta x_1^{(3)}, \dots, \Delta x_1^{(n)}) \\ \Delta\tilde{x}_2 &= (\Delta x_2^{(1)}, \Delta x_2^{(2)}, \Delta x_2^{(3)}, \dots, \Delta x_2^{(n)}) \\ \Delta\tilde{x}_3 &= (\Delta x_3^{(1)}, \Delta x_3^{(2)}, \Delta x_3^{(3)}, \dots, \Delta x_3^{(n)}) \\ &\vdots \\ \Delta\tilde{x}_k &= (\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots, \Delta x_1^{(n)} \dots) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}^{(n)} &= \{\Delta x_k^{(n)}\} = (\Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(n)}, \dots, \Delta x_k^{(n)}) \\ \Delta\tilde{x}^{(m)} &= \{\Delta x_k^{(m)}\} = (\Delta x_1^{(m)}, \Delta x_2^{(m)}, \Delta x_3^{(m)}, \dots, \Delta x_k^{(m)}) \\ \Delta\tilde{x}^{(m)}, \Delta\tilde{x}^{(n)} &\subset l_{3/2} \Leftrightarrow \{\Delta\tilde{x}^{(m)}\}, \{\Delta\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2} \text{ sebab;} \end{aligned}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ berlaku:

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{3/2} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$(\Delta\tilde{x}^{(m)} - \Delta\tilde{x}^{(n)}) = (\Delta x_1^{(m)} - \Delta x_1^{(n)}, \Delta x_2^{(m)} - \Delta x_2^{(n)}, \Delta x_3^{(m)} - \Delta x_3^{(n)}, \dots, \Delta x_k^{(m)} - \Delta x_k^{(n)})$$

Sehingga,

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta, \frac{3}{2})} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ benar bahwa

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} < \varepsilon \text{ atau } |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rightarrow |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan persamaan diatas, hal ini berakibat untuk setiap $m, n \geq n_0$ benar bahwa:

$\{\Delta x_k^{(n)}\} = |x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon$ barisan chauchy untuk setiap k

(a) $\Delta x_1^{(n)} = \{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\} = \{x_2^{(n)}\} - \{x_1^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy.

Jadi ada x_1 sehingga $\{x_1^{(n)}\}$ konvergen ke x_1 dan $\{x_2^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Jadi ada bilangan x_2 sehingga $\{x_2^{(n)}\}$ konvergen ke x_2

hal ini berakibat:

$$\{\Delta x_2^{(n)}\} = \{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_2 - x_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\} = x_2 - x_1$$

(b) $\Delta x_2^{(n)} = \{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}\} = \{x_3^{(n)}\} - \{x_2^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Karena $\{x_2^{(n)}\}$ konvergen ke x_2 maka $\{x_3^{(n)}\}$ konvergen ke x_3

hal ini berakibat

$$\{\Delta x_2^{(n)}\} = \{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_3 - x_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}\} = x_3 - x_2$$

(c) Selanjutnya dianggap benar $\{x_k^{(n)}\}$ konvergen ke x_k untuk setiap $k=1,2,3,\dots,m$, ibuktikan $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ konvergen. Maka barisan $\{\Delta x_{m-1}^{(n)}\} = \{x_m^{(n)} - x_{m-1}^{(n)}\}$ barisan chauchy. Karena $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ dan $\{x_m^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy yang konvergen ke x_{m-1} dan x_m , maka $\{x_m^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Jadi ada bilangan x_m sehingga $\{x_m^{(n)}\}$ konvergen ke x_m dan ada x_{m-1} sehingga $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ konvergen ke x_{m-1}

Akan ditunjukkan $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang linier, sebab:

untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2 \tilde{x}, \Delta_2 \tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \infty \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+2} + 2y_{k+1} + x_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \infty$$

$$\text{Maka } \Delta_2(\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta_2 \tilde{x} + \Delta_2 \tilde{y} \in l_{3/2} \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 x_k - \Delta_2 y_k|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k) + (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \infty$$

$$\text{Jadi } \Delta_2(\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta_2 \tilde{x} + \Delta_2 \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta) \quad (3)$$

Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$ diperoleh $\alpha \tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$ sebab:

$$\Delta_2(\alpha \tilde{x}) = \{\Delta_2 \alpha x_k\} \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha| |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} < \infty \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ ruang linier.

Selanjutnya akan ditunjukkan ruang barisan $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|\cdot\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})}$

$$\|\cdot\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} = |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(N₁) Untuk setiap $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} &= |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} = 0 &\leftrightarrow |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0 \end{aligned}$$

$\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)| = 0$ untuk setiap k
 $\leftrightarrow |x_1| = 0$ dan $|x_3 - x_2 + x_1| = 0, |x_4 - x_3 + x_2| = 0, \dots$
 $\leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \dots = 0$
 $\tilde{x} = \{0\} = \vec{0}$

(N₂) Untuk setiap α skalar $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2 \tilde{x} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k|^{\frac{3}{2}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \|\alpha \tilde{x}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} &= |\alpha x_1| + \|\Delta \alpha \tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} = |\alpha x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha| |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| |x_1| + |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \|\Delta_2 \alpha \tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} \right) \\ &= |\alpha| \|\tilde{x}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

(N₃) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_{3/2}(\Delta_2) \leftrightarrow \Delta_2 \tilde{x}, \Delta_2 \tilde{y} \in l_{3/2}$

$$\leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{Jika } \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} &= |x_1 + y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 (x_k - y_k)|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{x}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} + |y_1| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2 \tilde{y}|^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |x_1| + \|\Delta_2 \tilde{x}\|_{(\frac{3}{2})} + |y_1| + \|\Delta_2 \tilde{y}\|_{(\frac{3}{2})} \\ &= \|\tilde{x}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} + \|\tilde{y}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

Dari N₁, N₂ dan N₃ benar bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang bernorma.

Selanjutnya akan ditunjukkan $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan lengkap.

Diambil sebarang bilangan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2}(\Delta_2)$ dengan

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{x}_1 &= (\Delta_2 x_1^{(1)}, \Delta_2 x_1^{(2)}, \Delta_2 x_1^{(3)}, \dots, \Delta_2 x_1^{(n)}) \\ \Delta_2 \tilde{x}_2 &= (\Delta_2 x_2^{(1)}, \Delta_2 x_2^{(2)}, \Delta_2 x_2^{(3)}, \dots, \Delta_2 x_2^{(n)}) \\ \Delta_2 \tilde{x}_3 &= (\Delta_2 x_3^{(1)}, \Delta_2 x_3^{(2)}, \Delta_2 x_3^{(3)}, \dots, \Delta_2 x_3^{(n)}) \\ &\vdots \\ \Delta_2 \tilde{x}_k &= (\Delta_2 x_1^{(n)}, \Delta_2 x_2^{(n)}, \Delta_2 x_3^{(n)}, \dots, \Delta_2 x_1^{(n)} \dots) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta_2 \tilde{x}^{(n)} &= \{\Delta_2 x_k^{(n)}\} = (\Delta_2 x_1^{(n)}, \Delta_2 x_2^{(n)}, \Delta_2 x_3^{(n)}, \dots, \Delta_2 x_k^{(n)}) \\ \Delta_2 \tilde{x}^{(m)} &= \{\Delta_2 x_k^{(m)}\} = (\Delta_2 x_1^{(m)}, \Delta_2 x_2^{(m)}, \Delta_2 x_3^{(m)}, \dots, \Delta_2 x_k^{(m)}) \\ \Delta_2 \tilde{x}^{(m)}, \Delta_2 \tilde{x}^{(n)} &\subset l_{3/2} \Leftrightarrow \{\Delta_2 \tilde{x}^{(m)}\}, \{\Delta_2 \tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{3/2} (\Delta_2) \text{ sebab;}\end{aligned}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ berlaku:

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, 3/2)} < \varepsilon$$

Diketahui bahwa

$$\Delta_2(\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}) = \Delta_2(x_1^{(m)} - x_1^{(n)}, \Delta_2 x_2^{(m)} - \Delta_2 x_2^{(n)}, \Delta_2 x_3^{(m)} - \Delta_2 x_3^{(n)}, \dots, \Delta_2 x_k^{(m)} - \Delta_2 x_k^{(n)})$$

sehingga,

$$\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_2 |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap dua bilangan $m, n \geq n_0$ benar bahwa

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ atau } |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2(x_k - y_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\rightarrow |\tilde{x}_1^{(m)} - \tilde{x}_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_2(x_k - y_k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan diatas, hal ini berakibat untuk setiap $m, n \geq n_0$ hal ini benar bahwa:

$$\{\Delta_2 x_k^{(n)}\} = \{x_{k+2}^{(n)} - 2x_{k+1}^{(n)} + x_k^{(n)}\} \text{ untuk setiap } k$$

(a) $\Delta_2 x_k^{(n)} = \{x_3^{(n)} - 2x_2^{(n)} + x_1^{(n)}\} = \{x_3^{(n)}\} - \{2x_2^{(n)}\} + \{x_1^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy.

Jadi jika ada x_3 sehingga $\{x_3^{(n)}\}$ konvergen ke x_3 dan jika ada $\{2x_2^{(n)}\}$ sehingga $2x_2$ kemudian jika ada $\{x_1^{(n)}\}$ konvergen ke x_1

hal ini berakibat:

$$\begin{aligned}\{\Delta_2 x_2^{(n)}\} &= \{x_3^{(n)} - 2x_2^{(n)} + x_1^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_3 - 2x_2 + x_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_3^{(n)} - 2x_2^{(n)} + x_1^{(n)}\} &= x_3 - 2x_2 + x_1\end{aligned}$$

(b) $\Delta_2 x_2^{(n)} = \{x_4^{(n)} - 2x_3^{(n)} + x_2^{(n)}\} = \{x_4^{(n)}\} - \{2x_3^{(n)}\} + \{x_2^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Jadi jika ada x_4 sehingga $\{x_4^{(n)}\}$ konvergen ke x_4 dan jika ada $\{3x_3^{(n)}\}$ sehingga $2x_3$ kemudian jika ada $\{x_2^{(n)}\}$

konvergen ke x_2

berakibat :

$$\begin{aligned}\{\Delta_2 x_3^{(n)}\} &= \{x_4^{(n)} - 2x_3^{(n)} + x_2^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_4 - 2x_3 + x_2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_4^{(n)} - 2x_3^{(n)} + x_2^{(n)}\} &= x_4 - 2x_3 + x_2\end{aligned}$$

(c) $\Delta_2 x_3^{(n)} = \{x_5^{(n)} - 2x_4^{(n)} + x_3^{(n)}\} = \{x_5^{(n)}\} - \{2x_4^{(n)}\} + \{x_3^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Jadi jika ada x_5 sehingga $\{x_5^{(n)}\}$ konvergen ke x_5 dan jika ada $\{2x_4^{(n)}\}$ sehingga konvergen $2x_4$ kemudian jika ada $\{x_3^{(n)}\}$ konvergen ke x_3

berakibat :

$$\begin{aligned}\{\Delta_2 x_3^{(n)}\} &= \{x_5^{(n)} - 2x_4^{(n)} + x_3^{(n)}\} \text{ konvergen ke } x_5 - 2x_4 + x_3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_5^{(n)} - 2x_4^{(n)} + x_3^{(n)}\} &= x_5 - 2x_4 + x_3\end{aligned}$$

(d) Selanjutnya dianggap benar $\{x_k^{(n)}\}$ konvergen ke x_k untuk setiap $k=1,2,3,\dots,m$, dibuktikan $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ konvergen. Maka barisan $\{\Delta x_{m-1}^{(n)}\} = \{x_m^{(n)} - x_{m-1}^{(n)}\}$ barisan chauchy. Karena $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ dan $\{x_m^{(n)}\}$ barisan bilanganchauchy yang konvergen ke x_{m-1} dan x_m , maka $\{x_m^{(n)}\}$ barisan bilangan chauchy. Jadi ada bilangan x_m sehingga $\{x_m^{(n)}\}$ konvergen x_m dan ada x_{m-1} sehingga $\{x_{m-1}^{(n)}\}$ konvergen ke x_{m-1}

Berakibat $\{\Delta_2 x_{m-1}^{(n)}\} = \{x_m^{(n)} - x_{m-1}^{(n)}\}$ konvergen ke $x_m - x_{m-1}$ dan diperoleh. Berdasarkan nilai (a), (b), (c), dan (d) diperoleh.

Barisan $\{\Delta_2 x_k^{(n)}\}$ konvergen untuk setiap k.

Jadi $\{\Delta_2 x_k^{(n)}\}$ konvergen ke $\Delta_2 \tilde{x}$ dengan $\tilde{x} = \{x_k\}$

$$\|\Delta_2 \tilde{x}^{(m)}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} = \|\Delta_2 \tilde{x} - \Delta_2 \tilde{x}^{(n)} + \Delta_2 \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, 3/2)} \quad (5)$$

$$\leq \|\Delta_2 \tilde{x} - \Delta_2 \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, 3/2)} + \|\Delta_2 \tilde{x}^{(n)}\|_{(\Delta_2, \frac{3}{2})} < \infty \quad (6)$$

Jadi berdasarkan (5) dan (6) terbukti barisan chaucy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l_{\frac{3}{2}}(\Delta_2)$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l_{3/2}(\Delta_2)$. Jadi $\Delta_2 \tilde{x} \in l_{3/2}$ atau $\tilde{x} \in l_{3/2}(\Delta_2)$. Dengan kata lain bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ lengkap. Dengan demikian terbukti bahwa $l_{3/2}(\Delta_2)$ merupakan ruang banach.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- Ruang barisan $(l_{3/2}, \|\cdot\|_{3/2})$ dengan norma $\|x\|_3 = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{3/2}\}^{2/3}$ merupakan ruang banach.
- Ruang barisan $(l_{3/2}(\Delta), \|\cdot\|_{(\Delta, 3/2)})$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta, 3/2)} = |x_1| + \|\Delta \tilde{x}\|_{3/2}$ merupakan ruang banach.
- Ruang barisan $(l_{3/2}(\Delta_2), \|\cdot\|_{(\Delta_2, 3/2)})$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta_2, 3/2)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2 \tilde{x}\|_{3/2}$ merupakan ruang banach.

5. Daftar Pustaka

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Gozali, M. 2009. *Ruang Norm dan Ruang Banach*. Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung.

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequence Spaces*. Karadeniz Teknik Universities, Turkey.

Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*. Cambridge University Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, inc, New York

Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.

SOLUSI ANALITIK UNTUK SISTEM KdV HOMOGEN DENGAN METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM)

Anita Rahmasari¹, Suahrsono S.¹, Asmiati¹

¹Jurusan Matematika FMIPA UNILA
Jl. Soemantri Brojonegoro No.1, Gd. Meneng, B.Lampung 35145
Penulis Korespondensi : anitarahmasarii10@gmail.com¹

ABSTRAK

Persamaan KdV adalah tipikal yang relatif sederhana dan klasik. KdV merupakan persamaan umum gelombang yang solusinya tidak selalu bisa diturunkan secara eksak. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan sistem persamaan KdV dengan metode analisis homotopi (HAM). Metode analisis homotopi merupakan metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter. Metode ini sangat efektif untuk menyelesaikan berbagai tipe persamaan dan sistem persamaan homogen atau tak homogen. Untuk memperlihatkan bahwa solusi dari metode homotopi mendekati solusi eksak, maka nilai konstanta h yang digunakan ialah $h = -1$.

Keywords: Metode Analisis Homotopi, persamaan KdV, solusi eksak,

1. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekalimanfaatnya serta banyak ditemui permasalahannya dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu permasalahan yang dapat kita jumpai adalah persamaan gelombang nonlinear. Persamaan gelombang nonlinear banyak macamnya, salah satunya adalah persamaan yang dihasilkan oleh Korteweg dan de Vries ini dikenal dengan nama persamaan KdV. Solusi persamaan KdV lebih dikenal sebagai gelombang soliton. Solusi persamaan gelombang soliton ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analisis homotopi (HAM).

Metode analisis homotopi adalah metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter serta metode ini dilakukan pendekatan analitik secara umum yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari beberapa permasalahan diantaranya persamaan linear dan taklinear, persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Metode analisis homotopi berhasil diterapkan dalam menyelesaikan berbagai sistem persamaan tak linier, homogen atau tak homogen. Oleh karena itu, penulis menggunakan metode homotopi dalam menyelesaikan sistem persamaan KdV homogen.

Persamaan Korteweg-de Vries pertama kali diperkenalkan oleh Boussinesq dan Korteweg dan de Vries pada tahun 1877 sebagai model untuk gelombang panjang-amplitudo kecil yang menyebar di permukaan air. Dalam matematika, persamaan Korteweg – de Vries (KdV) adalah model matematis gelombang pada permukaan air dangkal. Persamaan KdV adalah tipikal yang relatif sederhana dan klasik. Persamaan KdV merupakan persamaan umum gelombang yang solusinya tidak selalu bisa diturunkan secara eksak (Jerry, dkk., 2001).

Metode analisis homotopi (HAM) pertama kali dirancang pada tahun 1992 oleh Shijun Liao dari Shanghai Jiaotong University dalam disertasi PhD-nya dan dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997. Metode analisis homotopi (HAM) adalah teknik semianalitis untuk memecahkan masalah taklinear biasa atau persamaan diferensial parsial. Homotopi dideskripsikan sebagai variabel kontinu atau deformasi di matematika. Homotopi dapat didefinisikan sebagai suatu penghubung antara dua benda yang berbeda di dalam matematika yang memiliki karakteristik yang sama di beberapa aspek (Liao, 2012).

Misalkan terdapat persamaan diferensial sebagai berikut,

$$N[u(x, t)] = 0 \quad (1)$$

di mana N adalah operator nonlinear, t adalah variabel bebas, dan $u(x, t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Untuk lebih mudah, diabaikan syarat awalnya, yang bisa dilakukan dengan cara yang sama. Dengan cara generalisasi metode homotopi sederhana. Liao menyusun persamaan deformasi orde nol

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = qhH(x, t)N[\phi(x, t; q)] \quad (2)$$

Dimana $q \in [0,1]$ adalah parameter yang di terkait, $h \neq 0$ adalah parameter tak nol, $H(x, t) \neq 0$ adalah fungsi tambahan non-nol, L adalah operator linear tambahan, $u_0(x, t)$ adalah tebakan awal dari $u(x, t)$ dan $\phi(x, t; q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, untuk memilih objek tambahan pada HAM. Terlihat jelas, ketika $q = 0$ dan $q = 1$ menghasilkan,

$$\phi(x, t; 0) = u_0(x, t), \quad \phi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (3)$$

Maka sejalan dengan meningkatnya q dari 0 ke 1, solusi $\phi(x, t; q)$ bervariasi dari perkiraan awal $u_0(x, t)$ ke solusi $u(x, t)$, memperluas ke dalam deret Taylor terhadap q akan menghasilkan

$$\phi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) q^m \quad (4)$$

dimana

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m}, \quad q = 0 \quad (5)$$

Jika operator linear tambahan, syarat awal, parameter tambahan h dan fungsi tambahan dipilih yang benar maka deret pada persamaan (4) konvergen ke $q = 1$ dan didapat

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \quad (6)$$

yang harus menjadi salah satu solusi untuk persamaan nonlinear yang asli, seperti yang dibuktikan oleh Liao. Ketika $h = -1$ dan $H(x, t) = 1$, persamaannya menjadi

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] + qN[\phi(x, t; q)] = 0 \quad (7)$$

persamaan yang menentukan dapat di deduksi dari persamaan deformasi orde nol (1). Kita definisikan vektor $\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$. Mendiferensialkan persamaan (1) sebanyak m kali terdapat parameter terkait q dan masukan $q = 0$ dan terakhir dibagi dengan $m!$, kita memiliki yang disebut persamaan deformasi orde m .

$$L[u_m(x, t) - X_m u_{m-1}(x, t)] = hH(x, t)R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (8)$$

dimana

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}}, \quad q = 0 \quad (9)$$

dan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (10)$$

Harus ditekankan bahwa $u_m(x, t)$ untuk $m \geq 1$ diatur oleh persamaan linear (8) dibawah kondisi batas linear yang berasal dari masalah asli (Ali, 2012).

2. Metodologi Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan sistem persamaan KdV Homogen dengan Metode Analisis Homotopi adalah sebagai berikut :

1. Definisikan operator nonlinearnya dari persamaan KdV
2. Menyelesaikan persamaan deformasi ke- m dengan menggunakan persamaan $R_m(\vec{u}_{m-1})$ dan $R_m(\vec{v}_{m-1})$
3. Menentukan solusi persamaan deformasi ke- m untuk setiap $m=1,2,3$
4. Menentukan komponen dengan hasil yang telah didapat dari persamaan jika $h=-1$.
5. Mensubstitusikan hasil ini kedalam deret homotopi, sehingga diperoleh solusi homotopi.

3. Hasil Dan Pembahasan

Diberikan suatu persamaan awal sebagai berikut :

$$u_t = -3v_{xx} \quad (11)$$

$$v_t = 4u_{xx} + u^2 \quad (12)$$

Dengan syarat awal

$$u(x, 0) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \quad (13)$$

$$v(x, 0) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \quad (14)$$

Langkah pertama, untuk menyelesaikan persamaan (11) dan (12) dari Metode Analisis Homotopi pilih operator linear

$$L[\phi_1(x, t; q)] = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_1(x, t; q)),$$

$$L[\varphi_2(x, t; q)] = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_2(x, t; q))$$

Selanjutnya definisikan operator nonlinear sebagai berikut :

$$N_1[\varphi_i(x, t; q)] = \frac{\delta\varphi_1(x, t; q)}{\delta t} + 3\frac{\delta^2\varphi_2(x, t; q)}{\delta x^2}$$

$$N_2[\varphi_i(x, t; q)] = \frac{\delta\varphi_2(x, t; q)}{\delta t} - 4\frac{\delta^2\varphi_1(x, t; q)}{\delta x^2} - \varphi_1^2(x, t; q)$$

Dimana,

$$u_t = \frac{\delta\varphi_1(x, t; q)}{\delta t} \quad v_t = \frac{\delta\varphi_2(x, t; q)}{\delta t}$$

$$v_{xx} = \frac{\delta^2\varphi_2(x, t; q)}{\delta x^2} \quad u_{xx} = \frac{\delta^2\varphi_1(x, t; q)}{\delta x^2}$$

dengan menggunakan definisi di atas, dapat disusun persamaan deformasi orde ke-nol

$$(1 - q)L_1[\varphi_1(x, t; q) - u_0(x, y, t)] = qhH(x, t; q)N_1[\varphi_1(x, t; q)]$$

untuk $q = 0$ dan $q = 1$, dapat ditulis

$$\varphi_1(x, t; 0) = u_0(x, t) \quad \varphi_1(x, t; 1) = u(x, t)$$

$$(1 - q)L_2[\varphi_2(x, t; q) - v_0(x, y, t)] = qhH(x, t; q)N_2[\varphi_2(x, t; q)]$$

untuk $q = 0$ dan $q = 1$, dapat ditulis

$$\varphi_2(x, t; 0) = v_0(x, t) \quad \varphi_2(x, t; 1) = v(x, t)$$

Karena parameter q meningkat dari 0 ke 1, $\varphi_i(x, t; q)$ bervariasi dari perkiraan awal $u_0(x, t)$ dan $v_0(x, t)$ hingga ke solusi $u_i(x, t)$ dan $v_i(x, t)$ untuk $i=1,2$. Memperluas menggunakan deret Taylor sehubungan dengan $q=1$, sehingga diperoleh

$$\phi_i(x, y, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_i(x, t)q^m \quad i = 1, \dots, m$$

Dengan demikian, akan diperoleh persamaan deformasi orde ke- m sebagai berikut :

$$L[u_m(x, t) - X_m u_{m-1}(x, t)] = h(x, y, t)R_m(\bar{u}_{m-1}) \quad (15)$$

$$L[v_m(x, t) - X_m v_{m-1}(x, t)] = h(x, y, t)R_m(\bar{v}_{m-1}) \quad (16)$$

dengan kondisi awal $u_m(x, 0) = 0$, $v_m(x, 0) = 0$

dimana

$$R_m(\bar{u}_{m-1}) = \frac{\partial}{\partial t} u_{m-1} + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{m-1} \quad (17)$$

$$R_m(\bar{v}_{m-1}) = \frac{\partial}{\partial t} v_{m-1} - 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{m-1} + u_{m-1}^2 \quad (18)$$

Sehingga solusi persamaan deformasi ke- m untuk $m \geq 1$ adalah

$$u_m(x, t) = X_m u_{m-1}(x, t) + h \int_0^t R_m(u_{m-1}) \partial t \quad (4.9)$$

$$v_m(x, t) = X_m v_{m-1}(x, t) + h \int_0^t R_m(v_{m-1}) \partial t \quad (20)$$

dengan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Berikut ini merupakan hasil dari persamaan (19) dan (20) dengan mencari nilai $R_m(\bar{u}_{m-1})$ dan $R_m(\bar{v}_{m-1})$ terlebih dahulu, sehingga diperoleh :

$m = 1$

$$R_m(\bar{u}_{m-1}) = \frac{\partial}{\partial t} u_{m-1} + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{m-1}$$

$$R_1(\bar{u}_{1-1}) = \frac{\partial}{\partial t} u_{1-1} + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{1-1}$$

$$R_1(\bar{u}_0) = \frac{\partial}{\partial t} u_0 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0$$

$$= 0 + 3\left(\frac{1}{24\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right) = \frac{1}{8\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 u_m(x, t) &= X_m \cdot u_{m-1}(x, t) + h \int_0^t R_m(\bar{u}_{m-1}) dt \\
 u_1(x, t) &= 0 + h \int_0^t \frac{x}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan \frac{x}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{ht}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan \frac{x}{2\sqrt{3}} \\
 R_m(\bar{v}_{m-1}) &= \frac{\partial}{\partial t} v_{m-1} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{m-1} - u_{m-1}^2 \\
 R_1(\bar{v}_0) &= \frac{\partial}{\partial t} v_0 - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 - u_0^2 \\
 &= 0 - 4 \left(-\frac{1}{48} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)^2 - \frac{1}{24} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)^2 \right) \\
 &= -4 \left(-\frac{1}{48} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(1 + \tan \frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{24} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{1}{8} (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right))\right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{12} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6} \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{64} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(13 + 45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1(x, t) &= X_1 \cdot v_0(x, t) + h \int_0^t R_1(\bar{v}_0) dt \\
 &= 0 + h \int_0^t \frac{1}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(13 + 45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) dt \\
 &= \frac{ht}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(13 + 45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$m = 2$

$$\begin{aligned}
 R_m(\bar{u}_{m-1}) &= \frac{\partial}{\partial t} u_{m-1} + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{m-1} \\
 R_2(\bar{u}_1) &= \frac{\partial}{\partial t} u_1 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1 \\
 &= \frac{h}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 3 \left[\frac{ht}{576} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) \right. \\
 &\quad \left. \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{15ht}{64} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{ht}{1152} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\
 &\quad \left. \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{5ht}{128} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right)^2 \right] \\
 &= \frac{h}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{ht}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \\
 &\quad + \frac{45ht}{64} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{ht}{1152} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) + \frac{5ht}{128} \sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \\
 u_2(x, t) &= X_2 \cdot u_1(x, t) + h \int_0^t R_2(\bar{u}_1) dt \\
 u_2(x, t) &= 1 \frac{x}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan \frac{x}{2\sqrt{3}} + h \int_0^t \frac{h}{8\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \\
 &\quad + \frac{ht}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{45ht}{64} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \\
 &\quad \frac{ht}{1152} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) + \frac{5ht}{128} \sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{ht}{768} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 ht \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90 ht \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26 ht \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) (1+h)\right)$$

$$\begin{aligned} R_2(\bar{v}_1) &= \frac{\partial}{\partial t} v_1 - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 - u_1^2 \\ &= \frac{h}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) - \frac{1}{192} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \\ &\quad - \frac{ht}{6\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{ht}{3\sqrt{3}} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$$v_2(x, t) = X_2 \cdot v_1(x, t) + h \int_0^t R_2(\bar{v}_1) dt$$

$$\begin{aligned} v_2(x, t) &= 1 \frac{ht}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(13 + 45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) + h \int_0^t \frac{h}{192} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13\right) \\ &\quad - \frac{1}{192} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{ht}{6\sqrt{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{ht}{3\sqrt{3}} \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) dt \\ &= \\ &\quad - \frac{ht}{576} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(h^2 t^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3} ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \right. \\ &\quad \left. 16\sqrt{3} ht \tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - 135 \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) (1+h) - 39(1+h)\right) \end{aligned}$$

$m = 3$

$$\begin{aligned} R_3(\bar{u}_2) &= \frac{\partial}{\partial t} u_2 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_2 \\ &= \frac{h}{768} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 ht \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90 ht \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26 ht \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) (1+h)\right) \\ &\quad + \frac{ht}{768} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 h \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315 h \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13 t \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90 h \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26 h \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{7}{384} ht \sec^2\left(\frac{80}{7}\sqrt{3} ht \tan^5\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) \\ &\quad \left(h^2 t^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{450}{7} h - \frac{450}{7}\right) + \frac{160}{7} \sqrt{3} ht \tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{8}{15}\right) + \\ &\quad \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\frac{2}{3} h^2 t^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{444}{7} (h+1)\right) + \frac{32}{2} \sqrt{3} ht \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{14}\right) + \\ &\quad \frac{1}{21} h^2 t^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{58}{7} (h+1) \end{aligned}$$

$$u_3(x, t) = X_3 \cdot u_2(x, t) + h \int_0^t R_3(\bar{u}_2) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ht}{768} \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(45 ht \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13 ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90 ht \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26 ht \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) (1+h)\right) + h \left(-\frac{7}{1536} ht^4 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left(h^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3} h^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{21} h^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) - \\ &\quad \frac{7}{1152} ht^3 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\frac{80}{7} \sqrt{3} ht \tan^5\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{160}{7} \sqrt{3} h \tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{8}{15}\right) + \right. \\ &\quad \left.\frac{32}{3} \sqrt{3} h^2 t^3 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{14} \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{384} h \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right)\right) \right. \\ &\quad \left.\left(45 h \sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315 h \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 13 h \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90 h \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26 h \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{7}{384} ht^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{450}{7} (h+1)\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left.\left(-\frac{444}{7} (h+1)\right) - \frac{58}{7} h - \frac{58}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{24} ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) (1+h) \\ &= -\frac{7}{1536} ht \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(\frac{320}{21} \sqrt{3} h^2 t^2 \tan^5\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + ht \tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \left(h^2 t^2 \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1080}{7}(h+1) + \frac{640}{21}\sqrt{3}h^2t^2\tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{8}{15}\right) + \frac{2}{3}ht\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \\ & \left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(h^2t^2 - 135(h+1)) - \frac{1410}{7}(h+1)\right) + \frac{128}{9}\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(h^2t^2 \\ & \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{9}{14} + \left(\frac{3}{14}t^2 - \frac{9}{14}\right)h^2 - \frac{9}{7}h) + \frac{1}{21}ht\left(\left(\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(-270h - 270) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(h^2t^2 - 78(h+1) - 384(h+1))\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(\bar{v}_2) &= \frac{\partial}{\partial t}v_2 - 4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2 - u_2^2 \\ &= -\frac{ht}{576}\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(2h^2t\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3}h\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\ & \quad \left. + 16\sqrt{3}h\tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{h}{576}\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(h^2t^2\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3}ht \right. \\ & \quad \left. \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 16\sqrt{3}ht\tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) - 135\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(1+h) - 39(1+h)\right) \\ & \quad - \frac{1}{589824}h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(45ht\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 315ht\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\ & \quad \left. + 13ht\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 90ht\tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 26ht\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 32\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(1+h)\right)^2 \\ & \quad - \frac{105}{128}ht\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(2ht\tan^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 7ht\tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{502}{1323}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{64}{135}\sqrt{3}(h+1)\tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + ht\tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{908}{189}\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{86}{105}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{128}{945}\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(1+h) + \frac{ht}{7}\left(\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{341}{135}\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{26}{135}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(x,t) &= X_3 \cdot v_2(x,t) + h \int_0^t R_3(\bar{v}_2)dt \\ &= \frac{45}{65536}ht\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(4h^4t^4\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\tan^8\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 28h^2t^2\tan^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \\ & \quad \left. \left(h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{26}{135}h^2t^2\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{256}{9}\right) + \frac{32}{9}\sqrt{3}h^3t^3\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(1+h) \right. \\ & \quad \left. \tan^5\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + 53h^2t^2\tan^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{257024}{12879} + h^2t^2\sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{416}{2385}h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{676}{107325}h^2t^2 + \frac{25088}{477}\right) + \frac{112}{9}\sqrt{3}ht\tan^3\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(h+1)\left(h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{26}{315}h^2t^2\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{4096}{315}\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(14h^8t^8\sec^8\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{26}{5}h^2t^2\sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{676}{2025}h^2t^2 + \frac{3584}{9}\right) + \frac{1024}{405}h^2t^2\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(h^2 + 3h + \frac{2276}{3}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1024}{3} + \tan^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{44032}{135}h^2t^2 - \frac{1024}{3}h^2 - \frac{2048}{3}h\right) + \frac{16}{9}\sqrt{3}ht\tan\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)(h+1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(h^2t^2\sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{13}{45}h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{2048}{45}\sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{2048}{45}\right) + h^4t^4\sec^{10}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{26}{45}h^4t^4\sec^8\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{16}{2025}h^4t^4\sec^6\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{512}{9}h^2t^2\sec^4\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{174592}{1215}h^2t^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sec^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{13312}{1215}(-3+ht-3h)(3+ht+3h)\right) \right) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (11), (12) Deret yang digunakan untuk menunjukkan solusi analitik atau solusi HAM ialah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^3 u_i(x,t) \\ v(x,t) &= \sum_{i=1}^3 v_i(x,t) \end{aligned}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa Metode Analisis Homotopi dapat digunakan untuk mencari solusi analitik sistem persamaan homogen dengan memasukan hasil solusi kedalam deret homotopi serta memasukan jika nilai $h = -1$

5. Daftar Pustaka

- Ali, M. 2012. Solitonic Solutions for Homogeneous KdV Systems by Homotopy Analysis Method. *Journal of Applied Mathematics*. **10**(14): 1-10
- Jerry, dkk. 2001. A Non-Homogeneous Boundary-Value Problem for The Korteweg-De Vries Equation in a Quarter Plane. *Transactions of the American Mathematical Society*. **354**(2): 427-490
- Liao. 2012. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Higher Education Press, Beijing
- Liao SJ. 1992. *Homotopy Analysis Method and its Application*. Shanghai Jiao Tong University, Shanghai.
- Liao SJ. 2004. *Beyond Perturbation : Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, New York.

ALOKASI DANA DARI PREMI ASURANSI JIWA SYARIAH MENGUNAKAN METODE DWIGUNA

Rudi Ruswandi¹, Arum Mardhiyah Nurvitasari¹, La Zakaria¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung, 35145
Penulis Korespondensi : rudirkarta@gmail.com¹

Abstrak

Peserta asuransi yang telah menandatangani kontrak perjanjian tertulis atau polis asuransi harus membayarkan sejumlah dana (premi) kepada pihak asuransi. Besarnya premi dapat dihitung menggunakan rumus premi diskonto kontinu asuransi jiwa dwiguna. Premi yang dibayarkan peserta asuransi tersebut akan dialokasikan untuk biaya administrasi, tabungan peserta, dan tabungan tabarru' (dana tolong-menolong). Kemudian, dana yang berada pada tabungan peserta dan tabungan tabarru' akan diinvestasikan ke investor-investor syariah. Hasil investasinya akan dibagi berdasarkan prinsip bagi hasil (mudharabah) pada asuransi syariah. Sebagian dari hasil investasi tersebut adalah milik peserta asuransi yang masuk ke dalam tabungan peserta. Untuk kasus ini akan dihitung pengaruh usia dan masa asuransi terhadap besarnya premi dan klaim asuransi.

Kata kunci: Asuransi Jiwa Dwiguna; Alokasi Dana Asuransi Jiwa Syariah

1. Pendahuluan

Pada prinsipnya, peserta asuransi yang telah menandatangani polis asuransi, harus membayarkan sejumlah uang (premi) kepada pihak asuransi. Namun padaperkembangannya, banyak peserta asuransi yang tidak mengetahui tentang bagaimana pengolahan dana premi yang telah dibayarkan. Padahal sebagian dana premi tersebut akan diinvestasikan, dimana sekian persen dari hasil investasinya menjadi milik peserta asuransi. Oleh karena itu, penting bagi peserta asuransi mengetahui alokasi dana dari premi yang telah dibayarkan ke perusahaan asuransi. Baik itu besaran dana yang akan diinvestasikan maupun besaran bagi hasil investasinya.

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan jenis asuransi jiwa syariah dengan metode dwiguna. Hal ini karena jenis asuransi ini memiliki keunggulan, yaitu peserta asuransi dapat memperoleh nilai tunai dari premi asuransi yang sudah dibayarkan berupa uang pertanggungan jika tertanggung meninggal dunia dalam periode tertentu atau masih tetap hidup sampai masa polis asuransinya berakhir sesuai dengan kebijakan polis asuransi yang bersangkutan.

2. Anuitas Hidup Kontinu (*Continuous Life Annuity*)

Anuitas hidup sebesar satu satuan per akhir tahun yang pembayarannya dilakukan secara kontinu atau setiap saat disebut anuitas hidup kontinu.

Actuarial Present Value (APV) dari anuitas tersebut adalah (Futami, 1993):

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= E[Y] = E[\bar{a}_T] \\ &= \int_0^{\infty} \bar{a}_T \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1-v^t}{\delta} \cdot f(t) dt\end{aligned}\tag{1}$$

Dengan menggunakan pengintegralan parsial tentu, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= E[\bar{a}_T] = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{\delta + \mu}\end{aligned}\tag{2}$$

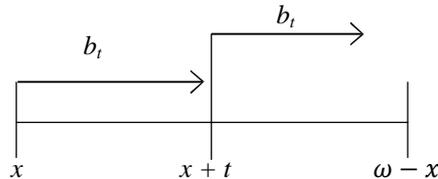
\bar{a}_x adalah nilai APV dari anuitas seumur hidup. Dengan cara yang sama, akan diperoleh nilai anuitas hidup berjangka n tahun sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\bar{a}'_{x:\overline{n}|} &= E[\bar{a}_T] = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{\delta + \mu} (1 - e^{-(\delta + \mu)n})\end{aligned}\quad (3)$$

(Bowers et al, 1997)

3. Premi Tunggal Asuransi Jiwa Dwiguna

Asuransi jiwa dwiguna adalah asuransi yang apabila tertanggung meninggal dunia dalam jangka waktu polis asuransi yang telah disepakati atau masih tetap hidup sampai masa polis asuransi yang berakhir, maka ahli waris nasabah akan tetap mendapatkan uang santunan sebesar b_t (Sembiring, 1986).



Gambar 1. Sistem Pembayaran Benefit pada Asuransi Jiwa Dwiguna

Besarnya manfaat/benefit sebesar satu satuan diberikan sesaat setelah meninggal atau diberikan sesaat setelah masa kontrak habis dan tertanggung masih hidup, maka:

$$b_t = \begin{cases} 1, & t > n \\ 1, & t < n \end{cases}$$

$$v_t = \begin{cases} v^n, & t > n \\ v^t, & t < n \end{cases}$$

dengan

$$Z_t = \begin{cases} v^n, & t > n \\ v^t, & t < n \end{cases}$$

Maka besarnya APV untuk asuransi ini adalah :

$$\begin{aligned}E[Z_t] &= E[v^t] = \bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}'_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}' \\ \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t \cdot f(t) dt + \int_n^\infty v^n \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu(x+t) dt + v^n \cdot {}_n p_x \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \cdot \mu_x dt + e^{-\delta n} \cdot e^{-\mu n} \\ &= \frac{\mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-(\mu + \delta)n}) + e^{-\delta n} \cdot e^{-\mu n}\end{aligned}\quad (4)$$

4. Premi Kontinu

Jumlah kerugian (*total loss*) yang dilambangkan dengan L merupakan peubah acak dari nilai sekarang yang dibayarkan oleh penanggung yang nilainya tak sebanyak premi anuitas yang dibayarkan oleh tertanggung. Prinsip ini dikenal dengan prinsip ekivalen (*equivalence principle*) dan mempunyai syarat bahwa $E[L] = 0$.

Maka :

$$\begin{aligned}E[\text{Nilai sekarang santunan} - \text{Nilai sekarang premi}] &= 0 \\ E[\text{Nilai sekarang santunan}] &= E[\text{Nilai sekarang premi}]\end{aligned}$$

Dari konsep dasar tersebut, akan dilihat contoh kasus asuransi seumur hidup. Nilai sekarang dari kerugian untuk penanggung jika meninggal terjadi pada saat t adalah :

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}_{\bar{a}_{\overline{T}|}}$$

sehingga dengan prinsip ekivalen :

$$\begin{aligned}E[L] &= E[v^T - \bar{P}_{\bar{a}_{\overline{T}|}}] = 0 \\ &= E[v^T] - \bar{P}E[\bar{a}_{\overline{T}|}] = 0\end{aligned}$$

dengan premi asuransi seumur hidup yang dinotasikan $\bar{P}(\bar{A}_x)$ maka :

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_x = 0$$

atau

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \quad (5)$$

Dan premi bersih kontinu untuk asuransi jiwa dwiguna yaitu :

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \quad (6)$$

(Bowers et al, 1997)

5. Premi Diskonto Kontinu (*Discounted Continuous Premiums*)

Dasar dari premi diskonto kontinu atau disebut juga (*apportionable premium*), $P^{(k)}$, adalah jenis asuransi yang dibayarkan setiap saat atau bentuk kontinu dan jenis pembayaran preminya (anuitas) berbentuk *apportionable*. Maka untuk peubah acaknya :

$$L = l(T) = v^T - P^{(k)} \ddot{a}_{\overline{T}|}^{(k)}$$

menggunakan prinsip ekivalen :

$$\begin{aligned} E[L] &= E[v^T - P^{(k)} \ddot{a}_{\overline{T}|}^{(k)}] = 0 \\ &= E[v^T] - P^{(k)} E[\ddot{a}_{\overline{T}|}^{(k)}] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

akan didapat premi santunannya yang dinotasikan $P^{(k)}(\bar{A}_x)$ maka :

$$\bar{A}_x - P^{(k)}(\bar{A}_x) \ddot{a}_x^{(k)} = 0$$

Jadi

$$\begin{aligned} P^{(k)}(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(k)}} = \frac{\bar{A}_x}{\left[\frac{\delta}{d^{(k)}} \bar{a}_x \right]} \\ &= \frac{d^{(k)} \bar{A}_x}{\delta \bar{a}_x} = \frac{d^{(k)}}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_x) \end{aligned} \quad (8)$$

Dari persamaan diatas, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(\bar{A}_x) &= \frac{k[1-v^{1/k}]}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_x) \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x) \frac{[1-v^{1/k}]}{\delta} \cdot k \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{\overline{1/k}|} \cdot k \end{aligned} \quad (9)$$

Jadi rumus dasar dari premi diskonto kontinu adalah :

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{\overline{1/k}|} \cdot k &= \bar{P}(\bar{A}_x) \frac{[1-v^{1/k}]}{\delta} \cdot k \\ &= \frac{d^{(k)}}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_x) \end{aligned} \quad (10)$$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka akan diperoleh rumus dasar dari premi diskonto kontinu untuk asuransi jiwa dwiguna yaitu :

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \bar{a}_{\overline{1/k}|} \cdot k = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \frac{[1-v^{1/k}]}{\delta} \cdot k = \frac{d^{(k)}}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \quad (11)$$

6. Pengelolaan Dana Pada Asuransi Jiwa Syariah

Misalkan seorang pemegang polis mulai terdaftar pada usia x tahun dengan masa pertanggungan n tahun. Berdasarkan prinsip asuransi syariah yang menggunakan unsur tabungan, premi yang dibayarkan digunakan untuk biaya administrasi, tabungan peserta, dan tabungan tolong-menolong (*tabarru'*). Misalkan pembagian dananya sebagai berikut:

- $\alpha\%$ untuk biaya administrasi
- $\beta\%$ untuk tabungan peserta
- $(100-\alpha-\beta)\%$ untuk dana *tabarru'*

Dana yang diinvestasikan adalah dana pada tabungan peserta dan tabungan *tabarru'*.

Berdasarkan Salinan Peraturan Otoritas Jasa Keuangan (SAL-POJK) Nomor 72/ PJOK.05/ 2016 Tentang Kesehatan Keuangan Perusahaan Asuransi dan Perusahaan Reasuransi dengan Prinsip Syariah, Pasal 19 ayat 4 yang berbunyi :

“Penempatan atas aset yang diperkenankan dalam bentuk investasi sebagaimana dimaksud pada ayat(1) huruf d sampai dengan huruf k, jumlah seluruhnya paling tinggi 80% (delapan puluh persen) dari jumlah investasi”.

Sehingga dana yang diinvestasikan dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
 &= P\beta\% + P(100 - \alpha - \beta)\% \\
 &= P(100 - \alpha)\%
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

dimana

$$[P(100 - \alpha)\%] \leq 80\%$$

Misal laju pengembalian (*return*) yang diperoleh peserta pada tahun ke-*t* adalah r_t . Artinya uang 1 satuan di awal tahun ke-*t* akan menjadi $1 + r_t$ di akhir tahun ke-*t*.

Jika di awal tahun pertama perusahaan menginvestasikan dana sebesar $P[(100 - \alpha)\%]$, maka dana di akhir tahun pertama akan menjadi:

$$[P(100 - \alpha)\% + r_t] \tag{13}$$

dengan $r_t = \text{return}$.

Keuntungan yang diperoleh dari hasil investasi tersebut dibagi menjadi milik perusahaan asuransi dan milik peserta asuransi sesuai dengan proporsi tertentu.

Misalkan pembagian keuntungannya sebagai berikut:

- $b\%$ untuk tabungan peserta
- $(100 - b)\%$ untuk perusahaan

Sehingga diperoleh:

- Keuntungan peserta = $r_t \cdot b\%$
- keuntungan perusahaan asuransi = $r_t \cdot (100 - b)\%$

Dari keuntungan yang didapat, maka besarnya tabungan peserta adalah:

$$P\beta\% + r_t \cdot b\% \tag{14}$$

(Kahfi, 2017).

7. Simulasi Kasus

Tabel 1. Data Peserta Asuransi

Nama	Usia	Masa Asuransi	Santunan	Banyak Pembayaran Dalam 1 Tahun
Agus	20	5	50.000.000	1 kali
Bagas	47	5	50.000.000	1 kali
Galih	20	15	50.000.000	1 kali
Yoga	47	15	50.000.000	1 kali

Berikut merupakan asumsi-asumsi penelitian yang digunakan :

- Laju tingkat kematian ($\mu = -\ln({}_t p_x)$)
- Tingkat bunga tunggal (i) = 5%
- Laju tingkat suku bunga ($\delta = \ln(1 + i)$) dan faktor diskon ($v = (1 + i)^{-1}$)
Sehingga $\delta = 0,04879016417$ dan $v = 0,95238095238$
- Alokasi Premi $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\% \text{ untuk biaya administrasi} \\ \beta\% \text{ untuk tabungan peserta} \\ (100 - \alpha - \beta)\% \text{ untuk tabungan } \textit{tabarru}' \end{array} \right.$
- Biaya administrasi (α) = 20%
- Persentase tabungan peserta (β) = 65%
- Persentase dana *tabarru'* ($100 - \alpha - \beta$) = 15%
- Besarnya dana yang diinvestasikan = $(100 - \alpha)\%$
- Asumsi hasil investasi = 12%
- Bagian hasil investasi = 65%

Besarnya premi diskonto kontinu dapat dihitung menggunakan persamaan :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \bar{a}_{1/k|} \cdot k &= \frac{d^{(k)}}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \\
 &= \frac{k \left[\frac{1 - v^{\frac{1}{k}}}{\ln(1+i)} \right] \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{k \left[\frac{1}{1-v^k} \right]}{\ln(1+i)} \cdot \frac{\frac{\mu}{\mu+\delta}(1-e^{-(\mu+\delta)n}) + e^{-\delta n} \cdot e^{-\mu n}}{\frac{1}{\delta+\mu}(1-e^{-(\delta+\mu)n})}} \quad (15)$$

Berikut disajikan perhitungan di tahun pertamanya.

Tabel 2. Besarnya Premi dan Alokasi Dana(dari santunan sebesar 50.000.000)

Nama	Premi	Alokasi Dana Premi			Dana Investasi
		$\alpha=20\%$	$\beta=65\%$	$(100-\alpha-\beta)=15\%$	
Agus	8.707.009	1.741.402	5.659.556	1.306.051	6.965.607
Bagas	9.264.497	1.852.899	6.021.923	1.389.675	7.411.598
Galih	2.559.825	511.965	1.663.886	383.974	2.047.860
Yoga	7.184.352	1.436.870	4.669.829	1.077.653	5.747.481

Catatan :

α = biaya administrasi

β = tabungan peserta

$(100-\alpha-\beta)$ = dana *tabarru'* (tolong-menolong)

Dana Investasi= $(100 - \alpha)\%$ x Premi

Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat untuk peserta dengan masa asuransi yang sama, diperoleh hasil bahwa peserta dengan usia yang lebih tua diwajibkan membayar premi yang nilainya lebih besar dari peserta yang usianya lebih muda. Demikian pula dengan peserta yang masa asuransinya berbeda. Premi yang harus dibayarkan peserta dengan masa asuransi yang pendek, lebih besar daripada premi peserta dengan masa asuransi yang panjang.

Tabel 3. Bagi Hasil Dana Investasi

Nama	Hasil Investasi	Hasil Investasi		Nilai Tunai	Besarnya Klaim
		Mudharabah (γ) (65%)	Keuntungan Perusahaan(35%)		
Agus	835.873	543.317	292.556	6.202.873	56.202.873
Bagas	889.392	578.105	311.287	6.600.028	56.600.028
Galih	245.743	159.733	86.010	1.823.619	51.823.619
Yoga	689.698	448.304	241.394	5.118.132	55.118.132

Catatan :

Hasil Investasi = 12% x Dana Investasi

Nilai tunai = Tabungan Peserta (β)+ Mudharabah (γ)

Besarnya Klaim = Santunan + Nilai Tunai

Pada Tabel 3, nilai tunai yang diperoleh berasal dari penjumlahan tabungan peserta dengan *mudharabah* hasil investasinya. Nilai tunai ini merupakan hak peserta asuransi yang diberikan ketika terjadi klaim. Besarnya klaim diperoleh dari besarnya santunan ditambah nilai tunainya.

Berikut disajikan total perhitungan dan ke-4 peserta asuransi dari tahun ke-1 sampai 15.

Tabel 4. Total Perhitungan Dana dari 4 Peserta Asuransi

Tahun Ke	Total Premi Peserta	Total Biaya Administrasi	Hasil Investasi	Keuntungan Perusahaan
1	27,715,683	5,543,136	2,660,706	931,247
2	27,715,683	5,543,136	2,660,706	931,247

3	27,715,683	5,543,136	2,660,706	931,247
4	27,715,683	5,543,136	2,660,706	931,247
5	27,715,683	5,543,136	2,660,706	931,247
6	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
7	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
8	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
9	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
10	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
11	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
12	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
13	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
14	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404
15	9,744,177	1,948,835	935,441	327,404

8. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa untuk peserta yang masa asuransinya sama tetapi usianya berbeda, maka semakin tua usia peserta, semakin besar premi dan klaim asuransinya, sehingga alokasi dananya juga semakin besar. Sebaliknya, jika semakin muda usia peserta maka premi dan klaim asuransinya semakin kecil, sehingga semakin kecil pula alokasi dananya.

Untuk peserta dengan usia yang sama tetapi masa asuransinya berbeda, maka semakin panjang masa asuransi, semakin kecil premi dan klaimnya, sehingga diperoleh alokasi dana yang semakin kecil. Sebaliknya, jika masa asuransinya semakin pendek maka premi dan klaimnya akan semakin besar, sehingga semakin besar pula alokasi dananya.

9. Daftar Pustaka

- Bowers, N.L, Geerber H.U, dan Hickman, J.C. (1997). *Actuarial Mathematics Second Edition*. The Society of Actuaries, United States of America.
- Futami, T. (1993). *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*. Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Tokyo.
- Kahfi, M.A. (2017). *Strategi Mengembangkan Asuransi di Indonesia: Studi Kasus Model Stokastik Pengalokasian Premi Asuransi Syariah*. Institut Teknologi Bandung.
- Sembiring, R.K. (1986). *Buku Materi Pokok Asuransi I*. Karunika UniversitasTerbuka, Jakarta.

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan

Karomani^{1*}, Nusyirwan²

¹ Jurusan Ilmu Komunikasi Universitas Lampung, Bandar Lampung

² Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145

Abstrak

Analisis Biplot adalah suatu teknik statistika deskriptif yang dapat disajikan secara visual guna menyajikan secara simultan n obyek pengamatan dan p peubah dalam ruang bidang datar, sehingga ciri-ciri peubah dan obyek pengamatan serta posisi relatif antar obyek pengamatan dengan peubah dapat dianalisis. Penelitian ini bertujuan mengelompokkan persepsi antaretnik Sunda, Jawa, Batak, Lampung dan Bugis di Bakauheni Kalianda. Berdasarkan hasil analisis terdapat 2 kelompok besar yaitu kelompok etnik pemberani dan kelompok etnik yang rendah hati, halus, dan sederhana. Kelompok etnik pemberani yaitu etnik Batak, Lampung, dan Bugis. Kelompok etnik yang rendah hati, halus, dan sederhana yaitu etnik Jawa dan Sunda. Perilaku toleran, jujur, bijaksana, pandai, agamis, terbuka, pemaaf, dan pemurah dimiliki oleh semua etnik.

Kata Kunci : *Biplot, Perception, Inter-ethnic,*

1. Pendahuluan

Daerah Bakauheni Lampung Selatan sebagai daerah pelabuhan dihuni oleh beragam etnik Nusantara antara lain etnik Sunda, Jawa, Bugis, Lampung, dan Batak. Sebagaimana dikemukakan Kades Bakauheni (wawancara tgl 19 Agustus 2008) rinciannya kurang lebih yaitu suku Lampung 28 persen, suku Jawa 50 persen, Batak 5 persen, Sunda 10 persen dan Bugis 3 persen dan sisanya 4 persen suku lain di luar suku tersebut.

Desa Bakauheni memiliki jumlah penduduk sebanyak 10.076 jiwa yang terdiri atas 2116 kepala keluarga. Tingkat pendidikan warganya relatif rendah sebagian besar 65 persen hanya tamat SD, 26 persen tamat SLTP, kurang dari 9 persen tamat SLTA. Mata pencaharian penduduk 57 persen petani, 26 persen buruh tani, 6 persen buruh swasta, nelayan, pegawai negari, dan pedagang masing-masing 2 persen sisanya. Sisanya montir sopir dan lain-lain. Penduduk desa ini 85 persen beragama Islam, 10 persen Kristen 5 persen Hindu dan Budha (*Buku Profil Desa*, 2009 : 9-10).

Bakauheni sebuah desa yang berada di wilayah Kabupaten Lampung Selatan Provinsi Lampung. Desa ini tepat berada di lingkungan pelabuhan penyebrangan Bakauheni – Merak Banten. Bakauheni— untuk arus barang, jasa dan orang dari Sumatra -- merupakan pintu gerbang masuk Jawa, dan sebaliknya merupakan pintu masuk dari Jawa ke Sumatra. Wilayah Bakauheni yang tepat berada di wilayah Selat Sunda merupakan daerah yang strategis; merupakan urat nadi arus barang, jasa dan orang dari dan ke Jawa dan Sumatra. Jembatan Selat Sunda yang digagas dua provinsi Banten dan Lampung berada di wilayah ini. Di daerah ini juga berdiri menara *Siger* mahkota dalam adat perkawinan masyarakat Lampung yang telah dijadikan sebagai ikon Provinsi Lampung.

Dalam masyarakat multikultur atau multietnik seperti di Bakauheni acapkali terjadi persepsi dan prasangka sosial yang buruk antaretnik. Ini antara lain disebabkan oleh perbedaan latar belakang budaya. Dikatakan Mulyana (2001:197) perbedaan aspek budaya seperti kepercayaan, nilai, sikap, pandangan dunia, organisasi sosial, tabiat manusia, orientasi kegiatan, dan konsep diri atau tanggapan tentang diri dan orang lain akan mewarnai persepsi terhadap keberadaan dan perilaku orang lain.

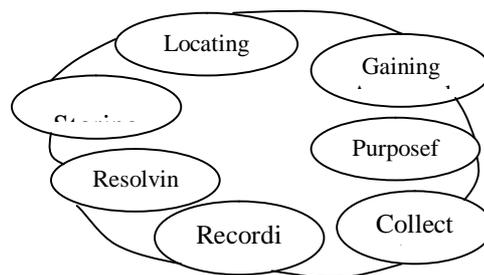
Mengkaji aspek komunikasi khususnya yang berkaitan dengan persepsi antaretnik yang diwarnai budaya yang berbeda penting dilakukan, karena dengan penelitian yang mendalam persepsi antaretnik dapat dipahami dan secepatnya dicarikan model pemecahannya secara ilmiah, sehingga konflik antaretnik

yang disebabkan oleh benturan budaya seperti yang pernah terjadi di daerah lain Sampit, Poso, Ambon dan lain-lain di Lampung hal itu bisa dihindari . Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan persepsi antar etnik Sunda, Jawa, Batak, Lampung dan Sulawesi di Bakauheni Kalianda Lampung Selatan, kemudian mengelompokkan keempat etnik tersebut berdasarkan persepsi antar etnik menggunakan analisis biplot.

2. Metode

Untuk mendeskripsikan dan memahami fenomena yang dijadikan fokus penelitian digunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan kualitatif termasuk dalam *naturalistic inquiry*, yang memperlakukan manusia sebagai instrumen karena penelitiannya sarat oleh muatan naturalistik. Pendekatan kualitatif sebagai prosedur penelitian dalam penelitian ini akan menghasilkan data deskriptif berupa kata-kata tertulis atau lisan dari orang-orang dan perilaku yang diamati. Peneliti sebagaimana dijelaskan Creswell (2002:4) membangun gambaran yang kompleks dan holistik, melakukan analisis kata-kata, melaporkan pandangan informan secara terinci dan melakukan penelitian dalam tataran alamiah. Dapat disimpulkan bahwa pendekatan kualitatif yang digunakan dalam penelitian ini bersifat deskriptif. Metode deskriptif bertujuan membuat deskripsi, gambaran, lukisan secara sistematis, faktual, akurat tentang fakta, sifat, juga hubungan antar fenomena yang diselidiki.

Adapun metode pengumpulan data dalam penelitian ini selain ditempuh melalui wawancara terhadap lima puluh informan juga didukung oleh data sekunder berupa bahan literatur yang erat kaitannya dengan masalah penelitian. Terkait dengan bagaimana peneliti melakukan aktivitas pengumpulan data, peneliti mengacu pada aktivitas rujukan pengumpulan data yang disarankan Creswell yang disebut dengan “*A Data Collection Circle*“(Creswell,1988:109-35). Model Creswell ini dibagikan berikut :



Analisis biplot diperkenalkan oleh Grabiell pada tahun 1971. Pada dasarnya, analisis ini merupakan suatu upaya untuk memberikan peragaan grafik dari matriks data X dalam suatu plot dengan menumpang tindhkan vektor-vektor dalam ruang berdimensi rendah (Jolliffe, 2002). Analisis ini digunakan untuk positioning maupun perceptual mapping dari sekumpulan objek (baris dari matriks data X). Dalam prosesnya analisis biplot memerlukan data dari sejumlah objek dengan atribut-atribut (kolom dari matriks data X), yang diukur dengan skala interval dan rasio. Hasil akhir analisis ini akan diberikan dalam bentuk tampilan gambar dua dimensi yang berisi informasi tentang : 1. Posisi relatif objek. Berdasarkan informasi ini dua objek yang memiliki jarak terdekat dikatakan memiliki tingkat kemiripan yang tinggi berdasarkan atribut- atribut yang diamati. 2. Hubungan antar atribut, dari informasi ini akan diketahui mengenai hubungan linier (korelasi) antar atribut serta tingkat kepentingan suatu atribut yang didasarkan pada variannya. 3. Penggabungan informasi (1) dan (2) dikenal dengan istilah bi-plot, akan diketahui ciri-ciri masing-masing objek berdasarkan atribut yang diamati.

3. Hasil dan Pembahasan

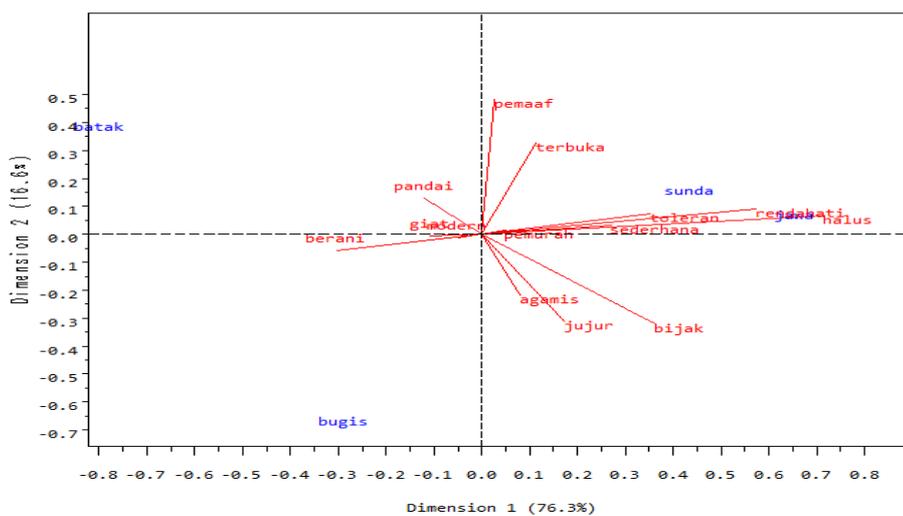
3.1. Persepsi Etnik Lampung terhadap Etnik Bugis, Batak, Sunda dan Jawa

Persepsi etnik Lampung terhadap ciri-ciri etnik lain yakni etnik Bugis, Batak, Sunda dan Jawa dapat dilihat pada tabel berikut :

Prilaku	Bugis	Batak	Sunda	Jawa
Berani	70%	80%	40%	40%
Rendah hati	30%	10%	80%	90%
Toleran	40%	30%	70%	80%
Jujur	70%	30%	50%	70%
Halus/lembut	30%	0 %	90%	100%
Bijaksana	60%	10%	50%	80%
Pandai	60%	80%	60%	60%
Pemurah	50%	50%	50%	60%
Moderen	60%	60%	60%	50%
Sederhana	40%	30%	60%	70%
Giat	70%	80%	40%	80%
Agamis	70%	40%	70%	50%
Terbuka	30%	60%	60%	70%
Pemaaf	40%	90%	80%	80%

Tabel 1. Persepsi Etnik Lampung terhadap Etnik Bugis, Batak, Sunda dan Jawa

Jika Tabel 1 dianalisis dengan Biplot maka didapat gambar di bawah ini.



Gambar 1. Biplot Persepsi Etnik Lampung terhadap Etnik Bugis, Batak, Sunda dan Jawa

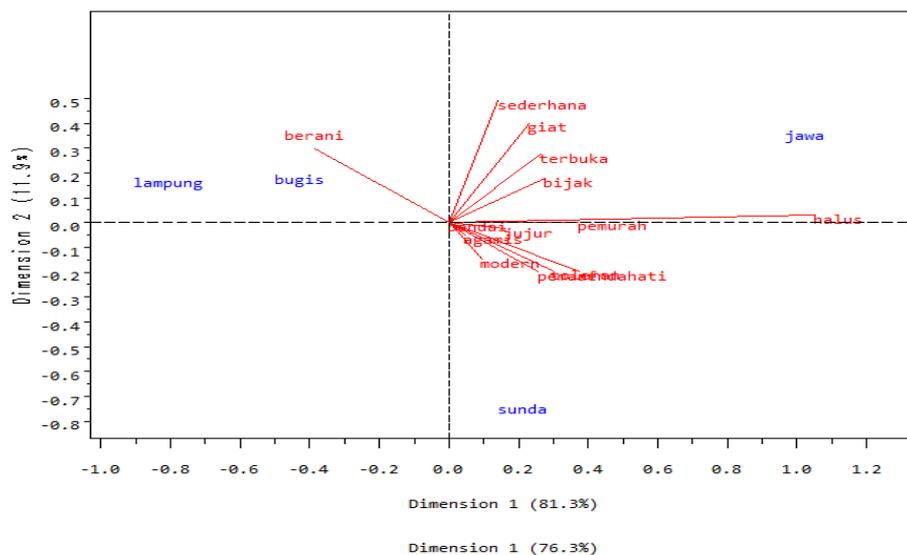
Dari Gambar 1 dapat kita lihat menurut persepsi Etnik Lampung bahwa Etnik Sunda dan Etnik Jawa mempunyai perilaku yang mirip yaitu halus, rendah hati, sederhana, dan toleran. Sedangkan etnik batak dan bugis menurut persepsi etnik Lampung mempunyai prilaku hampir sama yaitu berani, giat, dan moderen Persepsi etnik lampung terhadap etnik bugis, batak, sunda, dan jawa tentang sifat halus dan rendah hati sangat beragam. Prilaku rendah hati, halus, sederhana, dan pemurah mempunyai hubungan yang erat. Prilaku agamis dan jujur mempunyai hubungan yang sangat erat.

3.2 Persepsi Etnik Batak terhadap Etnik Bugis, Sunda, Jawa dan Lampung

Persepsi etnik Batak terhadap ciri-ciri etnik lain yakni etnik Bugis, Sunda, Jawa dan Lampung dapat dilihat pada tabel berikut :

Prilaku	Bugis	Sunda	Jawa	Lampung
Berani	100%	40%	40%	100%
Rendah hati	40%	90%	100%	40%
Toleran	80%	100%	100%	40%
Jujur	70%	80%	90%	60%
Halus/lembut	30%	100%	100%	-
Bijaksana	70%	60%	100%	40%
Pandai	60%	60%	60%	60%
Pemurah	40%	60%	90%	20%
Moderen	70%	80%	70%	50%
Sederhana	40%	30%	100%	80%
Giat	60%	20%	80%	20%
Agamis	70%	90%	90%	90%
Terbuka	60%	40%	90%	30%
Pemaaf	60%	100%	100%	60%

Tabel 2. Persepsi Etnik Batak terhadap Etnik Bugis, Sunda, Jawa dan Lampung
 Jika tabel 2 dianalisis dengan Biplot maka didapat gambar di bawah ini.



Gambar 2. Biplot persepsi Etnik Batak terhadap Etnik Bugis, Lampung, Sunda dan Jawa

Dari Gambar 2 dapat kita lihat menurut persepsi Etnik Batak bahwa Etnik Sunda dan Etnik Jawa mempunyai prilaku yang halus, rendah hati, dan pemurah. Sedangkan etnik lampung dan bugis menurut persepsi etnik batak mempunyai prilaku hampir sama yaitu berani. Persepsi etnik batak terhadap etnik lampung, bugis, sunda, dan jawa tentang sifat halus sangat beragam. Prilaku halus dan pemurah mempunyai hubungan yang erat begitu juga prilaku agamis dan jujur.

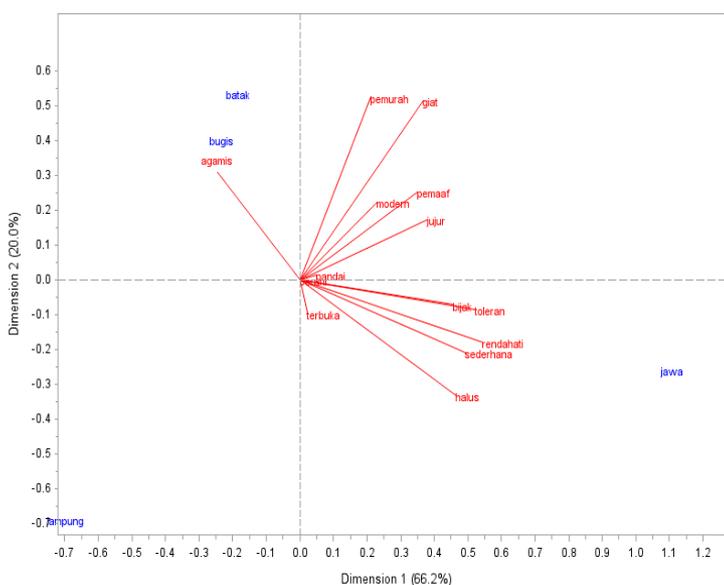
3.3 Persepsi Etnik Sunda terhadap Etnik Bugis, Batak, Jawa dan Lampung

Persepsi etnik Sunda terhadap ciri-ciri etnik lain yakni etnik Bugis, Batak, Jawa dan Lampung dapat dilihat pada tabel berikut :

Prilaku	Bugis	Batak	Jawa	Lampung
Berani	100%	100%	100%	100%
Rendah hati	10%	20%	100%	10%
Toleran	20%	30%	100%	10%
Jujur	100%	30%	100%	20%
Halus/lembut	20%	10%	100%	30%
Bijaksana	40%	30%	100%	20%
Pandai	100%	90%	100%	90%
Pemurah	70%	90%	70%	10%
Moderen	40%	70%	70%	20%
Sederhana	20%	20%	100%	20%
Giat	100%	80%	100%	10%
Agamis	100%	90%	40%	70%
Terbuka	80%	80%	90%	90%
Pemaaf	10%	90%	80%	10%

Tabel 3. Persepsi Etnik Sunda terhadap Etnik Bugis, Batak, Jawa dan Lampung

Jika Tabel 3 dianalisis dengan Biplot maka didapat gambar di bawah ini.



Gambar 3. Biplot Persepsi Etnik Sunda terhadap Etnik Bugis, Lampung, Batak dan Jawa

Dari Gambar 3 dapat kita lihat menurut persepsi Etnik Sunda bahwa Etnik Etnik Jawa mempunyai prilaku yang halus, sederhana, rendah hati, toleran, dan bijak. Sedangkan etnik lampung, bugis, dan batak

menurut persepsi etnik sunda mempunyai prilaku hampir sama yaitu berani, agamis, dan terbuka. Persepsi etnik sunda terhadap etnik lampung, bugis, batak, dan jawa tentang sifat halus sangat beragam. Prilaku halus dan pemurah mempunyai hubungan yang erat begitu juga prilaku agamis dan jujur.

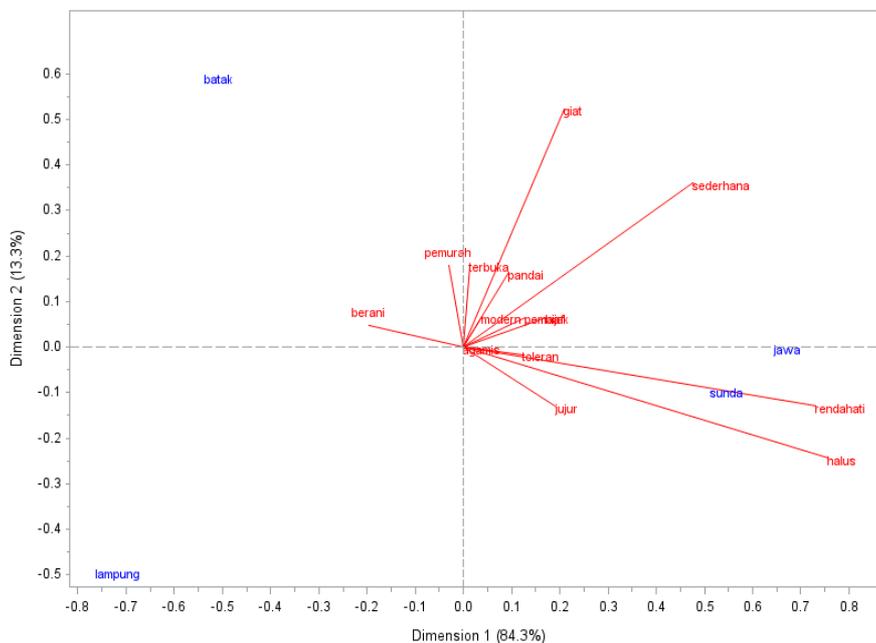
3.4 Persepsi Etnik Bugis terhadap Etnik Batak, Sunda, Jawa dan Lampung

Persepsi etnik Bugis terhadap ciri-ciri etnik lain yakni etnik Batak, Sunda, Jawa dan Lampung dapat dilihat pada tabel berikut :

Prilaku	Batak	Sunda	Jawa	Lampung
Berani	100%	70%	80%	100%
Rendah hati	-	80%	100%	-
Toleran	80%	90%	100%	80%
Jujur	70%	100%	100%	80%
Halus/lembang	-	100%	100%	10%
Bijaksana	80%	90%	100%	70%
Pandai	100%	100%	100%	80%
Pemurah	100%	90%	80%	80%
Moderen	20%	30%	10%	10%
Sederhana	70%	100%	100%	20%
Giat	100%	80%	100%	40%
Agamis	100%	100%	100%	100%
Terbuka	100%	90%	90%	80%
Pemaaf	80%	90%	90%	70%

Tabel 4. Persepsi Etnik Bugis terhadap Etnik Batak, Sunda, Jawa dan Lampung

Jika Tabel 4 dianalisis dengan Biplot maka didapat gambar di bawah ini.



Gambar 4. Biplot Persepsi Etnik Bugis terhadap Etnik Batak , Lampung, Sunda dan Jawa

Dari Gambar 4 dapat kita lihat menurut persepsi Etnik Bugis bahwa Etnik Jawa dan Sunda mempunyai prilaku yang halus, sederhana, rendah hati, toleran, dan jujur. Sedangkan etnik lampung dan batak menurut persepsi etnik bugis mempunyai prilaku hampir sama yaitu berani, agamis, dan pemurah. Persepsi etnik bugis terhadap etnik lampung, sunda, batak, dan jawa tentang sifat halus dan rendah hati

sangat beragam. Prilaku halus dan rendah hati mempunyai hubungan yang erat begitu juga prilaku agamis dan toleran.

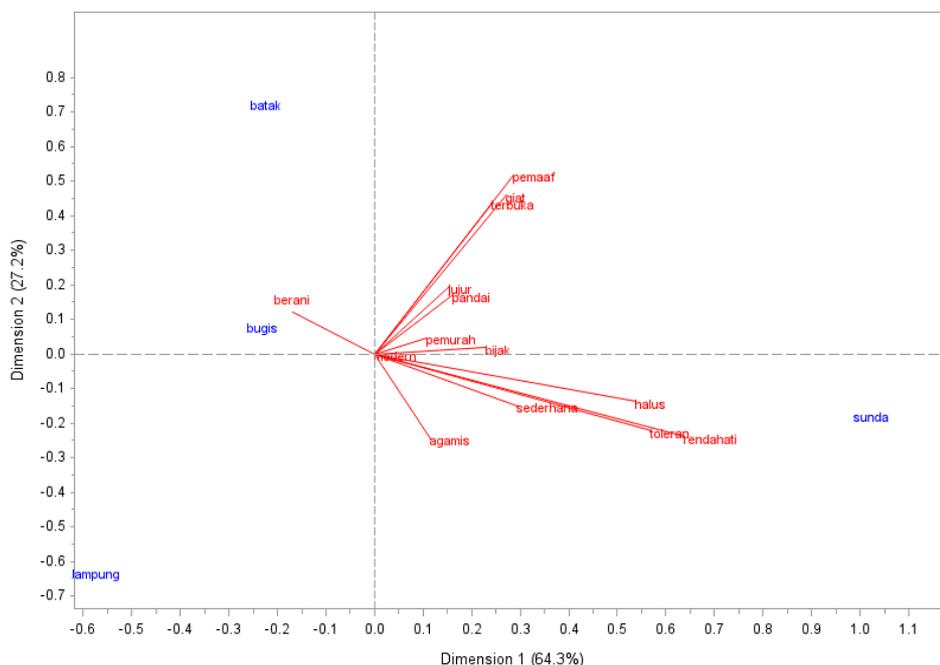
3.5 Persepsi Etnik Jawa terhadap Etnik Bugis, Batak, Sunda, dan Lampung

Persepsi etnik Jawa terhadap ciri-ciri etnik lain yakni etnik Bugis, Batak, Sunda, dan Lampung dapat dilihat pada tabel berikut :

Prilaku	Bugis	Batak	Sunda	Lampung
Berani	100%	100%	70%	90%
Rendah hati	10%	-	100%	10%
Toleran	20%	10%	100%	20%
Jujur	100%	80%	90%	50%
Halus/lembut	10%	-	80%	-
Bijaksana	70%	60%	90%	50%
Pandai	70%	100%	100%	70%
Pemurah	40%	40%	50%	30%
Moderen	60%	60%	60%	60%
Sederhana	20%	10%	60%	20%
Giat	80%	80%	80%	10%
Agamis	80%	50%	90%	80%
Terbuka	20%	90%	70%	20%
Pemaaf	70%	100%	90%	20%

Tabel 5. Persepsi Etnik Jawa terhadap Etnik Bugis, Batak, Sunda dan Lampung

Jika Tabel 5 dianalisis dengan Biplot maka didapat gambar di bawah ini.



Gambar 5. Biplot Persepsi Etnik Jawa terhadap Etnik Bugis, Lampung, Sunda dan Batak

Dari Gambar 5 dapat kita lihat menurut persepsi Etnik Jawa bahwa Etnik Sunda mempunyai prilaku yang halus, sederhana, rendah hati, toleran, dan jujur. Sedangkan etnik lampung, bugis dan batak menurut persepsi etnik jawa mempunyai prilaku hampir sama yaitu berani, agamis. Persepsi etnik jawa

terhadap etnik lampung, sunda, batak, dan bugis tentang sifat pemaaf dan rendah hati sangat beragam. Prilaku toleran dan rendah hati mempunyai hubungan yang erat begitu juga prilaku jujur dan pandai.

6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis terdapat 2 kelompok besar yaitu kelompok etnik pemberani dan kelompok etnik yang rendah hati, halus, dan sederhana. Kelompok etnik pemberani yaitu etnik Batak, Lampung, dan Bugis. Kelompok etnik yang rendah hati, halus, dan sederhana yaitu etnik Jawa dan Sunda. Perilaku toleran, jujur, bijaksana, pandai, agamis, terbuka, pemaaf, dan pemurah dimiliki oleh semua etnik.

7. Daftar Pustaka

BPMD, 2009. Profil Desa Bakauheni, Kecamatan Penengahan Lamsel.

Creswell, John W. 1998. *Qualitative Inquiry And Research Design Choosing Among Five Traditions*. India. Sage Publication Inc.

_____, 2002. *Research Design*. trj. Tim KIK UI. Jakarta : KIK Press.

Jolliffe, I.T. 2002. *Principal Component Analysis, Second Edition*. Springer. New York.

Mulyana, Deddy, 2001. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosda Karya.

Winangsih Syam, Nina, 2003. "Draf Format Usulan Penelitian Kualitatif." (makalah) . Bandung : PPs Undap.

PERBANDINGAN MVE-BOOTSTRAP DAN MCD-BOOTSTRAP DALAM ANALISIS REGRESI LINEAR BERGANDA PADA DATA BERUKURAN KECIL YANG MENGANDUNG PENCILAN

Ario Pandu^{1*}, Khoirin Nisa¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumatri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145

*Penulis Korespondensi: Ariopandu873@gmail.com

Abstrak

Dalam analisis regresi, metode penduga tak bias terbaik (*best linear unbiased estimator*) yang digunakan untuk pendugaan parameter adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Namun, ketika terdapat pencilan pada data pengamatan, MKT menjadi bias dan tidak efisien. Hal ini dikarenakan MKT sangat sensitif terhadap pencilan. Metode yang tepat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut adalah metode robust. Minimum Volume Ellipsoid (MVE) dan Minimum Covariance Determinant (MCD) merupakan dua metode robust yang dikenal memiliki ketegaran yang baik terhadap pencilan. Tetapi, penggunaan MVE dan MCD diragukan apabila dihadapkan pada data yang berukuran kecil. Oleh sebab itu, perlu penerapan metode bootstrap/resampling pada kedua metode tersebut agar diperoleh hasil pendugaan yang lebih baik. Tujuan dari penelitian ini adalah membandingkan ketegaran metode MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap untuk mengatasi pengaruh pencilan pada data yang berukuran kecil dalam analisis regresi linear berganda. Efektivitas masing-masing metode dapat diketahui berdasarkan nilai bias dan Mean Square Error (MSE) dari pendugaan parameter yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa MVE-Bootstrap lebih baik dari MCD-Bootstrap dalam menduga parameter regresi pada data berukuran kecil yang mengandung pencilan.

Kata kunci: Bootstrap; MCD; MVE; Pencilan; Robust

1. Pendahuluan

Analisis regresi linear merupakan suatu metode statistika yang digunakan untuk menyelidiki pola hubungan linier antara variabel tak bebas dan variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, analisis regresi linear dibagi menjadi dua jenis, yaitu analisis regresi linear sederhana dan analisis regresi linear berganda. Analisis regresi linear sederhana digunakan untuk mengetahui pengaruh antara satu variabel bebas terhadap satu variabel tak bebas. Sedangkan analisis regresi linier berganda digunakan untuk menyelidiki hubungan antara dua atau lebih variabel bebas terhadap satu variabel tak bebas. Menurut Kumalasari dkk. (2017), bentuk umum persamaan model regresi linier berganda dengan p jumlah variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + e. \quad (1)$$

Hasil dari analisis regresi berupa parameter regresi yang terdiri dari konstanta dan koefisien regresi untuk masing-masing variabel bebas. Metode yang paling umum digunakan dalam pembentukan model atau mengestimasi parameter regresi adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Prinsip metode ini adalah mengestimasi nilai parameter dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat (Sembiring, 2003). Penduga MKT bagi parameter model regresi diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (2)$$

MKT dikenal sangat baik dan bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) dalam mengestimasi parameter regresi ketika semua asumsi klasik terpenuhi. Namun menurut Yaffee (2002) dalam Nisa (2006), MKT merupakan metode penduga parameter yang sangat sensitif terhadap adanya penyimpangan asumsi. Apabila salah satu asumsi klasik regresi tidak terpenuhi, maka MKT menjadi bias dan tidak efisien untuk menduga parameter regresi.

Salah satu asumsi penting dalam analisis regresi yang harus terpenuhi ialah asumsi normalitas. Namun dalam berbagai kasus penelitian, tidak jarang ditemukan penyimpangan terhadap asumsi normalitas. Penyimpangan tersebut salah satunya disebabkan oleh adanya pencilan pada data pengamatan. Pencilan merupakan data pengamatan yang menyimpang dari data lainnya. Terkadang untuk mengatasi pencilan seorang peneliti melakukan

transformasi terhadap data, namun seringkali asumsi tersebut tidak terpenuhi meskipun telah dilakukan transformasi yang pada akhirnya tetap membiaskan pendugaan (Olive, 2005).

Dalam kasus seperti ini, metode regresi *robust* yang tegar terhadap pengaruh pencilan merupakan metode yang paling layak digunakan. Regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan ketika distribusi dari galat tidak normal dan atau adanya beberapa pencilan yang berpengaruh pada model (Shodiqin, dkk., 2018). Hingga saat ini, telah banyak metode regresi *robust* yang digunakan peneliti dalam pendugaan parameter pada data mengandung pencilan, seperti Penduga-M oleh Ghazali dkk. (2015) dan Ardiyanti (2011), Penduga LMS oleh Husna (2015) dan Haditama (2011), Penduga LTS oleh Shodiqin dkk. (2018) dan Mashitah dkk. (2013), Penduga MM oleh Nurdin dkk. (2014) dan Candraningtyas dkk. (2013), serta Penduga S oleh Febrianto (2016). Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, dalam penelitian ini pendugaan parameter regresi pada data mengandung pencilan akan menggunakan metode *robust* lain yang lazim diterapkan dalam analisis *multivariate*, yaitu *Minimum Volume Ellipsoid* (MVE) dan *Minimum Covariance Determinant* (MCD).

Metode MVE dan MCD memang dikenal memiliki ketegaran yang cukup besar terhadap adanya pencilan. Namun menurut Gusriani, dkk. (2013), penggunaan metode MCD diragukan apabila dihadapkan pada data yang berukuran kecil. Hal ini berlaku pula pada metode MVE. Oleh sebab itu, perlu penerapan prosedur *resampling* pada kedua metode tersebut untuk mendapatkan hasil pendugaan yang lebih baik. Metode *resampling* yang dapat digunakan dalam pendugaan parameter regresi adalah *bootstrap*. Penerapan *bootstrap* pada metode MVE dan MCD selanjutnya dapat disebut sebagai *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap*.

Minimum Volume Ellipsoid (MVE) merupakan metode penduga *robust* untuk vektor nilai tengah dan matriks peragam. Prinsip metode ini adalah mencari sebuah *ellipsoid* dengan volume paling minimum yang melingkupi suatu subhimpunan dari minimal h pengamatan, dengan $[h = (n+p+1)/2]$. Subhimpunan berukuran h ini disebut *halfset* karena h sering dipilih lebih dari setengah n pengamatan (Notiragayu dan Nisa, 2008). Menurut Parmikanti dkk. (2016), untuk mendapatkan elipsoida dengan volume minimum, dimulai dengan memilih himpunan bagian yang memuat $(p+1)$ pengamatan. Selanjutnya untuk setiap himpunan bagian berukuran $(p+1)$ dapat disebut himpunan indeks $J = \{ i_1, i_2, \dots, i_{p+1} \}$. Lalu dilanjutkan dengan menentukan vektor rata-rata (*mean*) T_J , matriks kovarian S_J , dan jarak kuadrat D_J^2 dari sampel, dengan menggunakan persamaan sebagai berikut,

$$T_J = \bar{x}_J = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} x_{ij} \quad (3)$$

$$S_J = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p+1} (x_{ij} - \bar{x}_J)(x_{ij} - \bar{x}_J)^T \quad (4)$$

$$D_J^2 = [(x_{ij} - \bar{x}_J)^T (S_J)^{-1} (x_{ij} - \bar{x}_J)]. \quad (5)$$

Selanjutnya menghitung volume *ellipsoid* sebagai nilai volume elips dari subsampel pertama, yang dinyatakan dalam rumus berikut,

$$V_J = \left(\frac{D_J}{c}\right)^p \sqrt{\det(S_J)}; c = \sqrt{X_{p,\alpha}^2}. \quad (6)$$

Mengulangi untuk subsampel selanjutnya dengan ukuran yang sama hingga sebanyak $\binom{n}{p+1}$ subsampel. Kemudian memilih subsampel yang elipsnya memiliki volume paling minimum, yang dilanjutkan dengan menghitung \bar{X}_{MVE} dan S_{MVE} dari subsampel terpilih, dimana:

$$\bar{X}_{MVE} = T_J \quad (7)$$

$$S_{MVE} = \frac{c^2(n,p)}{X_{p,\alpha}^2} D_J^2 S_J; c^2(n,p) = \left[1 + \frac{15}{n+p}\right]^2 \quad (8)$$

Dengan menggunakan \bar{X}_{MVE} dan S_{MVE} tersebut, maka selanjutnya data dapat diboboti dengan:

$$W_i = \begin{cases} 1, & (x_i - \bar{X}_{MVE})^T S_{MVE}^{-1} (x_i - \bar{X}_{MVE}) \leq X_{p,1-\alpha}^2 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Pembobot W_i dapat membentuk matriks \mathbf{W}_{MVE} berukuran $n \times n$, sebagai berikut

$$\mathbf{W}_{MVE} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh penduga MVE untuk menduga parameter regresi dengan persamaan berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MVE} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}_{MVE} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}_{MVE} \mathbf{Y}) \quad (9)$$

Minimum Covariance Determinant (MCD) merupakan metode penduga parameter dengan meminimumkan determinan matriks kovarians. Prinsip metode MCD adalah mendapatkan subhimpunan dari keseluruhan pengamatan yang matriks kovariansnya memiliki determinan terkecil diantara semua kombinasi kemungkinan data (Kurniadi dkk., 2012). Berdasarkan Dayanti dkk. (2016), langkah-langkah penduga MCD dalam menduga parameter regresi dengan menggunakan *fast-MCD* dimulai dengan mengambil himpunan bagian dari matriks X secara acak, misalkan himpunan bagian tersebut H_1 dengan jumlah elemen sebanyak h . Selanjutnya menghitung vektor rata-rata $\bar{\mathbf{X}}_{MCD}$ dan matriks kovarians \mathbf{S}_{MCD} dari H_1 dengan memisalkan $\bar{\mathbf{X}}_1$ dan \mathbf{S}_1 menggunakan persamaan berikut,

$$\bar{\mathbf{X}}_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{i \in H} x_i \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{i \in H} [x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD}][x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD}]^T. \quad (11)$$

Kemudian menghitung determinan dari \mathbf{S}_1 atau $det(\mathbf{S}_1)$. Jika $(\mathbf{S}_1) \neq 0$, maka dilanjutkan dengan menghitung jarak mahalnobis yang kemudian diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar. Jarak mahalnobis dihitung dengan rumus berikut

$$RD_i = \sqrt{(x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD})^T \mathbf{S}_{MCD}^{-1} (x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD})}. \quad (12)$$

Pada iterasi selanjutnya, yaitu H_2 akan diambil sebanyak h pengamatan dengan jarak RD terkecil. Demikian seterusnya hingga mencapai konvergen $(S_{i+1}) = det(S_i)$. Selanjutnya memilih himpunan H yang memiliki determinan \mathbf{S}_{MCD} terkecil, serta mencari $\bar{\mathbf{X}}_{MCD}$ dan \mathbf{S}_{MCD} dari himpunan H terpilih. Dengan menggunakan $\bar{\mathbf{X}}_{MCD}$ dan \mathbf{S}_{MCD} tersebut, maka selanjutnya data dapat diboboti dengan:

$$W_i = \begin{cases} 1, & (x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD})^T \mathbf{S}_{MCD}^{-1} (x_i - \bar{\mathbf{X}}_{MCD}) \leq X_{p;1-\alpha}^2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Pembobot W_i dapat membentuk matriks \mathbf{W}_{MVE} berukuran $n \times n$, sebagai berikut

$$\mathbf{W}_{MCD} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh penduga MCD untuk menduga parameter regresi dengan persamaan berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MCD} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}_{MCD} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}_{MCD} \mathbf{Y}). \quad (13)$$

Bootstrap merupakan teknik *resampling* nonparametrik yang bertujuan untuk menentukan estimasi standar eror dan interval konfidensi dari parameter populasi seperti mean, rasio, median, proporsi, koefisien korelasi atau koefisien regresi tanpa menggunakan asumsi distribusi. Metode ini dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam statistika baik masalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsinya maupun data yang tidak memiliki asumsi dalam distribusinya (Sungkono, 2015). Ada dua prosedur *bootstrap* yang dapat diterapkan pada model regresi, yaitu *bootstrap pairs* dan *bootstrap residual*. Metode *bootstrap* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *bootstrap residual* yang bekerja dengan meresampling hanya pada data sisaannya. Prosedur pada *bootstrap residual* sama dengan prosedur *bootstrap* pada umumnya. Langkah-langkah melakukan *bootstrap residual* menurut Gusriani dkk. (2013), dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan parameter regresi dan nilai \hat{y}_i , kemudian menghitung nilai *residual* dengan $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Selanjutnya mengambil sampel dari *residual* sebanyak n

secara acak dengan pengembalian dari e_i sehingga diperoleh $e_i^{*(b)} = (e_1^{*(b)}, e_2^{*(b)}, \dots, e_n^{*(b)})$. Lalu menentukan nilai *bootstrap* untuk $Y^{*(b)}$ dengan persamaan berikut:

$$Y^{*(b)} = X\hat{\beta} + e^{*(b)}. \quad (14)$$

Menghitung parameter regresi *bootstrap* dan melakukan iterasi hingga batas replikasi yang diinginkan atau sebanyak B kali. Parameter regresi *bootstrap* dapat dihitung dengan rumus berikut

$$\hat{\beta}^{*(b)} = (X^T X)^{-1} X^T Y^{*(b)}. \quad (15)$$

Tujuan dari penelitian ini adalah membandingkan efektivitas metode MVE-*Bootstrap* dan MCD-*Bootstrap* untuk menduga parameter pada data berukuran kecil yang mengandung pencilan dalam analisis regresi linear berganda. Pada penelitian ini akan dilakukan simulasi pendugaan parameter secara berulang-ulang dengan data beberapa ukuran sampel dan persentase pencilan. Efektivitas masing-masing metode dapat diketahui berdasarkan nilai bias dan *Mean Square Error* (MSE) dari estimasi parameter yang dihasilkan.

Menurut Wulandari dkk. (2010), bias penduga dari suatu parameter pada simulasi data didefinisikan sebagai jumlah selisih dari penduga parameter pada data yang terdapat *outlier* dengan penduga parameter pada data yang tanpa *outlier*, dibagi dengan banyaknya pengulangan. Sedangkan *Mean Square Error* (MSE) adalah jumlah selisih kuadrat dari penduga parameter pada data yang terdapat pencilan dengan penduga parameter pada data yang tanpa pencilan, dibagi dengan banyaknya pengulangan. Semakin kecil nilai bias dan MSE, maka hasil pendugaan suatu parameter semakin baik. Bias dan MSE dinotasikan sebagai berikut

$$Bias(\hat{\beta}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\hat{\beta}^{(s)} - \hat{\beta}^{(0)}| \quad (16)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\beta}^{(s)} - \hat{\beta}^{(0)})^2. \quad (17)$$

2. Metodologi Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi yang dibangkitkan menggunakan *software* R i386 v. 3.5.1. Data yang dibangkitkan terdiri dari galat (*error*) dan variabel bebas (X) yang akan digunakan untuk menentukan variabel tak bebas (Y). Data galat dibangkitkan berdistribusi N(0,1) dengan kontaminasi pencilan sebesar 10% dan 20%. Sedangkan data variabel bebas dibangkitkan dengan $X_1 \sim N(0,1)$ dan $X_2 \sim N(0,1)$. Masing-masing data dibangkitkan dengan ukuran sampel yang kecil, yaitu sebanyak 20, 30, 40, dan 50 sampel.

Adapun tahapan-tahapan simulasi yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membangkitkan satu kelompok galat serta variabel bebas X_1 dan X_2 masing-masing berdistribusi N(0,1).
2. Mengkontaminasikan kelompok galat dari distribusi N(0,1) dengan pencilan berdistribusi N(50,1). Pencilan yang diberikan yaitu sebesar 10% dan 20%.
3. Menentukan nilai variabel tak bebas Y menggunakan masing-masing galat, yaitu galat dengan pencilan 10% dan 20%, sehingga diperoleh $Y^{10\%}$ dan $Y^{20\%}$. Dalam hal ini memisalkan $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.
4. Menduga parameter regresi dengan menggunakan MKT, MVE- *Bootstrap*, dan MCD-*Bootstrap* terhadap masing-masing variabel tak bebas.
5. Mengulangi langkah 1 sampai dengan 4 sebanyak 1000 kali.
6. Menghitung dan membandingkan nilai bias dan MSE masing-masing parameter hasil dugaan dari MKT, MVE-*Bootstrap*, dan MCD-*Bootstrap* untuk semua ukuran sampel dan persentase pencilan.

3. Hasil dan Pembahasan

Setelah dilakukan simulasi dengan pengulangan 1000 kali menggunakan data dengan beberapa ukuran sampel dan ukuran persentase pencilan, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

3.1 Nilai Bias pada Setiap Ukuran Sampel dan Persentase Pencilan

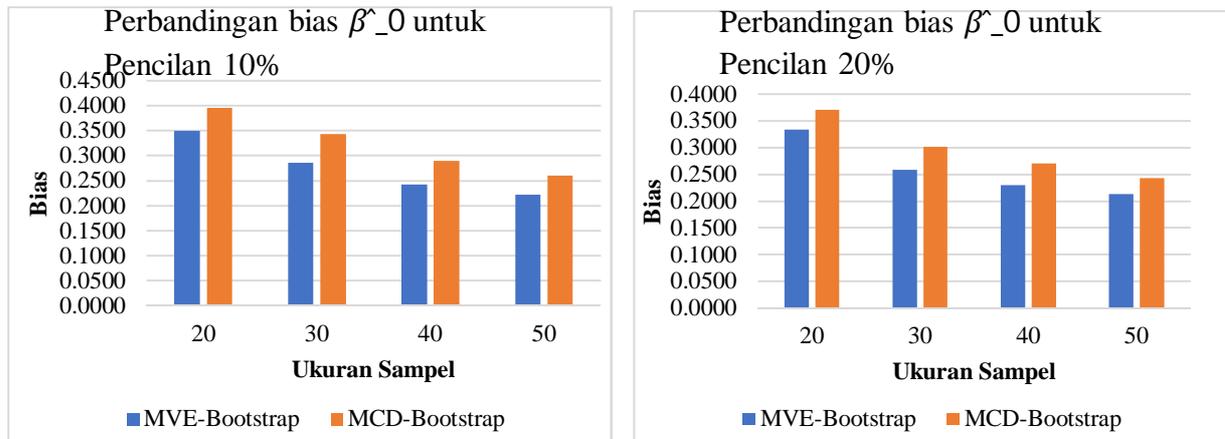
Dari hasil perhitungan yang dilakukan dengan menggunakan program R didapatkan nilai bias dari MKT, MVE-*Bootstrap*, dan MCD-*Bootstrap* sebagai berikut.

Tabel 1. Nilai Bias Pendugaan Parameter Regresi Menggunakan MKT, MVE-*Bootstrap*, dan MCD-*Bootstrap*

Pencilan	N	BIAS								
		MKT			MVE-Bootstrap			MCD-Bootstrap		
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
10%	20	4,9800	3,0800	3,0340	0,3500	0,4820	0,5030	0,3970	0,5540	0,5910
	30	4,9310	2,3470	2,4080	0,2860	0,4030	0,3890	0,3440	0,5090	0,5000
	40	5,0070	2,1130	2,0070	0,2420	0,3310	0,3410	0,2900	0,4210	0,4250
	50	4,9990	1,8190	1,8130	0,2230	0,3070	0,3120	0,2610	0,3990	0,3780
20%	20	9,9900	4,0100	4,0200	0,3340	0,4280	0,4090	0,3710	0,4650	0,4600
	30	10,0010	3,1810	3,2350	0,2590	0,3400	0,3430	0,3020	0,4160	0,4240
	40	9,9850	2,6810	2,6420	0,2310	0,3070	0,2980	0,2710	0,3870	0,3720
	50	9,9970	2,3180	2,4080	0,2140	0,2700	0,2860	0,2440	0,3410	0,3460

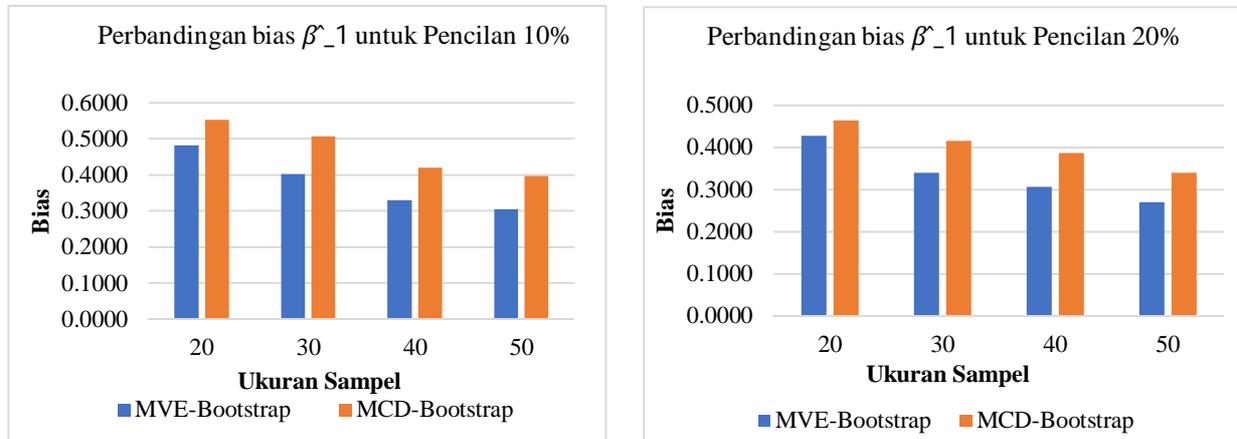
Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai bias metode MVE-*Bootstrap* dan MCD-*Bootstrap* lebih kecil dibandingkan MKT, bahkan memiliki selisih yang cukup jauh pada setiap ukuran sampel dan persentase pencilan. Dalam hal ini jelas menunjukkan bahwa parameter regresi yang diduga oleh MKT sangat buruk atau jauh dari parameter yang sebenarnya, sehingga tidak perlu diperbandingkan lebih jauh dengan MVE-*Bootstrap* dan MCD-*Bootstrap*. Adapun perbandingan nilai bias metode MVE-*Bootstrap* dan MCD-*Bootstrap* dapat dilihat pada gambar berikut.

3.2 Perbandingan Bias pada Setiap Ukuran Sampel dan Persentase Pencilan



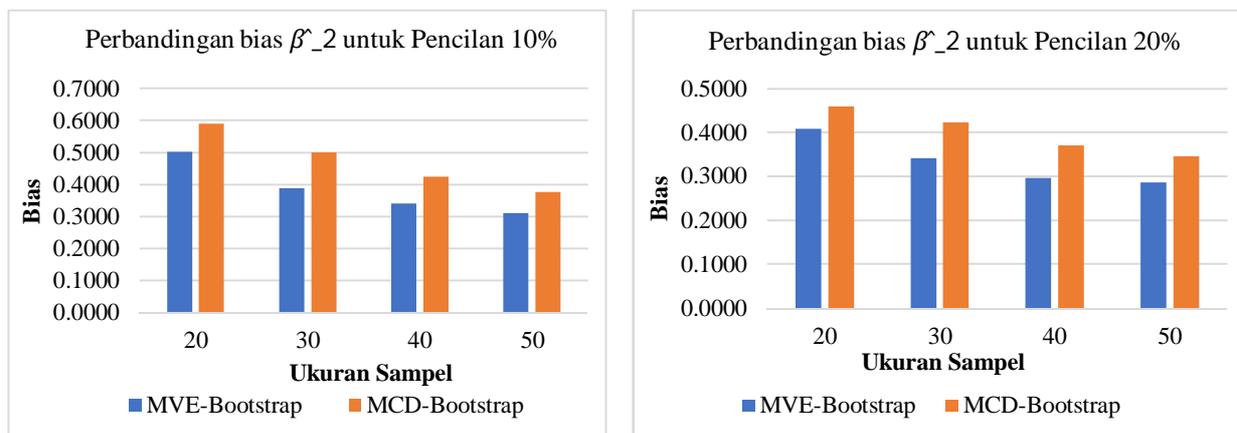
Gambar 1. Perbandingan bias $\hat{\beta}_0$ metode MVE-*Bootstrap* dan MCD-*Bootstrap* pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Berdasarkan Gambar 1 dapat terlihat bahwa untuk pendugaan β_0 , nilai bias yang dihasilkan metode *MVE-Bootstrap* lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap* pada semua ukuran sampel, baik yang memiliki persentase pencilan 10% maupun pencilan 20%. Dalam hal ini dapat pula terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel, maka bias yang dihasilkan oleh kedua metode semakin kecil. Selanjutnya grafik perbandingan bias $\hat{\beta}_1$ dapat dilihat pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Perbandingan bias $\hat{\beta}_1$ metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Seperti halnya dengan pendugaan β_0 , pada pendugaan β_1 juga dapat dilihat bahwa nilai bias yang dihasilkan oleh *MVE-Bootstrap* lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap* pada semua ukuran sampel dan semua persentase pencilan. Namun, selisih bias *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* pada data dengan persentase pencilan 10% tampak lebih besar dibandingkan pada data dengan persentase pencilan 20% untuk semua ukuran sampel. Adapun grafik perbandingan bias $\hat{\beta}_2$ diperoleh seperti pada Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3. Perbandingan bias $\hat{\beta}_2$ metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Dari Gambar 3. dapat dilihat bahwa untuk pendugaan β_2 juga menghasilkan perbandingan bias yang sama pada pendugaan β_0 dan β_1 . Hal ini ditunjukkan dengan nilai bias *MVE-Bootstrap* yang lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap*, baik untuk sampel dengan persentase pencilan sebesar 10% maupun 20%.

Berdasarkan perbandingan nilai biasnya, metode *MVE-Bootstrap* lebih baik dibandingkan dengan *MCD-Bootstrap* dalam menduga parameter regresi pada data yang berukuran kecil dan mengandung pencilan. Hal ini dikarenakan nilai bias yang dihasilkan oleh *MVE-Bootstrap* lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap* pada simulasi data yang telah dilakukan. Namun, untuk membandingkan ketegaran kedua metode tersebut tidak cukup hanya

dilihat berdasarkan nilai biasanya, tetapi juga perlu dilihat pula perbandingan nilai MSE yang dihasilnya oleh masing-masing metode agar diperoleh kesimpulan yang akurat.

3.3 Nilai Mean Square Error (MSE) pada Ukuran Sampel dan Setiap Persentase Pencilan

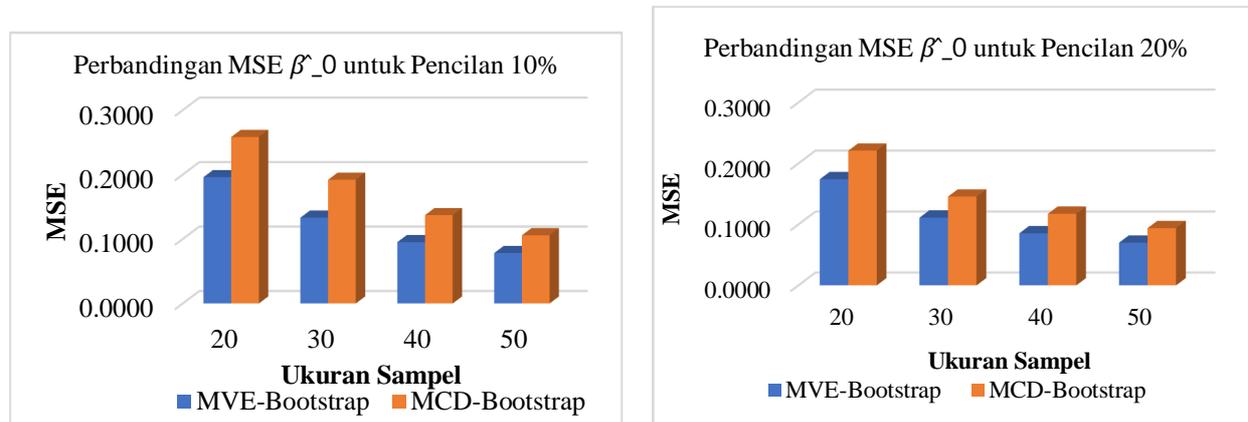
Dari hasil perhitungan yang dilakukan dengan menggunakan program R i386 3.5.1, maka didapatkan nilai MSE dari MKT, MVE-Bootstrap, dan MCD-Bootstrap sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai MSE Hasil Pendugaan Parameter Regresi Metode MKT, MVE-Bootstrap, dan MCD-Bootstrap

Pencilan	N	MSE								
		MKT			MVE-Bootstrap			MCD-Bootstrap		
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
10%	20	26,3280	14,7350	14,4560	0,1960	0,3990	0,4330	0,2580	0,5220	0,6080
	30	24,9090	8,6850	9,3080	0,1330	0,2720	0,2470	0,1920	0,4370	0,4120
	40	25,4230	6,9550	6,4780	0,0950	0,1820	0,1930	0,1370	0,2950	0,2940
	50	25,1960	5,2000	5,1690	0,0780	0,1520	0,1600	0,1060	0,2530	0,2280
20%	20	102,6430	25,4370	26,0830	0,1740	0,3350	0,2940	0,2210	0,3740	0,3650
	30	101,2390	16,1380	16,2100	0,1110	0,1920	0,1970	0,1460	0,2920	0,2900
	40	100,2670	11,4300	10,9290	0,0850	0,1580	0,1410	0,1170	0,2470	0,2310
	50	100,2650	8,4690	8,9930	0,0700	0,1260	0,1310	0,0940	0,1970	0,1960

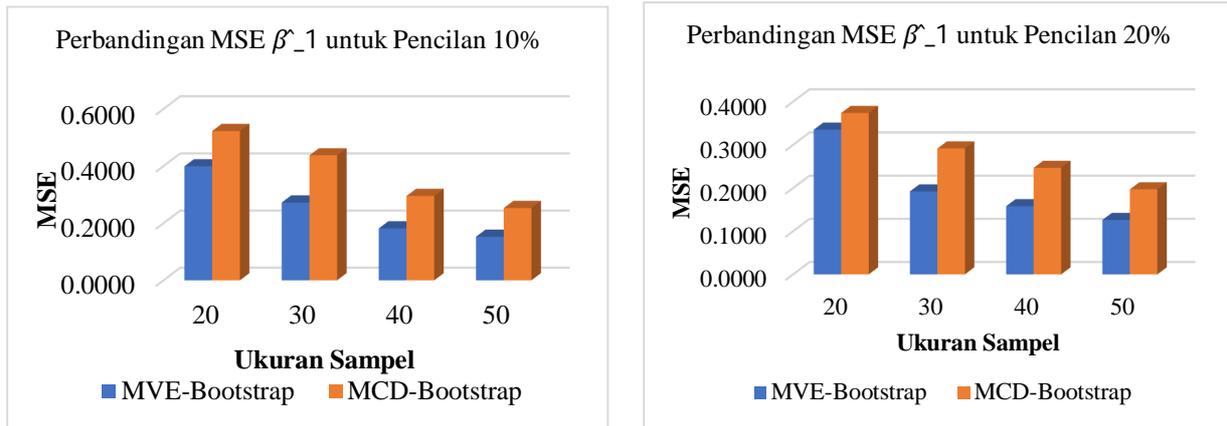
Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai MSE metode MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap lebih kecil dibandingkan MKT, bahkan memiliki selisih yang sangat jauh pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel. Dalam hal ini sekali lagi menunjukkan bahwa MKT tidak dapat menduga parameter regresi secara akurat pada data yang mengandung pencilan, sehingga tidak perlu diperbandingkan lebih jauh dengan hasil pendugaan metode robust MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap. Perbandingan MSE metode MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap dapat dilihat pada gambar berikut.

3.4 Perbandingan MSE pada Setiap Ukuran Sampel dan Persentase Pencilan



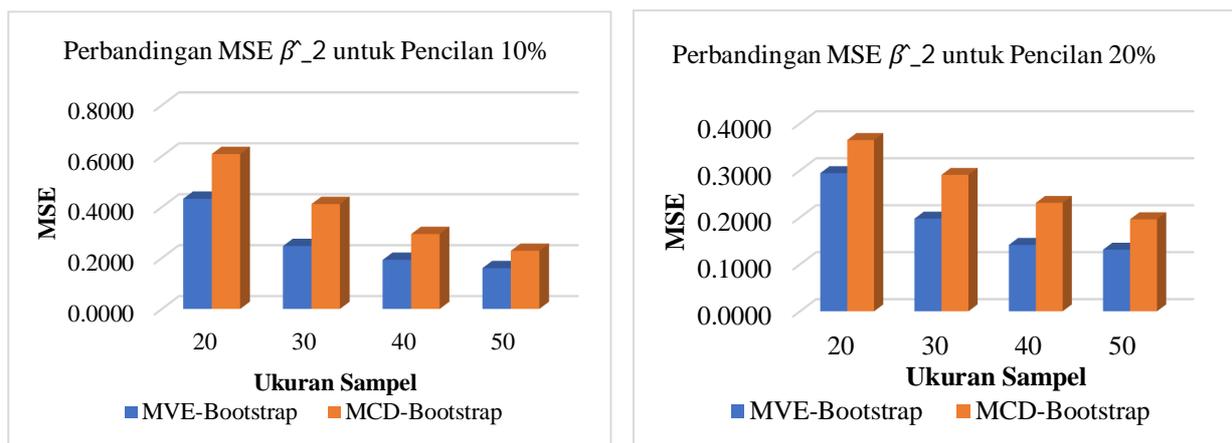
Gambar 4. Perbandingan MSE $\hat{\beta}_0$ metode MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Berdasarkan Gambar 4 dapat jelas terlihat bahwa untuk pendugaan β_0 , metode MVE-Bootstrap menghasilkan MSE yang lebih kecil dibandingkan MCD-Bootstrap pada semua ukuran sampel dan semua persentase pencilan. Selain itu, dapat pula terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel, maka MSE yang dihasilkan oleh kedua metode semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode MVE-Bootstrap dan MCD-Bootstrap bersifat konsisten. Selanjutnya grafik perbandingan MSE $\hat{\beta}_1$ dapat dilihat pada Gambar 5 berikut.



Gambar 5. Perbandingan MSE $\hat{\beta}_1$ metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Seperti halnya dengan pendugaan β_0 , pada pendugaan β_1 metode *MVE-Bootstrap* juga menghasilkan MSE yang lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap* pada semua ukuran sampel, baik data dengan persentase pencilan sebesar 10% maupun 20%. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat bahwa semakin besar ukuran sampel, maka MSE yang dihasilkan oleh kedua metode semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* memiliki sifat konsisten. Adapun grafik perbandingan MSE $\hat{\beta}_2$ diperoleh seperti pada Gambar 6 berikut.



Gambar 6. Perbandingan MSE $\hat{\beta}_2$ metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* pada setiap persentase pencilan dan ukuran sampel.

Dari Gambar 6 dapat dilihat bahwa untuk pendugaan β_2 juga menghasilkan perbandingan MSE yang sama pada pendugaan β_0 dan β_1 . Hal ini ditunjukkan dengan nilai MSE *MVE-Bootstrap* yang lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap*, baik untuk sampel dengan persentase pencilan sebesar 10% maupun 20%. Selain itu, dapat pula terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel, maka MSE yang dihasilkan oleh kedua metode semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode *MVE-Bootstrap* dan *MCD-Bootstrap* konsisten.

Berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang dihasilkan kedua metode, dapat dilihat bahwa nilai MSE *MVE-Bootstrap* jauh lebih kecil dari MSE *MCD-Bootstrap*. Hal ini jelas membuktikan bahwa *MVE-Bootstrap* merupakan penduga yang lebih baik dibandingkan *MCD-Bootstrap* dalam menduga parameter regresi pada data berukuran kecil yang mengandung pencilan.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat diketahui bahwa *MVE-Bootstrap* memiliki nilai bias yang lebih kecil dibandingkan *MCD-Bootstrap* untuk semua ukuran sampel dan persentase pencilan. Selain itu, *mean square error* (MSE) yang dihasilkan oleh *MVE-Bootstrap* juga lebih kecil dari *MCD-Bootstrap* untuk semua ukuran sampel, baik

pada data dengan persentase pencilan 10% maupun 20%. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode MVE-*Bootstrap* lebih baik dibandingkan MCD-*Bootstrap* dalam menduga parameter regresi pada data berukuran kecil yang mengandung pencilan.

5. Daftar Pustaka

- Ardiyanti, H. (2011). Perbandingan Keefektifan Metode Regresi Robust Estimasi-M dan Estimasi-MM karena Pengaruh Outlier dalam Analisis Regresi Linear. Skripsi. Universitas Negeri Semarang.
- Candraningtyas, S., Safitri, D., dan Ispriyanti, D. (2013). Regresi Robust MM-Estimasi untuk Penanganan Pencilan pada Regresi Linier Berganda. *Jurnal Gaussian*, 2(4), 395-404.
- Dayanti, N.P., Suciptawati, N.L., dan Susilawati, M. (2016). Penerapan Bootstrap dalam Metode Minimum Covariance Determinant (MCD) dan Least Median Square (LMS) pada Analisis Regresi Linear Berganda. *E-Jurnal Matematika*, 5(1), 22-26.
- Febrianto, L.S. (2016). Perbandingan Metode Robust Least Median Of Square (LMS) Dan Penduga S untuk Menangani Outlier Pada Regresi Linier Berganda. Skripsi. Universitas Negeri Semarang.
- Ghazali, A., Yuniarti, D., dan Hayati, M.N. (2015). Metode Regresi Robust Dengan Estimasi-M pada Regresi Linier Berganda. *Jurnal Eksponensial*, 6(2), 137-142.
- Gusriani, N., Firdaniza, dan Hertini, E. (2013). Bootstrap pada Analisis Regresi Linier Berganda Berdasarkan Penaksir MCD (pp. 629-633). Bandung, Indonesia: Departemen Matematika, Universitas Padjajaran.
- Haditama, H. (2011). Analisis Regresi Robust pada Data Mengandung Pencilan dengan Metode Least Median Square. Skripsi. Universitas Jember.
- Husna, I. (2015). Perbandingan Regresi Robust Least Median Of Squares (LMS) dan Least Trimmed Squares (LTS) dalam Mengatasi Masalah Pencilan. Skripsi. Universitas Sumatera Utara.
- Kumalasari, N., Suciptawati, N., dan Susilawati, M. (2017). Perbandingan Metode MCD-Bootstrap dan LAD-Bootstrap dalam Mengatasi Pengaruh Pencilan pada Analisis Regresi Linear Berganda. *E-Jurnal Matematika*, 6(1), 47-55.
- Kurniadi, M., Aritonang, M., dan Mara, M.N. (2012). Mendeteksi Outlier dengan Metode Minimum Covariance Determinant. *Bimaster*, 1(1), 31-40.
- Mashitah, Wibowo, A., dan Indriani, D. (2013). Metode Robust Regression on Ordered Statistics (ROS) pada Data Tersensor Kiri dengan Outlier. *Jurnal Biometrika*, 2(2), 148-157.
- Nisa, K. (2006). Analisis Regresi Robust Menggunakan Metode Least Trimmed Square untuk Data Mengandung Pencilan. *Jurnal Ilmiah MIPA*, 9(2), 93-100.
- Notiragayu dan Nisa, K. (2008). Analisis Regresi Komponen Utama Robust untuk Data Mengandung Pencilan. *Jurnal Sains MIPA*, 14(1), 45-50.
- Nurdin, M., Raupong, dan Islamiyati, A. (2014). Penggunaan Regresi Robust pada Data yang Mengandung Pencilan dengan Metode Momen. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, 10(2), 114-123.
- Olive, D.J. (2005). *Applied Robust Statistics*. Carbondale: Southern Illinois University.
- Parmikanti, K., Irianingsih, I., Joebaidi, K., dan Rusyaman. (2016). Menentukan Pusat Elips pada Metode MVE Menggunakan Jarak Robust (pp. 307-310). Jatinangor, Indonesia: Departemen Matematika, Universitas Padjajaran.
- Sembiring, R.K. (2003). *Analisis Regresi*. Ed. ke-2. Bandung: ITB.

- Shodiqin, A., Aini, A.N., dan Rubowo, M.R. (2018). Perbandingan Dua Metode Regresi Robust yakni Metode Least Trimmed Squares (LTS) Dengan Metode Estimator-MM (Estmasi-MM) (Studi Kasus Data Ujian Tulis Masuk Terhadap Hasil IPK Mahasiswa Upgris). *Jurnal Ilmiah Teknosains*, 4(1), 35-42.
- Sungkono, J. (2015). Bootstrap Resampling Observasi pada Estimasi Parameter Regresi Menggunakan Software R. *Magistra*, 27(92), 101-106.
- Wulandari, S., Salam, N., dan Angraini, D. (2010). Perbandingan Metode Robust MCD-LMS, MCD-LTS, MVE-LMS, dan MVE-LTS dalam Analisis Regresi Komponen Utama. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 4(1), 57-64.

Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor

A.S Awalluddin

UIN Sunan Gunung Djati Bandung
Email: aasolih@uinsgd.ac.id

Abstrak

Tulisan ini bertujuan untuk membuat prosedur estimasi untuk menentukan masa hidup minimal dari data tersensor dalam analisis uji keandalan (reliability) dua populasi. Empat buah distribusi data masa hidup dikaji dalam tulisan ini meliputi distribusi Eksponensial, Weibull, Rayleigh, dan Pareto. Efisiensi waktu pengujian akan diperoleh karena dengan mengestimasi masa hidup data tersensor dapat diketahui signifikansi perbedaan dua buah populasi. Eksperimen dilakukan untuk menguji dua buah desain produk (lama dan baru) dari masa hidup baterai. Hasil yang diperoleh berupa taksiran parameter distribusi dan waktu minimal masa hidup data tersensor dari produk desain baru.

Kata kunci: *Data Masa Hidup, Data Tersensor, Penaksiran Kemungkinan Maksimum, Uji Rasio Kemungkinan, Metoda Newton Raphson*

1. Pendahuluan

Dalam inovasi disain produk para peneliti menghendaki bahwa produk yang baru hasilnya bisa lebih baik dibandingkan dengan produk yang lama, salah satu parameternya adalah bahwa produk baru tahan lebih lama atau memiliki keandalan (*reliability*) yang lebih baik dibandingkan dengan disain produk sebelumnya. Umumnya dalam industri untuk membandingkan masa hidup produk tersebut, dilakukan pengukuran ketahanan produk sampai produk tersebut rusak (*fail*), dari masing-masing sampel yang ada. Permasalahan yang muncul adalah dalam melakukan uji perbandingan tersebut, biasanya peneliti memerlukan data hasil pengujian yang lengkap, artinya data masa hidup produk sampai rusak dari masing-masing desain yang ada (disain lama dan baru) tersedia. Hal ini cukup menyulitkan mengingat beberapa masa hidup produk memerlukan penelitian yang cukup lama.

Kendala waktu penelitian untuk menunggu sampai seluruh produk rusak (*fail*), terutama untuk disain baru, menyebabkan penelitian kurang efisien. Diperlukan cara yang lebih efisien dalam penelitian sehingga tanpa harus menunggu seluruh komponen/produk rusak dengan menggunakan data tersensor, tetapi dapat diketahui keandalan produk tersebut dengan mengetahui berapa waktu masa hidup minimal (sebagai data tersensor) yang diperlukan, sehingga dapat membuktikan bahwa disain baru lebih andal. Dengan demikian uji perbandingan keandalan produk dapat menghasilkan kesimpulan tanpa harus menunggu semua produk rusak.

Bentuk distribusi peluang untuk data masa hidup (*life time data*) yang dapat digunakan dalam uji keandalan produk diantaranya distribusi eksponensial, distribusi normal, dan distribusi Weibull. Secara umum seluruh bentuk distribusi peluang kontinu dapat digunakan sebagai pendekatan bentuk distribusi peluang untuk data masa hidup. Analisis statistik untuk menentukan statistik uji yang dapat mengetahui apakah masa hidup produk telah memenuhi kriteria yang diharapkan dalam kondisi data tersensor menjadi fokus utama yang akan dikaji dalam penelitian ini. Seluruh bentuk distribusi peluang data masa hidup akan diekspolrasi, sehingga memberikan banyak alternatif untuk pemecahan masalah lapangan sesuai dengan kondisi data yang ada.

Kajian masalah yang akan dipecahkan dalam tulisan ini meliputi penentuan taksiran parameter distribusi peluang data masa hidup dengan terlebih dahulu menentukan fungsi likelihood untuk setiap bentuk distribusi, baik untuk data lengkap maupun data tersensor. Algoritma penaksiran parameter distribusi peluang data masa hidup ketika taksiran parameter distribusi berbentuk implisit dengan menggunakan metode Newton Raphson. Selanjutnya menentukan waktu minimal sampel penelitian dari data tersensor untuk disain baru, sehingga dapat ditentukan secara signifikan perbedaan antara disain lama dan disain baru. Beberapa kajian dan penelitian dalam analisis data masa hidup dengan beberapa kondisi sudah lakukan untuk data tak lengkap, diantaranya (Dempster, A.P, dkk., 1977) menggunakan algoritma EM dalam menentukan taksiran parameter (Doganaksoy,N., 1991) menggunakan bentuk distribusi Weibull dalam kajian penaksiran waktu minimum data tersensor. Demikian halnya kajian data tersensor tunggal (Doganaksoy,N., 1995) dan distribusi campuran (Titterington, D.M., dkk., 1985) dan (Du, J, 2002). Umumnya penelitian yang digunakan dilakukan dalam satu bentuk distribusi masa hidup dengan satu jenis kondisi data, dengan algoritma yang tidak efisien dan kurang aplikatif.

Tulisan ini membahas sebuah algoritma dan program komputasi dalam menentukan keandalan komponen/produk dari data tersensor dengan berbagai alternatif bentuk distribusi data masa hidup, sehingga memberikan banyak alternatif dalam pengolahan data sesuai dengan data di lapangan. Hasil penelitian ini dapat digunakan dalam pengujian keandalan produk di bidang teknik atau industri, terutama dalam uji perbandingan keandalan desain baru sebagai desain lama, sehingga memberikan manfaat bagi *engineer* dan perusahaan manufaktur dalam melakukan pengujian, sehingga bisa lebih efisien dari segi waktu mengingat hasil uji keandalan dapat diketahui sebelum semua unit rusak, sebagai data tersensor.

2. Fungsi Kemungkinan Data Masa Hidup

Beberapa teori keandalan dengan basis analisis data masa hidup (*life time data*) telah banyak dibahas oleh peneliti, beberapa teori telah lama dibahas dan menjadi rujukan sampai saat ini oleh (Abernethy, R. B., 1996), (Cox, D.R. dan Oakes, D., 1994), (Klein, J.P., Moeschberger, M.L. 1997) dan (Ebeling, C.E., 1997). Referensi tersebut dapat digunakan sebagai kerangka teori yang berkaitan dengan pemecahan permasalahan, meliputi penelaahan dan penganalisisan beberapa karakteristik distribusi masa hidup, dan pembahasan mengenai bentuk dan metoda estimasi parameter distribusi.

Pembentukan rumusan untuk data lengkap dan data tersensor menjadi dasar dalam pembuatan algoritma estimasi parameter yang akan dilakukan, metoda Newton raphson dalam proses iterasi estimasi parameter karena beberapa estimasi parameter dari distribusi akan menghasilkan bentuk estimasi yang implisit. Demikian juga dengan teori simulasi yang akan digunakan untuk membangkitkan data dalam menguji algoritma dan program yang akan dibuat.

Berdasarkan teori fungsi kemungkinan (likelihood), dimana maka dapat ditentukan masing-masing bentuk distribusi masa hidup, yaitu dengan menghitung $L_1 = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ untuk data lengkap dan

$L_2 = \prod_{j=1}^m f(y_j, \theta) R(y^*, \theta)^{(n-m)}$ untuk data tersensor. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah waktu kegagalan masing-masing sampel desain lama sebanyak n buah sampel, dan y_1, y_2, \dots, y_m adalah waktu kegagalan masing-masing sampel desain baru sebanyak m buah sampel, dengan data tersensor y_s sebanyak $n-m$ buah. Dapat ditentukan fungsi kemungkinan untuk masing-masing bentuk distribusi sebagai berikut :

1. Fungsi kemungkinan distribusi eksponensial

$$L_1 = \prod_{i=1}^n \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x_i) = \lambda_1^n \exp\left[\sum_{i=1}^n (-\lambda_1 x_i)\right]$$

$$L_2 = \prod_{j=1}^m \lambda_2 \exp(-\lambda_2 y_j) \exp(-\lambda_2 y^*)^{n-m} = \lambda_2^m \exp\left[\sum_{j=1}^m (-\lambda_2 y_j)\right] \cdot \exp(-\lambda_2 y^*)^{n-m}$$

2. Fungsi kemungkinan distribusi Weibull

$$L_1 = \prod_{i=1}^n \alpha_1 \lambda_1 x_i^{\alpha_1 - 1} \exp(-\lambda_1 x_i^{\alpha_1}) = \alpha_1^n \lambda_1^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_1 - 1} \exp\left[\sum_{i=1}^n (-\lambda_1 x_i^{\alpha_1})\right]$$

$$L_2 = \alpha_2^m \lambda_2^m \prod_{j=1}^m y_j^{\alpha_2 - 1} \exp\left[\sum_{j=1}^m (-\lambda_2 y_j^{\alpha_2})\right] \cdot \exp(-\lambda_2 y^{\alpha_2})^{n-m}$$

3. Fungsi kemungkinan distribusi Rayleigh :

$$L_1 = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\lambda_1^2}\right) = \lambda_1^{-2n} \prod_{i=1}^n x_i \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\lambda_1^2}\right)$$

$$L_2 = \lambda_2^{-2m} \prod_{j=1}^m y_j \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{y_j^2}{2\lambda_2^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{y^*{}^2}{2\lambda_2^2}\right)\right]^{(n-m)}$$

4. Fungsi kemungkinan distribusi Pareto diperoleh :

$$L_1 = \prod_{i=1}^n \alpha_1 \lambda_1^{\alpha_1} x_i^{-(\alpha_1+1)} = \alpha_1^n \lambda_1^{n\alpha_1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha_1+1)}$$

$$L_2 = \prod_{j=1}^m \alpha_2 \lambda_2^{\alpha_2} y_j^{-(\alpha_2+1)} \left(\frac{\lambda_2}{y^*} \right)^{\alpha_2(n-m)}$$

3. Analisis Statistik Uji Keandalan Perbandingan Dua Populasi

Dalam menentukan statistik uji keandalan perbandingan dua sampel penting memperhatikan beberapa kondisi berupa asumsi-asumsi kejadian dan distribusi data yang akan digunakan, menentukan hipotesis dua populasi untuk menguji apakah ada perbedaan signifikan nilai parameter dari kedua populasi, membangun log fungsi kemungkinan untuk menentukan taksiran parameter model dari setiap distribusi yang ditetapkan, dan menentukan uji rasio kemungkinan untuk menentukan kesimpulan dalam uji hipotesis parameter.

A. Asumsi-asumsi

Beberapa asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Waktu kerusakan dari kedua sampel produk (desain lama dan desain baru) adalah sampel acak yang saling bebas (independen), yang memiliki bentuk distribusi masa hidup yang telah ditentukan, yaitu : Eksponensial, Weibull, Rayleigh, dan Pareto
2. Waktu sampel yang tidak rusak (*running time*) dengan desain baru merupakan waktu tersensor, ketika seluruh disain lama rusak
3. Waktu kerusakan saling bebas dengan waktu tersensor ataupun lamanya waktu pengujian.
4. Parameter bentuk kedua sampel diasumsikan sama (untuk distribusi Weibull dan Pareto)
5. Banyaknya sampel yang diujikan untuk dua jenis sampel berbeda (desain lama dan baru) adalah sama.

B. Hipotesis Dua Populasi

Untuk mengetahui apakah kedua populasi desain memiliki perbedaan yang berarti, maka dibandingkan masing-masing adalah parameter skala λ dengan asumsi bahwa skala bentuk α (untuk Weibull dan Pareto) adalah sama dan tidak diketahui, dengan hipotesis adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$$

$$H_a : \lambda_1 \neq \lambda_2$$

H_0 menyatakan tidak ada perbedaan di antara parameter skala kedua desain atau memiliki parameter yang sama dengan λ_0 , artinya kedua populasi memiliki bentuk yang sama, sedangkan H_a adalah sebaliknya.

C. Log Fungsi Kemungkinan Dua Sampel dibawah H_0 dan H_1

Berdasarkan fungsi kemungkinan yang telah dibentuk dalam sub bab III.3, maka dapat ditentukan fungsi kemungkinan di bawah H_0 yaitu $\ell_0 = \ell_1 + \ell_2$ dan H_a yaitu $\ell_a = \ell_1 + \ell_2$ dari kedua sampel untuk masing-masing bentuk distribusi sebagai berikut

1. Distribusi Eksponensial

$$\ell_0 = (n+m) \ln \lambda_0 - \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j + (n-m)y^* \right) \quad (C1)$$

$$\ell_a = \left(n \ln \lambda_1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(m \ln \lambda_2 - \lambda_2 \sum_{j=1}^m y_j - (n-m)\lambda_2 y^* \right) \quad (C2)$$

2. Distribusi Weibull

$$\ell_0 = n \ln \alpha_0 + n \ln \lambda_0 + (\alpha_0 - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0} + m \ln \alpha_0 + m \ln \lambda_0 + (\alpha_0 - 1) \sum_{j=1}^m \ln y_j - \lambda_0 \sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0} - (n-m)\lambda_0 y^{*\alpha_0} \quad (C3)$$

$$\ell_a = (n+m)\ln \alpha_a + n \ln \lambda_1 + (\alpha_a - 1) \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_a} + m \ln \lambda_2 - \lambda_2 \sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_a} - (n-m)\lambda_2 y^{*\alpha_a} \quad (C4)$$

3. Distribusi Rayleigh

$$\ell_0 = -(2n+2m)\ln \lambda_0 + \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) - \frac{1}{2} \lambda_0^{-2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^m y_j^2 + (n-m)y^{*2} \right) \quad (C5)$$

$$\ell_a = -2n \ln \lambda_1 + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2} \lambda_1^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m \ln \lambda_2 + \sum_{j=1}^m \ln y_j - \frac{1}{2} \lambda_2^{-2} \sum_{j=1}^m y_j^2 - (n-m) \frac{y^{*2}}{2\lambda_2^2} \quad (C6)$$

4. Distribusi Pareto

$$\ell_0 = (n+m)\ln \alpha_0 + (n+m)\alpha_0 \ln \lambda_0 - (\alpha_0 + 1) \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) + \alpha_0 (n-m) \ln \left(\frac{\lambda_0}{y^*} \right) \quad (C7)$$

$$\ell_a = (n+m)\ln \alpha_a + n\alpha_a \ln \lambda_1 + m\alpha_a \ln \lambda_2 - (\alpha_a + 1) \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) + \alpha_a (n-m) \ln \left(\frac{\lambda_2}{y^*} \right) \quad (C8)$$

D. Taksiran Parameter

Taksiran masing masing parameter yang ditentukan dengan menggunakan metoda maksimum likelihood, taksiran parameter yang ditentukan berturut-turut adalah taksiran parameter untuk sampel desain lama dan desain baru, juga ditentukan taksiran parameter dibawah H_0 dan H_a . Diperoleh untuk masing-masing distribusi adalah sebagai berikut :

1. Taksiran parameter distribusi Eksponensial

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (D1), \hat{\lambda}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^m y_j + (n-m)y^*} \quad (D2), \hat{\lambda}_0 = \frac{(n+m)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j + (n-m)y^* \right)} \quad (D3)$$

2. Taksiran parameter distribusi Weibull

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n}{\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_1} \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i} \quad (D4), \hat{\lambda}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_1}} \quad (D5),$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{m}{\lambda_2 \left(\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_2} \ln y_j + (n-m)y^{*\alpha_2} \ln y^* \right) - \sum_{j=1}^m \ln y_j} \quad (D6)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_2} + (n-m)y^{*\alpha_2}} \quad (D7)$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{(n+m)}{\left[\lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0} \ln x_i + \sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0} \ln y_j + (n-m)y^{*\alpha_0} \ln y^* \right) - \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) \right]} \quad (D8)$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{(n+m)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0} + \sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0} + (n-m)y^{*\alpha_0} \right)} \quad (D9)$$

$$\hat{\alpha}_a = \frac{(n+m)}{\left[\begin{aligned} & \left[\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_a} \ln x_i + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_a} \ln y_j + (n-m)y^{*\alpha_a} \ln y^* \right) \right] \\ & - \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) \end{aligned} \right]} \quad (D10)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_a} + (n-m)y^{*\alpha_a}} \quad (D11)$$

3. Taksiran parameter distribusi Rayleigh

$$\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}} \quad (D12), \hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m y_j^2 + (n-m)y^{*2}}{2m}} \quad (D13), \hat{\lambda}_0 = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^m y_j^2 + (n-m)y^{*2} \right)}{(2n+2m)}} \quad (D14)$$

4. Taksiran parameter distribusi Pareto

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \lambda_1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\lambda_1}} \quad (D15), \hat{\alpha}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^m \ln y_j - m \ln \lambda_2 - (n-m) \ln \left(\frac{\lambda_2}{y^*} \right)} \quad (D16)$$

dengan $\hat{\lambda}_1 = \min_i x_i$ dan $\hat{\lambda}_2 = \min_j y_j$

(Mukhopadhyay & Ekwo, 1987)

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{(n+m)}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{j=1}^m \ln y_j \right) - (n+m) \ln \lambda_0 - (n-m) \ln \left(\frac{\lambda_0}{y^*} \right)} \quad (D17) \text{ dan } \hat{\lambda}_0 = \min_{ij} \{x_i, y_j\} \quad (D18)$$

E. Uji Rasio Kemungkinan Masalah Penelitian

Statistik uji yang digunakan untuk menentukan daerah kritis penerimaan atau penolakan H_0 adalah dengan menggunakan uji rasio kemungkinan sebagaimana telah dijelaskan dalam subbab II.3.3 dengan menghitung

$\Lambda = \frac{L_0(\hat{\theta}_0)}{L_a(\hat{\theta}_a)}$ dengan pendekatan untuk sampel besar, statistik $-2Ln \Lambda$ mengikuti distribusi Chi-Kuadrat dengan

derajat kebebasan satu dituliskan dengan $\chi_{(1)}^2$. Dengan demikian untuk masalah penelitian dapat dihitung dengan menentukan nilai $T(y_s) = 2(\ell_a - \ell_0)$, dengan nilai T bergantung terhadap data tersensor y_s dari desain baru. Selanjutnya nilai $T(y_s)$ akan dibandingkan dengan titik kritis yang diperoleh dari nilai chi kuadrat $\chi_{((1-\alpha),1)}^2$. Jika nilai $T(y_s)$ lebih besar dari $\chi_{((1-\alpha),1)}^2$, maka dapat dinyatakan cukup signifikan menolak, yang artinya terdapat

perbedaan antar populasi. Selama nilai tersebut belum terpenuhi, maka akan ditentukan nilai y_s minimal sehingga $T(y_s) \geq \chi_{((1-\alpha),1)}^2$.

4. Prosedur Analisis Statistik Uji Keandalan

Prosedur perhitungan yang diuraikan adalah prosedur estimasi parameter distribusi untuk distribusi Eksponensial, Rayleigh, Pareto, dan distribusi Weibull.

A. Prosedur estimasi parameter distribusi

Estimasi parameter dengan persamaan eksplisit untuk distribusi Eksponensial, Rayleigh, Pareto, dan distribusi Weibull.

1. Mulai
2. Tentukan (input) data sampel 1 (x_1, x_2, \dots, x_n)
3. Tentukan (input) data sampel 2 (y_1, y_2, \dots, y_m)
4. Tentukan (input) data tersensor sampel 2 (y^*)
5. Inisialisasi $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{j=1}^m y_j$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{j=1}^m y_j^2$, $\sum_{i=1}^n \ln x_i$, dan $\sum_{j=1}^m \ln y_j$
6. Tentukan taksiran parameter masing-masing distribusi untuk sampel 1, sampel 2, maupun nilai parameter di bawah H_0 dan H_a , yaitu :
 - a. menghitung taksiran parameter Eksponensial dari persamaan (D1), (D2), dan (D3)
 - b. menghitung taksiran parameter Rayleigh dari persamaan (D12), (D13), dan (D14)
 - c. menghitung taksiran parameter Pareto dari persamaan (D15), (D16), (D17) dan (D3)
7. Selesai

Untuk menentukan estimasi parameter distribusi Weibull, dapat ditentukan dengan Metoda Newton Raphson, dengan langkah sebagai berikut :

1. Mulai
2. Tentukan (input) data sampel 1 (x_1, x_2, \dots, x_n)
Tentukan (input) data sampel 2 (y_1, y_2, \dots, y_m)
Tentukan (input) data tersensor sampel 2 (y^*)
3. Inisialisasi $\sum_{i=1}^n \ln x_i$, $\sum_{j=1}^m \ln y_j$, $\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0}$, $\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0}$, $\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0} \ln x_i$, $\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0} \ln y_j$, $\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_0} \ln^2 x_i$,
dan $\sum_{j=1}^m y_j^{\alpha_0} \ln^2 y_j$
4. Tentukan $f(\hat{\alpha}_0)$, $f'(\hat{\alpha}_0)$, $f(\hat{\alpha}_a)$, dan $f'(\hat{\alpha}_a)$
5. Lakukan iterasi dengan metoda newton raphson Hitung taksiran dengan menggunakan metoda Newton Raphson, sebagai berikut :
$$\hat{\alpha}_0^{(p+1)} = \hat{\alpha}_0^{(p)} + \frac{f(\hat{\alpha}_0)}{f'(\hat{\alpha}_0)} \text{ dan } \hat{\alpha}_a^{(p+1)} = \hat{\alpha}_a^{(p)} + \frac{f(\hat{\alpha}_a)}{f'(\hat{\alpha}_a)}$$
6. Uji konvergenitas
$$\left| \hat{\alpha}_0^{(p+1)} - \hat{\alpha}_0^{(p)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \hat{\alpha}_a^{(p+1)} - \hat{\alpha}_a^{(p)} \right| < \varepsilon$$
7. Hitung parameter skala Weibull yaitu persamaan (D5), (D7), dan (D9)
8. Selesai

B. Prosedur menentukan lamanya pengujian masa hidup minimum $y^* = y_s$

1. Mulai
2. Tentukan (input) data sampel 1 (x_1, x_2, \dots, x_n),

3. Tentukan (input) data sampel 2 (y_1, y_2, \dots, y_m)
4. Input data tersensor populasi 2 (y^*)
5. Hitung estimasi parameter untuk setiap distribusi $\hat{\theta}_0 = \{\hat{\lambda}_0, \hat{\alpha}_0\}$ maupun $\hat{\theta}_1 = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_a\}$ seperti dalam prosedur sebelumnya
6. Hitung $\ell_0(\hat{\theta}_0)$ (nilai log-likelihood dibawah H_0) untuk setiap ℓ_0 masing-masing distribusi, yaitu persamaan (C1), (C3), (C5), dan (C7)
7. Hitung $\ell_a(\hat{\theta}_1)$ (nilai log-likelihood dibawah H_a) untuk setiap ℓ_a masing-masing distribusi yaitu persamaan (C2), (C4), (C6), dan (C8)
8. Hitung statistik uji rasio log likelihood $T(y_s) = 2[\ell_a(\hat{\theta}_1) - \ell_0(\hat{\theta}_0)]$
9. Tentukan titik kritis $\chi^2_{(1;1-\alpha)} = C$
10. Periksa apakah $T(y_s) \geq C$, jika tidak kembali ke langkah 4 dengan menentukan y_s yang lebih besar
11. Selesai

5. Data dan Permasalahan

Dua jenis baterai merek tertentu yaitu baterai standar (lama) dan baterai modifikasi (baru) diuji masa hidupnya. Pengujian masa hidup didasarkan pada semakin melemahnya arus listrik yang dialami baterai, sehingga tidak lagi berfungsi dengan baik. Sebuah alat uji untuk menentukan masa hidup kedua jenis baterai tersebut berupa rangkaian elektronik untuk mendukung fungsi alat pengujian telah diproduksi, rangkaian catu daya, rangkaian komparator, juga rangkaian pengaktif disatukan dengan sistem sensor arus untuk mengetahui berkurangnya arus sekaligus mengetahui masa hidup baterai dengan perhitungan konversi terhadap waktu

Setelah setiap sampel baterai ditempatkan kedalam alat uji, dengan masing-masing jenis baterai berjumlah sepuluh buah, kemudian alat dihubungkan dengan lampu sebagai pemakai arus baterai, yang menyebabkan daya baterai digunakan dan sebanding lurus dengan penggunaan arusnya. Untuk menentukan waktu masa hidup alat dihubungkan (*interface*) dengan software untuk mengkonversi berkurangnya arus terhadap waktu. Pencatatan data secara otomatis dilakukan, dan diperoleh hasil sebagaimana terlihat di Tabel 1. Dari hasil uji terlihat bahwa baterai modifikasi jauh memiliki masa hidup yang lebih lama, walaupun demikian dengan data sebenarnya, dapat dihitung waktu tersensor minimal harus hidup (y_s) sehingga dapat dinyatakan bahwa masa hidup baterai modifikasi berbeda secara signifikan dengan baterai standar.

A. Uji Kecocokan Distribusi

Dengan melakukan proses perhitungan, dengan terlebih dahulu melakukan input data untuk desain lama merupakan data lengkap sebanyak $n = 10$, sedangkan untuk data sampel desain baru terdapat 4 buah data masa hidup dan 6 buah data tersensor dengan $y_s = 745.25$. Uji kecocokan kolmogorov dilakukan dengan hasil sebagaimana terlihat pada Tabel 2.

Tabel 1
Hasil Pengujian Dua Desain Baterai

Baterai Standar	Masa hidup (Menit)	Baterai Modifikasi	Masa hidup (Menit)
B1	69.87	B20	531.48
B7	107.13	B16	637.95
B2	129.97	B19	737.83
B8	159.60	B12	740.53
B5	164.73	B11	745.25*
B6	179.82	B18	745.25*
B3	180.75	B15	745.25*
B9	212.32	B17	745.25*
B4	213.47	B14	745.25*
B10	217.88	B13	745.25*

Tabel 2.
Hasil Uji Kecocokan Distribusi

Bentuk Distribusi			
Eksponen	Weibull	Rayleigh	Pareto
Diterima	Diterima	Diterima	Diterima
(p= 0.1080)	(p=0.9249)	(p=0.4074)	(p=0.4644)

Dari hasil uji kecocokan kolmogorov terlihat bahwa pendekatan keempat distribusi dapat dilakuakn untuk menentukan analisis selanjutnya, yaitu menaksir parameter distribusi dan menentukan masa hidup minimal (y_s) dari data tersensor sampel baterai modifikasi.

B. Analisis Hasil Data Penelitian

Selanjutnya dilakukan analisis estimasi parameter dan menentukan masa hidup minimal (y_s) dari data tersensor sampel baterai modifikasi. Tabel 3 memperlihatkan hasil taksiran untuk setiap distribusi berdasarkan hasil perhitungan data sebenarnya.

Tabel 3.
Hasil Taksiran

Distribusi Taksiran	Eksponen	Weibull	Rayleigh	Pareto
y_s min	745.29	745.29	745.29	745.29
T	16.2317	NaN	38.1785	28.0829
λ_0	0.0017	NaN	429.715	69.87
λ_1	0.0063	4.864	115.8837	68.87
λ_2	0.0006	NaN	754.94	531.48
α_0		0.0000		0.4702
α_1		0.0000		1.3127
α_2				1.5792
α_a				1.3846

Dari hasil taksiran terlihat bahwa masa hidup minimal (y_s) untuk setiap distribusi memiliki hasil yang sama, hal ini mudah difahami mengingat data real yang diolah memiliki selisih data masa hidup yang cukup tinggi antara desain lama dan desain baru yang cukup besar, sehingga perbedaan yang sangat signifikan terlihat dari nilai y_s minimal yang dihasilkan, artinya tidak cukup lama uji harus dilakukan untuk menentukan perbedaan dua populasi, yakni dengan $y_s= 249,26$ saja sudah cukup membuktikan dengan derajat signifikansi 5%. Hasil taksiran parameter perlu dicermati lebih jauh, mengingat ada beberapa hasil yang tidak bisa diterima, terutama untuk taksiran distribusi Weibull, mengingat tidak ada nilai yang cukup menjelaskan taksiran parameter. Hasil eksponensial dan pareto cukup memberikan hasil yang rasional, demikian juga dengan taksiran parameter Rayleigh.

6. Simpulan

Prosedur estimasi parameter empat distribusi yaitu distribusi Eksponensial, Pareto, Rayleigh, dan distribusi Weibull untuk kasus perbandingan dua populasi dengan salah satunya memiliki data tersensor telah diuraikan dalam tulisan ini. Prosedur penentuan masa hidup minimal (y_s minimal) dari data tersensor dapat ditentukan untuk efisiensi waktu pengujian sehingga pengujian tidak harus dilakukan sampai seluruh unit rusak (*fail*). Dengan menentukan waktu masa hidup minimal dapat diketahui adanya perbedaan yang signifikan antara kedua populasi. Distribusi Weibull sebenarnya cukup handal untuk uji data masa hidup mengingat distribusi ini dapat memberikan banyak alternatif untuk nilai parameter yang berbeda, walaupun terkadang nilai taksiran cukup sensitif terhadap data untuk menentukan nilai taksiran dengan menggunakan metoda Newton Raphson, tetapi dalam studi kasus yang digunakan belum memberikan hasil yang memuaskan, mengingat taksiran parameter Weibull belum bisa diperoleh dan tidak dapat memberikan informasi dari data sebenarnya dibanding tiga distribusi lainnya.

7. Daftar Pustaka

- Abernethy, R. B. (1996) *The New Weibull Handbook*, John Wiley & Sons, New York
- Cox, D. R., Oakes, D. (1994), *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, London
- Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B.(1977), *Maximum Likelihood from Incomplete Data via EM Algorithm.*, J.R Statists.Soc., B39, 1-38
- Doganaksoy, N (1991). Interval Estimation from Censored and Masked System Failure Data, IEEE Transactions on Reliability, Vol.40, No.3, 280-286
- Doganaksoy, N. (1995), *Determining the Duration Life Test Before All Units Fail*, IEEE Transactions on Reliability, Vol.44, No.1, 26-30
- Du, J. (2002), *Combined Algorithms for Constrained Estimation of finite Mixture Distributions With Grouped Data and Conditional Data*, Thesis Master of Science, McMaster University Hamilton, Ontario, 1-12, 24-29
- Ebeling, C. E. (1997), *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*, McGraw Hill International Inc, New York, 58-65, 392-401
- Klein, J.P., Moeschberger, M.L. (1997), *Survival Analysis : Techniques for Censored and Truncated Data*, Springer-VerlagNewyork, Inc, 36-49
- Titerington, D.M, Smith, A.F.M, Makov, U.E (1985), *Statistical Analysis of Finite mixture Distribution*, John Wiley & Sons, New york

INTERAKSI INFLASI DAN JUMLAH UANG BEREDAR DI INDONESIA DENGAN MODEL BIVARIATE VECTOR AUTOREGRESSIVE

K. Nurika Damayanti^{1*}

¹⁾ Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung
Jl. Basuki Rahmat No.54 Bandar Lampung 35215
Penulis Korespondensi : nurika@bps.go.id

Abstrak

Jumlah uang beredar dan Inflasi adalah dua diantara sekian banyak variabel ekonomi makro yang paling banyak memiliki peran dalam aktivitas perekonomian suatu negara, tidak terkecuali dalam perekonomian Indonesia. Secara teori, Irving Fisher dan Keynes memiliki pendapat yang berbeda mengenai hubungan antara inflasi dan jumlah uang beredar. Penelitian ini akan menganalisis pola hubungan diantara kedua variabel tersebut melalui metode data deret waktu Vector Autoregressive (VAR). Berdasarkan hasil penelitian, hubungan antara inflasi dan jumlah uang beredar sejalan dengan teori Irving Fisher maupun teori Keynes. Kedua variabel signifikan saling mempengaruhi namun dengan kecepatan pengaruh yang berbeda. Model yang terpilih adalah model VAR(1). Peningkatan pertumbuhan uang beredar akan direspon dengan meningkatnya inflasi. Sedangkan kenaikan tingkat inflasi akan direspon dengan melambatnya pertumbuhan jumlah uang beredar. Namun respon yang diterima oleh inflasi maupun pertumbuhan uang beredar tidak bersifat permanen. Peningkatan pertumbuhan jumlah uang beredar berdampak positif terhadap laju inflasi selama 5 bulan. Sedangkan peningkatan laju inflasi berdampak negatif terhadap pertumbuhan jumlah uang beredar selama 5 bulan.

Kata kunci: *Ekonomi Makro; Inflasi; Time series; Uang Beredar; Vector Autoregressive*

1. Pendahuluan

Kestabilan perekonomian suatu negara akan selalu menjadi prioritas yang ingin dicapai, karena dengan stabilitas ekonomi akan menciptakan suasana kondusif dalam kegiatan perekonomian. Salah satu ukuran dari kestabilan perekonomian dapat dilihat melalui laju inflasi yang mencerminkan perubahan tingkat harga barang dan jasa. Bank Indonesia melalui kebijakan moneter yang ditempuh selalu menjadikan inflasi sebagai target untuk mencapai pertumbuhan ekonomi dan nilai rupiah yang stabil. Salah satu cara yang ditempuh adalah melalui pengendalian jumlah uang beredar. Selama ini kebijakan pengendalian uang beredar dan pengendalian tingkat inflasi menjadi kebijakan prioritas Bank Indonesia. Hal ini menunjukkan bahwa kedua variabel tersebut memang memiliki dampak yang sangat penting bagi perjalanan perekonomian Indonesia.

Boediono (1995) mendefinisikan inflasi sebagai kecenderungan dari harga-harga untuk naik secara umum dan terus-menerus. Inflasi juga diartikan sebagai suatu keadaan yang mengindikasikan semakin melemahnya daya beli yang diikuti dengan semakin merosotnya nilai riil (intrinsik) mata uang suatu negara (Tajul, 2000). Inflasi dalam perekonomian disatu sisi selalu menjadi hal yang relatif menakutkan, karena inflasi dapat melemahkan daya beli dan dapat melumpuhkan kemampuan produksi yang mengarah pada krisis produksi dan konsumsi. Akan tetapi, disisi lain ketiadaan inflasi menandakan tidak adanya pergerakan positif dalam perekonomian karena relatif harga-harga tidak berubah dan kondisi ini dapat melemahkan sektor industri.

Kegiatan perekonomian suatu negara sendiri tidak terlepas dari aktivitas pembayaran uang. Hal ini menyangkut dengan jumlah uang beredar. Perubahan dalam jumlah uang beredar akan berpengaruh dengan kegiatan perekonomian diberbagai sektor. Jumlah uang beredar (*money supply*) sendiri dapat diartikan sebagai jumlah uang yang beredar dalam sebuah perekonomian. Uang adalah benda yang disetujui oleh masyarakat sebagai alat perantara untuk mengadakan pertukaran atau perdagangan dalam masyarakat (Sukirno, 2006). Dengan kata lain, uang adalah alat yang dikatakan sah dan disetujui sebagai alat yang digunakan dalam melakukan pertukaran baik barang maupun jasa.

Berdasarkan peranannya, jumlah uang beredar dan inflasi adalah dua diantara sekian banyak variabel ekonomi makro yang paling banyak memiliki peran dalam aktivitas perekonomian. Jumlah uang beredar memiliki peran sebagai alat transaksi penggerak perekonomian. Besar kecilnya uang beredar akan mempengaruhi daya beli riil masyarakat dan juga tersedianya komoditi yang dibutuhkan masyarakat. Sementara inflasi berdampak pada nilai riil kekayaan masyarakat, dan juga kemampuan sisi penawaran dalam menyediakan komoditi.

Hubungan inflasi dan jumlah uang beredar tergambar dalam teori yang dikemukakan oleh Irving Fisher dan Keynes. Namun Irving Fisher dan Keynes memiliki pendapat yang berbeda mengenai hubungan antara inflasi dan jumlah uang yang beredar. Bila merujuk teori inflasi milik Irving Fisher, inflasi (peningkatan harga) akan terjadi jika disebabkan oleh adanya penambahan jumlah uang yang beredar di masyarakat. Sedangkan J.M. Keynes melalui pendekatan tingkat harga dan kurva IS-LM berpendapat bahwa secara umum inflasi akan berpengaruh terhadap pendapatan nasional dari suatu negara melalui pengaruh terhadap *real money supply* dalam negara tersebut dan meningkatkan jumlah uang yang beredar. Sehingga dapat dikatakan jika tingkat harga akan mempengaruhi jumlah uang beredar di masyarakat.

Berdasarkan hal yang telah dikemukakan sebelumnya maka penelitian ini akan menganalisis pola hubungan yang terjadi antara inflasi dan jumlah uang beredar. Metode analisis yang dipilih adalah data deret waktu *Vector Autoregressive* (VAR). Menurut Enders (2004), model VAR merupakan sistem persamaan dinamis yang digunakan untuk menguji hubungan antara variabel-variabel dengan menggunakan asumsi minimal atas strukturnya. VAR menjelaskan bahwa setiap variabel yang ada dalam model tergantung pada pergerakan masa lalu dari variabel itu sendiri dan juga pergerakan masa lalu seluruh variabel lainnya yang ada dalam sistem.

Teori Hubungan Inflasi dan Jumlah Uang Beredar

Teori Kuantitas Uang

Teori permintaan uang yang dikembangkan atas dasar pemikiran aliran klasik atau lebih dikenal dengan Teori Kuantitas Uang menjelaskan peranan uang terhadap perekonomian secara umum yang pertama kali dijelaskan oleh Irving Fisher pada tahun 1911 melalui *The Quantity Theory of Money* yang termuat dalam bukunya berjudul *The Purchasing Power of Money*. Teori ini berpandangan bahwa terdapat hubungan langsung antara pertumbuhan jumlah uang beredar dengan kenaikan harga-harga umum (inflasi) dan pertumbuhan jumlah uang beredar merupakan penyebab utama inflasi. Penjelasan ini relevan dengan pandangan *monetarist* (Milton Friedman) bahwa inflasi, dimana dan kapanpun terjadinya, selalu merupakan sebuah fenomena moneter.

Teori kuantitas uang menggambarkan kerangka yang jelas mengenai hubungan langsung yang sistematis antara pertumbuhan jumlah uang beredar dan inflasi. Analisis Fisher dalam teori ini mengacu pada persamaan pertukaran (*equation of exchange*) yang dirumuskan sebagai :

$$MV = PT$$

Dimana:

M = *Money in circulation* (jumlah uang yang beredar)

V = perputaran uang dalam satu periode biasanya satu tahun

P = harga barang dan jasa

T = volume transaksi

Teori Keynes

J.M Keynes melihat bahwa perubahan tingkat harga berpengaruh terhadap tingkat pendapatan nasional *equilibrium* melalui pengaruhnya terhadap *real money supply*, yang dapat pula disebut jumlah penawaran uang nyata. Dalam keadaan deflasi, yaitu di mana tingkat harga mengalami penurunan, nilai riil jumlah uang beredar akan mengalami peningkatan. Dengan jumlah uang yang nilai nominalnya sama dalam arti tidak berubah, menurunnya tingkat harga dengan lima puluh persen, misalnya mengakibatkan meningkatnya *real money supply* menjadi dua kali jumlah semula. Sebaliknya, sebagai akibat adanya inflasi, dengan *nominal money supply* yang sama dihasilkan *real money supply* yang lebih sedikit daripada sebelumnya (Reksoprayitno, 2009).

2. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah inflasi dan jumlah uang beredar. Data yang digunakan merupakan data *time series* bulanan periode Januari 2006 hingga Maret 2015. Data tersebut diperoleh dari Bank Indonesia yang diunduh melalui website www.bi.go.id. Variabel jumlah uang beredar yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah uang beredar dalam arti luas (M2) dan dinyatakan dalam pertumbuhan.

Bentuk fungsi dari interdependensi inflasi dan jumlah uang beredar dalam analisis model *Vector Autoregressive* (VAR) terdiri atas dua persamaan sebagai berikut :

$$INF_t = \alpha_1 + \sum_{j=1}^k \beta_{1j} INF_{t-j} + \sum_{j=1}^k \gamma_{1j} JUB_{t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$JUB_t = \alpha_2 + \sum_{j=1}^k \beta_{2j} JUB_{t-j} + \sum_{j=1}^k \gamma_{2j} INF_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

Di mana:

INF : Inflasi(%)

JUB : Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar (%)

t = bulan ; j = jumlah lag (kelambanan) kuartal yang dipilih berdasarkan estimasi terbaik.

$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ merupakan proses *white noise* (independen terhadap perilaku historis INF dan JUB).

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Eksplorasi Data

Jumlah uang beredar dan Inflasi adalah dua diantara sekian banyak variabel ekonomi makro yang paling banyak memiliki peran dalam aktivitas perekonomian suatu negara, tak terkecuali perekonomian Indonesia.

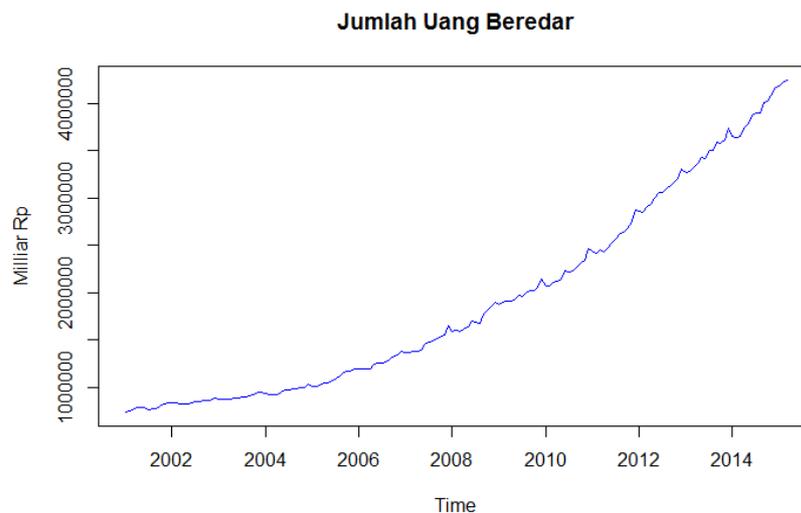
Tabel 1. Inflasi Indonesia Menurut Komoditi Tahun 2001-2014

Inflasi Year on Year	Tahun													
	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Bahan Makanan	12.03	9.13	-1.72	6.38	13.91	12.94	11.26	16.35	3.88	15.64	3.64	5.68	11.35	10.57
Makanan Jadi, Minuman, Rokok dan Tembakau	14.48	9.18	6.24	4.85	13.71	6.36	6.41	12.53	7.81	6.96	4.51	6.11	7.45	8.11
Perumahan, Air, Listrik, Gas, dan Bahan Bakar	13.59	12.71	9.21	7.40	13.94	4.83	4.88	10.92	1.83	4.08	3.47	3.35	6.22	7.36
Sandang	8.14	2.69	7.09	4.87	6.92	6.84	8.42	7.33	6.00	6.51	7.57	4.67	0.52	3.08
Kesehatan	8.92	5.63	5.67	4.75	6.13	5.87	4.31	7.96	3.89	2.91	4.26	2.91	3.70	5.71
Pendidikan, Rekreasi, dan Olahraga	11.90	10.85	11.71	10.31	8.24	8.13	8.83	6.66	3.89	3.29	5.16	4.21	3.91	4.44
Transpor, Komunikasi, dan Jasa Keuangan	14.16	15.52	4.10	5.84	44.75	1.02	1.25	7.49	-3.67	2.69	1.92	2.20	15.36	12.14
Umum	12.55	10.03	5.06	6.40	17.11	6.60	6.59	11.06	2.78	6.96	3.79	4.30	8.38	8.36

Sumber: Badan Pusat Statistik

Dengan mengamati data *time series* inflasi di Indonesia (2001-2014) dapat diketahui sepanjang tahun 2001-2014 Indonesia pernah mengalami empat kali inflasi umum yang mencapai 2 digit yaitu tahun 2001, 2002, 2005, dan 2008. Inflasi tahun 2001 mencapai 12,55 persen, pada tahun 2002 inflasi mencapai 10,03 persen. Inflasi tertinggi pada periode tersebut yaitu terjadi ditahun 2005 yang mencapai 17,11 persen, namun tetap menjadi stimulator perekonomian Indonesia.

Banyak faktor yang memicu terjadinya peningkatan inflasi di Indonesia. Inflasi yang terjadi pada tahun-tahun yang disebutkan tersebut merupakan inflasi yang terjadi diakibatkan oleh faktor *administered price*, khususnya pada harga bahan bakar minyak. Contoh yang terjadi pada inflasi tahun 2005 mengakibatkan peningkatan pada kelompok transportasi, komunikasi dan jasa keuangan yang mencapai 44,75 persen. Pada tahun 2005 terjadi kenaikan harga minyak dunia dari 25 *US\$/barrel* menjadi 60 *US\$/barrel* dan mengakibatkan peningkatan pada beban subsidi bahan bakar Indonesia. Pada bulan Maret dan Oktober diambil kebijakan menaikkan harga bahan bakar minyak untuk mengurangi beban subsidi negara. Untuk semua jenis bahan bakar pada bulan Maret kenaikan mencapai rata-rata 32 persen dan pada bulan Oktober kenaikan mencapai 87 persen untuk jenis premium dan 105 persen untuk jenis solar. Peningkatan harga bahan bakar minyak yang tergolong kelompok transport dan komunikasi, dan jasa keuangan yang terjadi khusus di Indonesia, sering menimbulkan efek domino terhadap peningkatan harga komoditi pada kelompok lain, contohnya pada kelompok bahan makanan dan kelompok perumahan, air listrik, gas dan bahan bakar. Efeknya yaitu peningkatan harga bahan makanan seperti cabai dan bawang, peningkatan tarif dasar listrik dan air untuk mengurangi beban produksi, serta diikuti peningkatan tarif angkutan umum untuk mengurangi beban biaya bahan bakar.



Gambar 1. Pergerakan Jumlah Uang Beredar di Indonesia Periode 2001-2014

Disisi lain juga terjadi peningkatan jumlah uang beredar di tengah masyarakat. Gambar 1 menunjukkan posisi dari jumlah uang yang beredar di Indonesia. Terlihat bahwa jumlah uang beredar bergerak berfluktuatif dengan trend menaik dari tahun ke tahun. Posisi jumlah uang yang beredar di masyarakat selama lebih dari satu dekade mengalami peningkatan yang signifikan. Jumlah uang yang beredar tahun 2001 tercatat sebesar 844.053 milyar rupiah selanjutnya terus bertambah hingga tahun 2014 jumlah uang yang beredar telah menyentuh nilai sebesar 3.861.659 milyar rupiah. Sementara laju pertumbuhan uang beredar pertahunnya secara rata-rata adalah sebesar 13,15 %.

Perubahan jumlah uang beredar ini dapat menjadi cermin jika telah terjadi peningkatan harga jika didasarkan kepada teori Irving Fisher. Jumlah uang beredar yang ada di tangan masyarakat harus berkembang secara wajar. Hal ini tentunya akan memberikan pengaruh positif terhadap perekonomian, namun perkembangan yang terlalu meningkat tajam akan dapat memicu inflasi yang tentunya memberikan pengaruh negatif terhadap pertumbuhan perekonomian suatu negara. Untuk melihat pola hubungan antara inflasi dan jumlah uang beredar secara statistik akan dilakukan melalui metode *time series Vector Autoregressive (VAR)*.

Sebelum dilakukan analisis *time series*, terlebih dahulu melihat karakteristik variabel pengamatan dengan menggunakan statistika deskriptif. Hasil statistika deskriptif dapat dilihat pada Tabel 2

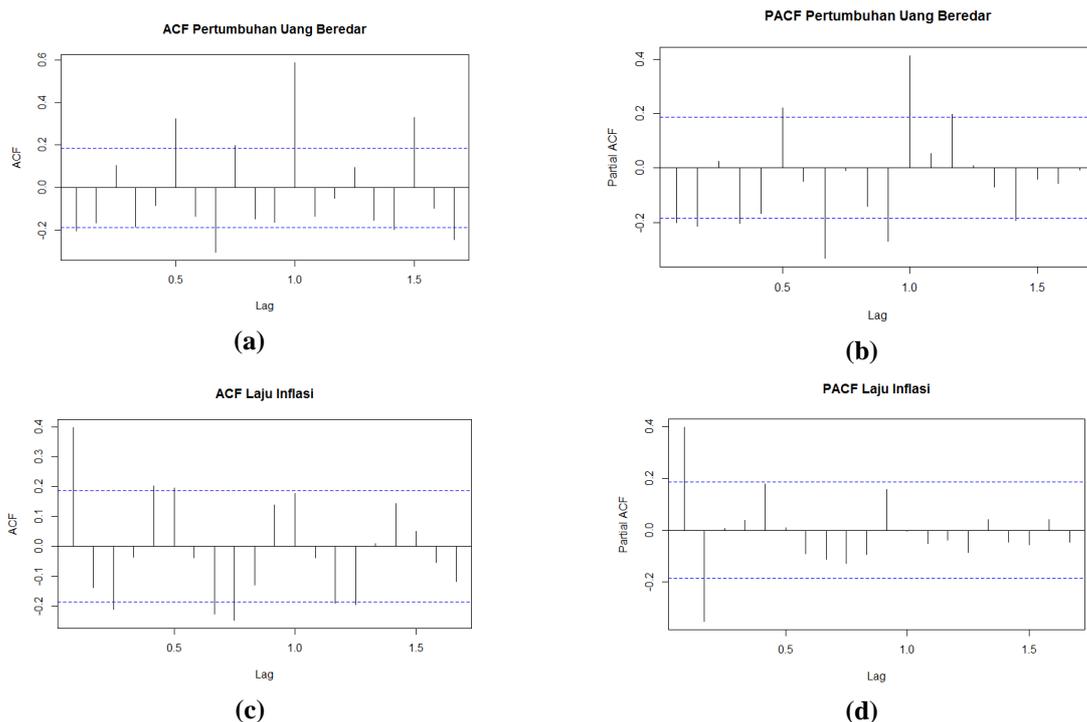
Tabel 2. Statistik Deskriptif Variabel Pengamatan

Variabel	Inflasi	Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar
Data	111	111
Mean	0.5156	1.16
Standar Deviasi	1.62	0.59
Minimum	-0.36	-3.22
Maksimu	3.29	5.78

Berdasarkan korelasi Pearson, keeratan hubungan antara inflasi dan jumlah uang beredar adalah sebesar 34%. Secara deskriptif, selama periode penelitian, nilai minimum untuk inflasi bulanan adalah -0,36% dan -3,22% untuk pertumbuhan jumlah uang beredar. Sementara nilai maksimum yang dicapai masing-masing adalah 3,29% dan 5,78% untuk inflasi dan jumlah uang beredar. Laju inflasi memiliki rata-rata sebesar 0,52% dengan standar deviasi sebesar 1,62. Sementara pertumbuhan jumlah uang beredar memiliki rata-rata yang lebih tinggi yakni sebesar 1,16% dengan standar deviasi sebesar 0,59.

3.2 Model VAR

Pendekatan analisis VAR dapat menjelaskan perilaku dinamis antar variabel yang diamati serta adanya interdependensi. Di sisi lain, VAR diharapkan menghilangkan problem simultanitas antar dua atau lebih variabel endogen. Langkah pertama dalam analisis model VAR, adalah pengujian stasioneritas masing-masing variabel endogen. Suatu data dikatakan stasioner jika nilai rata-rata (*means*) dan variannya untuk berbagai lag yang berbeda nilainya adalah konstan sepanjang waktu. Kestasioneran terhadap *means* dapat dilihat dari plot korelasi diri (ACF) dan plot korelasi diri parsial (PACF). Hasil plot ACF dan PACF terdapat pada Gambar 2.



Gambar 2. (a)ACF Data Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar, (b)PACF Data Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar, (c)ACF Data Laju Inflasi dan (d) PACF Data Laju Inflasi

Pada plot ACF dan PACF kedua variabel menunjukkan pola garis tegak yang masih dalam batas toleransi sehingga bisa disimpulkan bahwa kedua variabel pengamatan telah stasioner dalam *means*. Data variabel inflasi dan pertumbuhan jumlah uang beredar stasioner pada level. Sudah stasionernya variabel yang akan digunakan dalam model VAR, sehingga model VAR yang digunakan termasuk kedalam VAR *in level* (model VAR *unrestricted*).

Setelah melakukan uji stasioneritas, maka tahapan analisis model VAR selanjutnya adalah menentukan *lag* optimal yang akan digunakan dalam estimasi VAR. Penentuan panjang *lag* dimanfaatkan

untuk mengetahui lamanya periode respon suatu variabel terhadap variabel masa lalunya dan terhadap variabel endogen lainnya dan untuk menghindari adanya autokorelasi pada model. Penentuan lag optimal dalam penelitian ini berdasarkan kriteria nilai *Swartz Criterion (SC)*. Besarnya lag yang dipilih adalah lag yang menghasilkan nilai SC paling kecil. Hasil penentuan lag dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil Uji Panjang Lag Optimum

Lag	SC
0	5.749817
1	5.542446*
2	5.572194
3	5.725068
4	5.792289
5	5.853140

Keterangan: *Lag Optimal yang disarankan

Berdasarkan hasil uji, nilai SC terkecil tercapai pada pada lag ke-1. Sehingga mengindikasikan bahwa model VAR yang digunakan adalah model VAR ordo ke-1. Penggunaan ordo 1 ini juga dapat diartikan bahwa kedua variabel pengamatan saling mempengaruhi satu sama lain bukan saja pada periode yang sama namun variabel-variabel tersebut saling terkait satu periode sebelumnya.

Tahapan selanjutnya adalah melakukan uji *Bivariate Granger Causality*. Uji kausalitas granger bertujuan untuk melihat pengaruh masa lalu dari suatu variabel terhadap kondisi variabel lain pada masa sekarang. Dengan kata lain, uji kausalitas Granger dapat digunakan untuk melihat apakah peramalan suatu variabel dapat lebih akurat dengan memasukan lag variabel lain. Tabel berikut menyajikan hasil analisis uji *Bivariate Granger Causality*.

Tabel 4. Hasil Uji Causality Grangers

Hipotesis Null	F-Stat	P-Value
JUB do not Granger-Cause INF	7.2852	0.00751*
INF do not Granger-Cause JUB	5.5479	0.02041*

Keterangan: *stasioner pada Taraf Alpha 5%

Hasil uji kausalitas granger dengan tingkat signifikansi 5% mengindikasikan bahwa pola hubungan antar variabel inflasi dan pertumbuhan jumlah uang beredar memiliki hubungan kausalitas atau dengan kata lain informasi masa lalu pertumbuhan jumlah uang beredar dapat memberikan kontribusi dalam memprediksi variabel inflasi hari ini, begitu pula sebaliknya. Hasil ini sejalan dengan teori kuantitas uang yang dikemukakan oleh Irving Fisher maupun Keynes.

Hasil pengujian yang telah diuraikan sebelumnya menunjukkan bahwa model yang dapat digunakan sesuai dengan data adalah model VAR dengan ordo $p=1$. Model VAR yang terbentuk memiliki dua persamaan parsial yaitu INF dan JUB yang masing-masing memiliki 3 parameter termasuk intersep. Pada tahap ini akan dicari estimasi model VAR(1). Adapun metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode *Ordinary Least Square (OLS)*. Kemudian untuk menguji tingkat signifikansi parameternya digunakan pengujian secara serentak dengan uji-F dan secara parsial dengan uji-t.

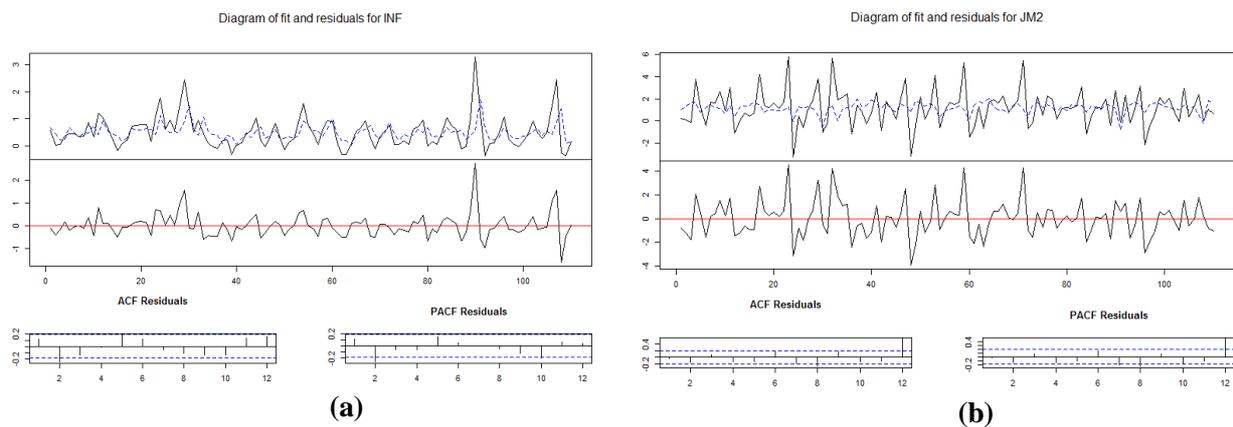
Tabel 5. Hasil Estimasi Model VAR(1)

Persamaan	Variabel	Koefisien	P-value (Parsial)	F-value	P-value (Simultan)
INF	c	0.20797	0.00643*	14.790	0.02806*
	INF _{t-1}	0.39133	1.14E-05*		
	JUB _{t-1}	0.08357	0.00808*		
JUB	c	1.70171	8.79e-12*	5.148	0.00733*
	JUB _{t-1}	-0.19304	0.0381*		
	INF _{t-1}	-0.58931	0.0213*		

Keterangan: *Signifikan pada alpha 5%

Secara simultan (uji-F) maupun parsial (uji-t), kedua persamaan signifikan pada tingkat signifikansi 5%. Hasil estimasi menunjukkan bahwa laju inflasi dapat dijelaskan oleh laju inflasi sendiri dan pertumbuhan jumlah uang beredar. Laju inflasi dipengaruhi secara positif oleh laju inflasi satu periode sebelumnya dan pertumbuhan jumlah uang beredar juga pada satu periode sebelumnya. Tanda positif pada koefisien pertumbuhan jumlah uang beredar, menunjukkan bahwa meningkatnya jumlah uang beredar akan direspon dengan meningkatnya inflasi.

Sementara itu, pertumbuhan jumlah uang beredar juga dipengaruhi oleh pertumbuhan jumlah uang beredar sendiri dan laju inflasi untuk satu periode sebelumnya. Laju inflasi memiliki koefisien negatif pada persamaan kedua yang menunjukkan bahwa kenaikan tingkat inflasi periode sebelumnya akan direspon dengan melambatnya pertumbuhan jumlah uang beredar. Plot dari model yang terbentuk dan plot residual masing-masing persamaan dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Diagram of Fit and Residuals (a)Persamaan INF (b)Persamaan JUB

Diagnostik Model

Uji kebaikan model (diagnostik model) perlu dilakukan untuk mengetahui kelayakan model. Diagnostik model yang dilakukan adalah pemeriksaan asumsi residual. Model dinyatakan layak jika antar residual saling bebas, ragam residual homogen dan residual mengikuti sebaran normal. Berdasarkan gambar 3, plot residual persamaan INF dan JUB terlihat memiliki pola yang acak. Uji autokorelasi residual atau pengujian *multivariate white noise* melalui uji Portmanteau, dari output R diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 6. Hasil Uji Portmanteau Model VAR(1)

Lag	Q-Stat	P-value
2	13.29488	0.0090
3	16.79063	0.0290
4	25.46348	0.0104
5	36.17997	0.0019
6	42.01042	0.0018
7	51.14244	0.0005
8	63.76001	0.0001
9	71.18726	0.0000
10	75.74803	0.0000
11	79.36688	0.0001
12	114.6614	0.0000

Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$, keputusannya tolak H_0 jika $p\text{-value} < 0,05$. Berdasarkan tabel 6 dapat diketahui bahwa semua lag mempunyai $p\text{-value} < 0,05$ sehingga keputusannya tolak H_0 atau dengan kata lain model VAR(1) belum memenuhi syarat *multivariate white noise*.

Tabel 7. Hasil Uji Jarque Berra

	Persamaan	Stat-F	Prob
Univariate	INF	268,44	0,0000
	JUB	9,86	0.0072
Multivariate		226,5585	0,0000

Dari hasil uji Jarque Berra secara *multivariate* diperoleh nilai Statistik Chi-Square sebesar 226,5585 dengan *probability chi-square* sebesar 0,000. Nilai *probability chi-square* yang lebih kecil dari $\alpha = 5\%$ dapat disimpulkan bahwa residual tidak berdistribusi normal *multivariate*. Pengujian secara *univariate* diperoleh kesimpulan yang sama.

Tahapan selanjutnya adalah menguji homogenitas residual dan hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut

Tabel 8. Hasil Uji ARCH-LM

	Persamaan	Stat-F	Prob
Univariate	INF	2,92	0,0904
	JUB	0,68	0.4100
	Persamaan	Chisquare	Prob
Multivariate		58,7374	0.08209

Berdasarkan uji *Lagrange Multiplier*, nilai *probability* yang lebih besar dari $\alpha = 5\%$ memberi keputusan Tolak H_0 , sehingga dapat disimpulkan bahwa residual bersifat homogen. Pengujian secara *univariate* menghasilkan kesimpulan yang sama dengan pengujian secara *multivariate*.

Hasil diagnostik model terhadap residual menunjukkan bahwa model model VAR(1) telah memenuhi asumsi *white noise* dan homogenitas residual, namun belum memenuhi asumsi residual berdistribusi normal. Selanjutnya akan dilihat kebaikan model VAR(1) melalui nilai R^2 dan $Adj R^2$ yang dirangkum pada Tabel 9

Tabel 9. Nilai R^2 dan $Adj R^2$ Model VAR(1)

Persamaan	R^2	$Adj R^2$
INF	0.2950	0.2679
JUB	0.1155	0.0814

Nilai R^2 dan $Adj R^2$ tiap persamaan parsial model VAR (1) cenderung kecil. Hal ini menunjukkan bahwa keragaman model masing-masing persamaan parsial belum dapat dijelaskan oleh peubah JUB dan INF secara bersama-sama, terdapat faktor lain di luar model yang lebih berpengaruh pada periode penelitian tersebut.

Selanjutnya adalah melakukan pengujian stabilitas, yang berupa *roots of characteristic polynomial* terhadap seluruh variabel yang digunakan dikalikan jumlah *lag* dari masing-masing VAR, merupakan syarat yang harus dipenuhi dalam model dinamik seperti VAR, karena apabila didapatkan model VAR yang tidak stabil, analisis *Impulse Response Function* (IRF) dan *Forecast Error Variance Decomposition* (FEVD) menjadi tidak valid. Suatu sistem VAR dikatakan stabil jika seluruh akar atau *roots*-nya memiliki modulus lebih kecil dari satu atau berada dalam unit circle. Hasil uji stabilitas model pada lag 1 dapat dilihat pada Tabel 10

Tabel 10. Hasil Uji Stabilitas Model VAR(1)

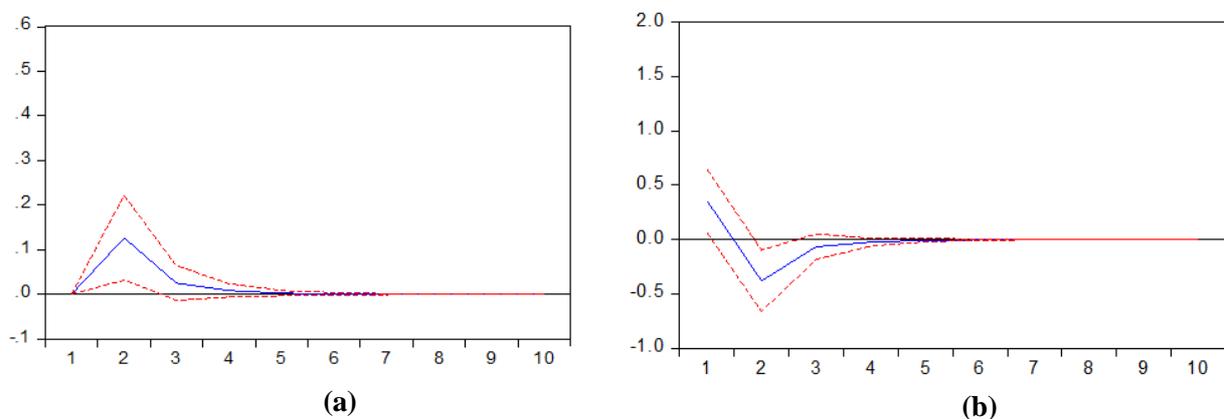
Root	Modulus
0.289206	0.289206
-0.090924	0.090924

Pada penelitian ini, berdasarkan uji stabilitas VAR dapat disimpulkan bahwa estimasi stabilitas VAR yang akan digunakan untuk analisis IRF dan FEVD telah stabil karena kisaran modulus ada diantara

$(0.09 - 0.30) < 1$ atau dengan kata lain model VAR(1) untuk data inflasi dan pertumbuhan jumlah uang beredar bersifat stasioner.

Analisis *Impulse Response Function*

Impulse Responses Function (IRF) adalah perangkat model VAR yang digunakan untuk menjelaskan respon sebuah variabel endogen jika mendapatkan guncangan (*shock*) variabel lainnya sebesar satu standar deviasi. *IRF* berfungsi mengukur besaran (perubahan dalam persen), orientasi (meningkat atau menurun) dan panjang (seberapa lama *shock* mempengaruhi variabel-variabel domestik). Estimasi terhadap fungsi *impulse response* menggunakan asumsi masing-masing variabel inovasi tidak berkorelasi satu sama lain sehingga penelusuran pengaruh suatu kejutan dapat bersifat langsung. Gambar *impulse response* akan menunjukkan respon suatu variabel akibat kejutan variabel lainnya sampai dengan beberapa periode setelah terjadi *shock*. Jika gambar *impulse response* menunjukkan pergerakan yang semakin mendekati titik keseimbangan (*convergence*) atau kembali pada keseimbangan sebelumnya bermakna respon suatu variabel akibat suatu kejutan makin lama akan menghilang sehingga kejutan tersebut tidak meninggalkan pengaruh permanen terhadap variabel tersebut.



Gambar 4. (a) Respon inflasi terhadap adanya *shock* dari Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar (b) Respon Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar terhadap adanya *shock* dari Inflasi

Dalam penelitian ini, analisis IRF digunakan untuk melihat respon dinamis antara variabel inflasi dan pertumbuhan jumlah uang beredar. Respon laju inflasi (INF) rupiah setelah menerima *impulse* dari variabel pertumbuhan jumlah uang beredar (JUB) dalam satuan standar deviasi dapat diperhatikan pada gambar 4. Sumbu vertikal adalah respon INF terhadap guncangan JUB, sedangkan sumbu horizontal adalah periode waktu (bulan). Terlihat bahwa dampak respon yang diterima oleh INF akibat kejutan JUB bersifat konvergen. Artinya, kejutan JUB akan direspon oleh INF namun tidak bersifat permanen. Laju inflasi akan mengalami *self correcting* setelah berbalik tanda arah. Pada Gambar 4.a, meningkatnya pertumbuhan uang beredar, pada awalnya direspon positif oleh inflasi atau harga meningkat namun pada bulan kedua terjadi koreksi yang terlihat dari slope positif menjadi negatif. Keseimbangan awal terjadi di bulan keempat. Respon inflasi terhadap kejutan dari pertumbuhan jumlah uang beredar bersifat kontraksioner sampai dengan bulan kedua dan koreksi terjadi dari bulan kedua sampai dengan bulan kelima di keseimbangan awal.

Gambar 4.b menunjukkan respon pertumbuhan uang beredar terhadap adanya kejutan dari variabel inflasi. Kejutan satu standar deviasi variabel inflasi pada bulan pertama berpengaruh negatif terhadap pertumbuhan jumlah uang beredar. Pengaruh negatif ini berlangsung hingga bulan kedua. Setelah itu, terjadi koreksi pada bulan kedua dan seterusnya dimana pertumbuhan jumlah uang beredar bergerak menuju kondisi keseimbangan. Keseimbangan awal tercapai pada periode kelima. Dilihat dengan seksama bahwa pola antara respon inflasi terhadap pertumbuhan jumlah uang beredar dan respon pertumbuhan jumlah uang beredar memiliki pola yang berkebalikan.

Analisis *Forecast Error Variance Decomposition*

Dekomposisi varian (*variance decomposition*) dalam model VAR bertujuan untuk memisahkan pengaruh masing-masing variabel inovasi secara individual terhadap respon yang diterima suatu variabel, termasuk inovasi variabel itu sendiri. Dengan kata lain, analisis FEVD digunakan untuk mengetahui

variabel yang paling berperan penting dalam menjelaskan perubahan suatu variabel. Dari pengujian yang dilakukan, sebagaimana ditampilkan pada Tabel 11 diperoleh hasil sebagai berikut :

1. Sumber penting variasi laju inflasi adalah shocks terhadap inflasi itu sendiri. Pada periode (bulan) pertama, variasi laju inflasi yang bersumber dari dirinya mencapai 100% dan kemudian terus menurun hingga mencapai 95,23% pada bulan ke-5. Meskipun pertumbuhan jumlah uang beredar mampu menjelaskan inflasi namun sumber variasi yang berasal dari kejutan variabel JUB hanya sekitar 4,77% secara rata-rata.
2. Variasi pertumbuhan jumlah uang beredar pada bulan pertama bersumber dari variabel itu sendiri, yaitu sebesar 94,7%. Dalam periode selanjutnya peranan pertumbuhan jumlah uang beredar terus menurun hingga mencapai 89,63% pada periode keenam. Seiring dengan penurunan peranan pertumbuhan laju uang beredar, peranan variabel inflasi menunjukkan peningkatan. Peranan laju inflasi meningkat dari 5,3% menjadi 10,37% di bulan keenam.

Tabel 11. Output Forecasting Error Variance Decomposition

Period	FEVD Laju Inflasi		FEVD Pertumbuhan Jumlah Uang Beredar	
	INF	JUB	INF	JUB
1	100.0000	0.000000	5.276513	94.72349
2	95.36974	4.630261	10.21086	89.78914
3	95.24644	4.753564	10.35484	89.64516
4	95.23217	4.767830	10.37210	89.62790
5	95.23109	4.768909	10.37340	89.62660
6	95.23100	4.769002	10.37351	89.62649
7	95.23099	4.769010	10.37352	89.62648
8	95.23099	4.769010	10.37352	89.62648
9	95.23099	4.769010	10.37352	89.62648
10	95.23099	4.769010	10.37352	89.62648

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai keterkaitan variabel inflasi dan jumlah uang beredar, dapat disimpulkan :

1. Terdapat hubungan kausalitas Granger dua arah (*bidirectional*) yang signifikan antara inflasi dan pertumbuhan jumlah uang beredar pada lag 1. Hal ini menunjukkan bahwa informasi masa lalu dari inflasi dan jumlah uang beredar memberikan kontribusi dalam memprediksi baik inflasi hari ini maupun pertumbuhan jumlah uang beredar hari ini.
2. Model *Vector Auto Regressive* (VAR) yang bisa menggambarkan hubungan variabel inflasi dan jumlah uang beredar adalah model VAR dengan ordo satu (VAR(1)). Kedua variabel signifikan saling mempengaruhi namun dengan kecepatan pengaruh yang berbeda.
3. Laju inflasi dipengaruhi secara positif oleh laju inflasi satu periode sebelumnya dan pertumbuhan jumlah uang beredar juga pada satu periode sebelumnya. Pertumbuhan jumlah uang beredar memiliki koefisien yang positif yang menunjukkan bahwa meningkatnya pertumbuhan jumlah uang beredar akan direspon dengan meningkatnya inflasi.
4. Pertumbuhan jumlah uang beredar berpengaruh negatif terhadap pertumbuhan jumlah uang beredar dan laju inflasi untuk satu periode sebelumnya. Koefisien negatif pada variabel inflasi menunjukkan bahwa kenaikan tingkat inflasi periode sebelumnya akan direspon dengan melambatnya pertumbuhan jumlah uang beredar.
5. Respon yang diterima oleh inflasi maupun pertumbuhan jumlah uang beredar akibat adanya kejutan tidak bersifat permanen. Peningkatan pertumbuhan jumlah uang beredar berdampak positif terhadap laju inflasi selama 5 bulan. Sedangkan peningkatan laju inflasi berdampak negatif terhadap pertumbuhan jumlah uang beredar juga selama 5 bulan.
6. Walaupun pada awal periode varians perubahan inflasi hanya ditentukan oleh dirinya sendiri namun mulai periode kedua pertumbuhan jumlah uang beredar mulai memberikan kontribusinya sebesar 4,63% dan terus bertambah hingga kontribusi yang mampu diberikan sebesar 4,77% untuk periode keenam dst.

7. Sebagian besar variasi pertumbuhan jumlah uang beredar lebih dapat dijelaskan oleh dirinya sendiri dibandingkan inflasi. Kontribusi inflasi dalam variansi pertumbuhan jumlah uang beredar hanya sekitar 10,37% secara rata-rata.

5. Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Kepala BPS Provinsi Lampung, Ibu Yeane Irmaningrum S, M.A., dan Kabid Statistik Sosial BPS Provinsi Lampung, Bapak Mas'ud Rifai, SST., atas dukungannya bagi saya untuk dapat melaksanakan penelitian ini.

6. Daftar Pustaka

- Boediono, 1995, Seri Sinopsis Pengantar Ilmu Ekonomi : Ekonomi Moneter, BPFE UGM Yogyakarta.
- Enders, W. (2004). Applied Econometric Time Series Second Edition. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Reksoprayitno, Soediyono. (2009). Pengantar Ekonomi Makro, Edisi Pertama, Cetakan Kedua. BPFE Yogyakarta.
- Sukirno, Sadono. (2006). Makro Ekonomi Teori Pengantar. Penerbit Raja Grafindo Persada.
- Tajul, Khalwaty. (2000). Inflasi dan Solusinya. PT. Gramedia Pustaka Utama.
- www.bi.go.id
- www.bps.go.id

PENGELOMPOKAN KABUPATEN/ KOTA BERDASARKAN INDIKATOR PEMBANGUNAN DAERAH PROVINSI LAMPUNG TAHUN 2017

Abdul Kadir

Fungsional Statistisi Pertama BPS Kabupaten Pesawaran
Abdul.kadirse@yahoo.com

Abstrak

Beberapa indikator keberhasilan pembangunan suatu daerah dapat dilihat antara lain dari Indeks Pembangunan Manusia (IPM), pertumbuhan ekonomi dan persentase kemiskinan. Provinsi Lampung sebagai pintu gerbang Pulau Sumatera merupakan provinsi yang memiliki nilai strategis dalam pengembangan pembangunan regional. Provinsi Lampung terdiri dari beberapa kabupaten/ kota yang memiliki potensi dan karakteristik yang berbeda. Keberagaman karakteristik wilayah berpengaruh terhadap kebijakan pemerintah dalam pengambilan keputusan, untuk itu perlu adanya pengelompokan wilayah agar memudahkan pengambilan keputusan. Penelitian ini bertujuan untuk mengelompokkan kabupaten/ kota di Provinsi Lampung berdasarkan indikator pembangunan daerah agar pengambilan kebijakan dapat sesuai dengan karakteristik kelompok wilayah. Karakteristik yang akan digunakan sebagai dasar pengelompokan adalah laju pertumbuhan ekonomi, persentase kemiskinan, dan Indeks Pembangunan Manusia (IPM). Analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis gerombol. Pengelompokan wilayah di Provinsi Lampung Pada Tahun 2017 berdasarkan indikator pembangunan daerah menghasilkan 3 kelompok berbeda. Kelompok wilayah pertama merupakan wilayah dengan pertumbuhan ekonomi tinggi dan memiliki IPM yang tinggi, wilayah kedua merupakan wilayah dengan persentase penduduk miskin yang tinggi dan laju pertumbuhan ekonomi yang rendah, sedangkan wilayah ketiga merupakan wilayah dengan nilai IPM yang rendah.

Kata Kunci : analisis gerombol, pembangunan, pengelompokan.

1. Pendahuluan

Provinsi Lampung memiliki wilayah yang relatif luas yaitu 35.376,50 Km². terbagi kedalam lima belas kabupaten dan kota. Provinsi Lampung memiliki dataran rendah, perbukitan dan laut, sehingga provinsi Lampung memiliki potensi yang besar di bidang pertanian, perikanan dan pariwisata, Provinsi Lampung merupakan daerah yang strategis bagi perekonomian regional. Posisi Provinsi Lampung memiliki pelabuhan laut bagi pintu masuk utama ke Pulau Sumatera merupakan suatu keuntungan tersendiri pada kondisi kehidupan masyarakat. Pemerintah daerah selalu berusaha mengupayakan kesejahteraan masyarakat melalui pembangunan di segala bidang. Salah satu indikator yang dijadikan sebagai standar keberhasilan pembangunan manusia adalah Indeks Pembangunan Manusia (IPM). Pada Tahun 2017, Provinsi Lampung merupakan provinsi dengan IPM terendah di gugusan Pulau Sumatera. Indeks Pembangunan Manusia Provinsi Lampung pada tahun 2017 adalah 68,25. Keberhasilan pembangunan suatu wilayah dapat juga di lihat dari pertumbuhan ekonomi dan persentase penduduk miskin di wilayah tersebut. Persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung menduduki peringkat ketiga tertinggi di Pulau Sumatera, yaitu sebesar 13,69. Pertumbuhan ekonomi Provinsi Lampung pada tahun 2017 adalah 5,17, merupakan provinsi dengan pertumbuhan ekonomi yang cukup pesat di Pulau Sumatera.

Di tataran Pulau Sumatera, Pertumbuhan ekonomi yang cukup pesat di Provinsi Lampung tidak sebanding dengan peningkatan IPM dan penurunan persentase penduduk miskin. Penanganan terkait pembangunan manusia dan penurunan persentase penduduk miskin di Provinsi Lampung menjadi sasaran program pembangunan berkelanjutan. Perencanaan program pembangunan akan sangat efektif jika memperhatikan potensi lokal. Perencanaan akan lebih mudah jika karakter daerah dapat dikelompokkan sehingga dapat diketahui kelompok wilayah mana saja yang menjadi prioritas terhadap suatu program. Perencanaan pembangunan dengan kondisi yang cukup luas dengan topografi yang bermacam-macam

akan lebih optimal jika ada pengelompokan wilayah berdasarkan indikator pembangunan di masing-masing wilayah.

Penelitian terkait pengelompokan wilayah telah banyak dilakukan. Fitriasari dkk (2015) melakukan penelitian terkait pengelompokan kabupaten/ kota di Jawa Timur berdasarkan indikator kesehatan masyarakat. Penelitian tersebut menghasilkan dua klaster dengan memiliki perbedaan. Ramadhani, dkk (2015) melakukan penelitian untuk memetakan provinsi di Indonesia berdasarkan karakteristik kesejahteraan rakyat menggunakan metode *K-Means cluster*. Lazumi (2015) melakukan penelitian tentang pengelompokan kabupaten/ kota berdasarkan karakteristik kemiskinan di Provinsi Nusa Tenggara Timur yang menghasilkan kesimpulan bahwa terdapat 6 klaster wilayah di Provinsi Nusa Tenggara Timur berdasarkan karakteristik kemiskinan. Awaliah (2018) melakukan penelitian terkait analisis clustering untuk mengelompokkan tingkat kesejahteraan kabupaten/ kota berdasarkan sosial ekonomi rumah tangga di wilayah Provinsi Sulawesi Selatan. Penelitian tersebut menghasilkan kesimpulan bahwa di wilayah tersebut terbentuk 3 cluster berdasarkan sosial ekonomi rumah tangga.

Penelitian ini bertujuan untuk mengelompokkan wilayah kabupaten/ kota di Provinsi Lampung dengan menggunakan analisis clustering, yaitu dengan metode *K-Means*.

2. Bahan dan Metode

2.1 Data dan Variabel penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari publikasi BPS Provinsi Lampung yaitu publikasi Provinsi Lampung Dalam Angka 2018. Unit observasi pada penelitian ini adalah 15 kabupaten/ kota di Provinsi Lampung. Variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Nama Variabel
(1)	(2)
x_1	Laju Pertumbuhan Ekonomi
x_2	Persentase Penduduk Miskin
x_3	Indeks Pembangunan Manusia (IPM)

1. Laju Pertumbuhan Ekonomi

Salah satu indikator penting untuk mengetahui kondisi ekonomi di suatu Daerah dalam suatu periode tertentu adalah data Produk Domestik Bruto (PDB), baik atas dasar harga berlaku maupun atas dasar harga konstan. PDB pada dasarnya merupakan jumlah nilai tambah yang dihasilkan oleh seluruh unit usaha dalam suatu Daerah tertentu, atau merupakan jumlah nilai barang dan jasa akhir yang dihasilkan oleh seluruh unit ekonomi. PDB atas dasar harga berlaku menggambarkan nilai tambah barang dan jasa yang dihitung menggunakan harga yang berlaku pada setiap tahun, sedangkan PDB atas dasar harga konstan menunjukkan nilai tambah barang dan jasa tersebut yang dihitung menggunakan harga yang berlaku pada satu tahun tertentu sebagai dasar. PDB atas dasar harga konstan dapat digunakan untuk melihat pergeseran dan struktur ekonomi, sedang harga konstan digunakan untuk mengetahui pertumbuhan ekonomi dari tahun ke tahun. (BPS; 2017)

2. Presentase Penduduk Miskin

Untuk mengukur kemiskinan, BPS menggunakan konsep kemampuan memenuhi kebutuhan dasar (basic needs approach). Dengan pendekatan ini, kemiskinan dipandang sebagai ketidakmampuan dari sisi ekonomi untuk memenuhi kebutuhan dasar makanan dan bukan makanan yang diukur dari sisi pengeluaran. Jadi Penduduk Miskin adalah penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita perbulan dibawah garis kemiskinan. (BPS; 2017)

3. Indeks Pembangunan Manusia

Indeks Pembangunan Manusia adalah untuk menjelaskan bagaimana penduduk dapat mengakses hasil pembangunan dalam memperoleh pendapatan, kesehatan, pendidikan, dan sebagainya. IPM

dibentuk oleh 3 (tiga) dimensi dasar: Umur panjang dan hidup sehat, Pengetahuan dan Standar hidup layak. (BPS; 2017)

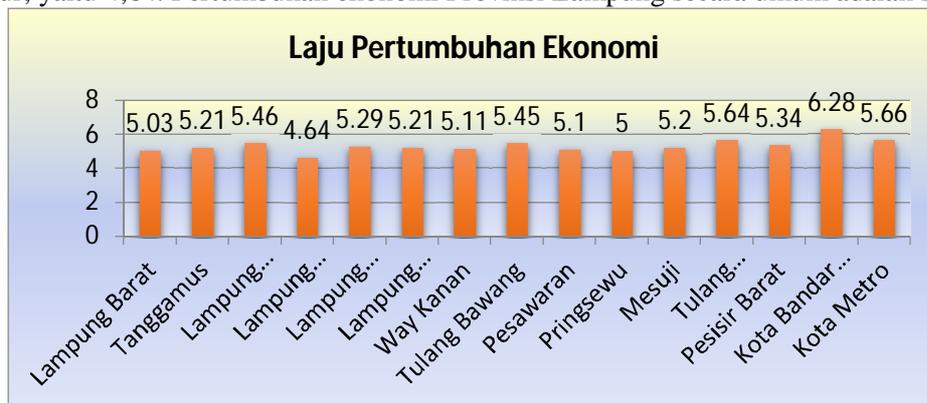
2.2 Metode K-Means Clustering

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis gerombol non hirarki yaitu dengan *clustering K-Means*. Metode K-Means clustering merupakan bagian dari analisis gerombol. Analisis gerombol dibedakan menjadi 2, yaitu metode hirarki dan metode non hirarki. Metode hirarki dengan mengelompokkan obyek melalui jarak terdekat antar pasangan objek diawali dengan jumlah cluster terbanyak kemudian semakin sedikit seiring dengan meleburnya objek suatu cluster ke dalam cluster lainnya. Kedekatan yang biasa dipakai dengan analisis cluster antar 2 observasi pada beberapa dimensi adalah jarak Euclidean (*Euclidean distance*) K-means clustering dilakukan dengan menentukan terlebih dahulu jumlah kelompok yang akan dibentuk. Tahapan dalam k-means adalah mempartisi masing-masing objek secara acak ke dalam *k* kelompok, kemudian mengelompokkan masing-masing objek ke dalam kelompok yang memiliki pusat/ centroid terdekat, selanjutnya melakukan pengulangan langkah sampai dengan tidak mungkin lagi terjadi perpindahan anggota kelompok.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Analisis Deskriptif

Pertumbuhan ekonomi tertinggi di Provinsi Lampung pada tahun 2017 terdapat di Kota Bandar Lampung, yaitu sebesar 6,28. Pertumbuhan ekonomi terendah di Provinsi Lampung berada di Kabupaten Lampung Timur, yaitu 4,64. Pertumbuhan ekonomi Provinsi Lampung secara umum adalah sebesar 5,17.



Gambar 1. Laju Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Lampung

Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung pada tahun 2017 adalah sebesar 13,69. Tiga kabupaten di Provinsi Lampung dengan persentase kemiskinan tertinggi terdapat di Kabupaten Lampung Utara, Kabupaten Pesawaran, dan Kabupaten Lampung Timur, yaitu sebesar 21,55%, 16,48%, dan 16,35%. Persentase penduduk miskin terendah berada di Kabupaten Mesuji, yaitu sebesar 7,66%.



Gambar 2. Persentase Penduduk Miskin di Provinsi Lampung Tahun 2017

Indek Pembangunan Manusia di Provinsi Lampung pada tahun 2017 adalah 68,25. Wilayah dengan nilai IPM tertinggi di Provinsi Lampung adalah Kota Bandar Lampung, yaitu 75,98. Tiga wilayah dengan nilai IPM terendah adalah Kabupaten Mesuji, Kabupaten Pesisir Barat, dan Kabupaten Pesawaran. Masing- masing nilai IPM dari tiga kabupaten terendah tersebut adalah 61,87 , 62,2 , dan 64,43.



Gambar 3. Indeks Pembangunan Manusia di Provinsi Lampung Tahun 2017

3.2 Analisis Cluster K-Means.

a. Pembentukan K-Means Cluster

Hasil pengelompokan dengan metode K-Means adalah sebagai berikut:

1. Jumlah Anggota Kelompok

Kelompok	Jumlah Anggota	
	Kelompok	
(1)	(2)	
1	4	
2	7	
3	4	

Hasil pengelompokan dengan *K-Means cluster* didapatkan 3 kelompok dengan jumlah anggota pada kelompok pertama 4 kabupaten/ kota, kelompok kedua 7 kabupaten, dan kelompok ketiga 4 kabupaten.

2. Karakteristik Kelompok yang terbentuk

Tabel 3. Karakteristik Kelompok yang terbentuk

Uraian	Kelompok		
	Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3
(1)	(2)	(3)	(4)
Laju Pertumbuhan Ekonomi	5,25	4,86	5,00
persentase penduduk miskin	10,25	15,86	9,50
IPM	71,50	65,29	64,00

- a. Kelompok 1
Kelompok pertama terdiri dari Kabupaten Lampung Tengah, Kabupaten Pringsewu, Kota Bandar Lampung, dan Kota Metro. Karakteristik wilayah pada kelompok pertama adalah wilayah dengan laju pertumbuhan ekonomi yang cukup tinggi, Indeks Pembangunan Manusia yang tinggi dan persentase penduduk miskin yang sedang.
- b. Kelompok 2
Kelompok kedua memiliki karakteristik persentase penduduk miskin yang cukup tinggi, Indeks Pembangunan Manusia sedang dan laju pertumbuhan ekonomi yang cukup rendah. Kelompok kedua ini terdiri dari Kabupaten Lampung Barat, Kabupaten Lampung Selatan, Kabupaten Lampung Timur, Kabupaten Lampung Utara, Kabupaten Way Kanan, Kabupaten Pesawaran, dan Kabupaten Pesisir Barat.
- c. Kelompok 3
Kelompok ketiga terdiri dari Kabupaten Tanggamus, Kabupaten Tulang Bawang, Kabupaten Mesuji, dan Kabupaten Tulang Bawang Barat. Karakteristik wilayah di kelompok ketiga adalah wilayah dengan indeks pembangunan manusia dan persentase penduduk miskin yang relatif rendah, serta laju pertumbuhan ekonomi sedang

4. Kesimpulan

Pengelompokan kabupaten/ kota di Provinsi Lampung berdasarkan indikator pembangunan tahun 2017 menghasilkan 3 kelompok wilayah. Kelompok wilayah yang terbentuk memiliki karakteristik masing-masing. Kelompok wilayah pertama merupakan wilayah dengan indikator laju pertumbuhan ekonomi tinggi dan memiliki IPM yang tinggi. Kelompok wilayah pertama terdiri dari 2 kabupaten dan 2 kota di Provinsi Lampung. Wilayah kelompok kedua yang terdiri dari 7 kabupaten merupakan wilayah dengan karakteristik persentase penduduk miskin yang tinggi dan laju pertumbuhan ekonomi yang rendah, Kelompok ketiga yang mencakup 4 kabupaten merupakan wilayah dengan karakteristik nilai IPM yang rendah.

5. Daftar Pustaka

- Awaliah, R. (2018). Analisis *clustering* untuk mengelompokkan tingkat kesejahteraan kabupaten/kota berdasarkan sosial ekonomi rumah tangga di wilayah provinsi sulawesi selatan. Skripsi. Universitas islam negeri (uin) alauddin Makassar
- Badan Pusat Statistik. (2018). Provinsi Lampung Dalam Angka 2018. Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. Provinsi Lampung.
- Badan Pusat Statistik. (2017). Data dan Informasi Kemiskinan Kabupaten/Kota. Badan Pusat Statistik
- Badan Pusat Statistik. (2017). Tinjauan Regional Berdasarkan PDRB Kabupaten/Kota 2012-2016 Buku 1 Pulau Sumatera. Badan Pusat Statistik.
- Badan Pusat Statistik. (2017). Indeks Pembangunan Manusia. Badan Pusat Statistik.
- Fitra R, Abdul H & Abdul M. (2015). Pengelompokan Provinsi Di Indonesia Berdasarkan Karakteristik Kesejahteraan Rakyat Menggunakan Metode *K-Means Cluster*. Jurnal Gaussian, 4(4), 875-884
- Lazumi, F. (2018) Pengelompokan Kabupaten/Kota Berdasarkan Karakteristik Kemiskinan Di Provinsi Nusa Tenggara Timur Menggunakan Algoritma *Self Organizing Maps (SOM)*. Tugas akhir. Universitas Islam Indonesia Yogyakarta
- Marina, M P & Kartika F. (2015). Pengelompokan Kabupaten/Kota di Jawa Timur Berdasarkan Indikator Kesehatan Masyarakat Menggunakan Metode Kohonen SOM dan K-Means. Jurnal Sains & Seni ITS, 4, eLSSN 2337-3520

Soemartini & Eny Supartini. (2017), Analisis K-Means Cluster Untuk Pengelompokan Kabupaten /Kota Di Jawa Barat Berdasarkan Indikator Masyarakat, *Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya II (KNPMP II)*. Universitas Muhammadiyah Surakarta. 18 Maret 2017

Usman, H & Sobari N. (2013). Aplikasi Teknik Multivariate Untuk Riset Pemasaran. Rajawali Press

PENGUNAAN TEORI ANTRIAN *MULTI-SERVER* DENGAN DISTRIBUSI ERLANG

Muhammad Taufik Rizal^{1*}, Widiarti¹, Wamiliana¹, Rudi Ruswandi¹

¹Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145

*Penulis Korespondensi : mtaufik.rizal11@gmail.com

Abstrak

Antrian merupakan keadaan dimana pelanggan harus menunggu giliran untuk mendapatkan jasa pelayanan. Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pada pelanggan dan pemrosesan masalahnya. Teori yang mempelajari lebih lanjut tentang sistem antrian itu adalah teori antrian. Berdasarkan susunan saluran dalam struktur antrian, terdapat 2 jenis sistem antrian yaitu sistem antrian *single-server* dan sistem antrian *multi-server*. Dalam penelitian ini, karena sifat kedatangan yang terjadi dalam sistem antrian yaitu kedatangan secara acak dan kedatangan secara konstan, maka tingkat kedatangan akan berdistribusi Poisson dengan parameter λ . Sedangkan untuk waktu pelayanan memakai distribusi erlang dengan parameter μ dan k . Akan didiskusikan nilai-nilai dari rata-rata jumlah pelanggan baik yang sedang antri atau dalam keseluruhan sistem antrian dan rata-rata waktu yang dihabiskan pelanggan baik yang sedang antri atau dalam keseluruhan sistem antrian.

Kata kunci: Distribusi Erlang; Multi-Server; Teori Antrian

1. Pendahuluan

Kehidupan saat ini mengalami perkembangan yang sangat pesat di belahan dunia manapun. Dengan berkembangnya kehidupan saat ini, mengakibatkan timbulnya persaingan antar tiap elemen terutama dalam melayani pelanggan. Beberapa yang dapat diperhatikan pelanggan dalam hal pelayanan yaitu waktu pelayanan, disiplin pelayanan, ketepatan pelayanan, proses pelayanan, dan yang lainnya.

Pelayanan sangat terkait dengan antrian. Pelayanan yang baik yaitu pelayanan yang tidak membuat pelanggan menunggu sampai waktu yang lama akibat antrian yang cukup panjang. Beberapa penyebab antrian yang panjang yaitu waktu yang diperlukan server dalam melayani pelanggan cukup lama, jumlah pelanggan melebihi jumlah server yang ada, dan yang lainnya. Untuk mengatasi hal tersebut tidak cukup diselesaikan dengan sistem antrian yang mempunyai server tunggal (*single-server*), melainkan mempunyai server yang lebih dari satu (*multi-server*).

Karakteristik operasi dari sistem antrian dijelaskan secara luas oleh dua sifat statistik yang disebut distribusi peluang dari waktu antar kedatangan dan distribusi peluang dari waktu pelayanan. Untuk merumuskan model teori antrian yang menggambarkan sistem yang sebenarnya, perlu untuk menetapkan asumsi dari masing-masing distribusi tersebut, diantaranya waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan bersifat acak dan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan selanjutnya tidak terpengaruh dengan yang sebelumnya. Maka distribusi peluang yang cocok adalah distribusi Eksponensial, karena sifat pada distribusi Eksponensial sama seperti asumsi-asumsi tersebut.

Pada kenyataannya distribusi dari waktu pelayanan yang sesungguhnya seringkali menyimpang dari distribusi Eksponensial, seperti kebutuhan pelayanan dari pelanggan cukup banyak kesamaan, satu *server* hanya dapat mengerjakan beberapa tugas, dan yang kejadian lainnya yang tidak bisa jika menggunakan distribusi Eksponensial. Oleh karena itu, penting untuk mempunyai model-model antrian lain yang menggunakan distribusi-distribusi alternatif dari distribusi waktu pelayanan, salah satunya distribusi Erlang.

Distribusi Erlang adalah distribusi yang sangat penting dalam teori antrian karena mampu untuk memperoleh total waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh pelanggan yang memungkinkan server-server memproses tidak hanya satu tugas yang spesifik, melainkan barisan dari k tugas. Misalkan T_1, T_2, \dots, T_k adalah k peubah acak bebas dengan suatu distribusi eksponensial yang identik, dengan mean $\frac{1}{k\mu}$. Maka penjumlahan $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ memiliki distribusi Erlang dengan parameter μ dan k . Sehingga penulis tertarik untuk mendiskusikan teori antrian *multi-server* dengan distribusi Erlang.

2. Bahan dan Metode

2.1. Bahan

2.1.1. Teori Antrian

Suatu proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut. Suatu sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pada pelanggan dan pemrosesan masalahnya (Bronson, 1996).

Dalam teori antrian, ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam mengatasi sebuah antrian agar lebih efektif.

1. Rata-rata jumlah pelanggan dalam suatu sistem antrian (L)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

2. Rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q)

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$$

3. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu antrian sampai dilayani (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Dengan:

L = Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian

L_q = Rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri

W = Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian

W_q = Rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani

2.1.2. Distribusi Erlang

Suatu peubah acak (T) berdistribusi Erlang jika memiliki pdf sebagai berikut:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t} & ; \text{untuk } t \geq 0 \\ 0 & ; \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan μ dan k adalah parameter (Hillier dan Liberman, 1980).

Nilai harapan dari distribusi Erlang adalah:

$$E(T) = \frac{1}{\mu}$$

Varian dari distribusi Erlang adalah:

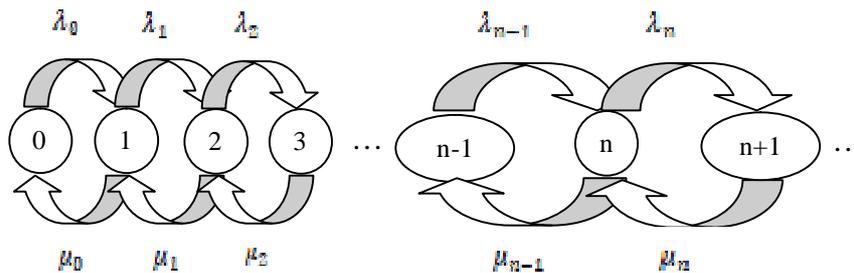
$$Var(T) = \frac{1}{k \mu^2}$$

2.1.3. Proses Kelahiran dan Kematian

Model antrian yang paling dasar diasumsikan bahwa input (pelanggan yang masuk) dan output (pelanggan yang keluar) dari sistem antrian yang terjadi berdasarkan proses kelahiran dan kematian. Secara konteks pada teori antrian, istilah kelahiran ditujukan untuk pelanggan yang baru masuk ke dalam sistem antrian, dan kematian ditujukan untuk pelanggan yang sudah pergi setelah selesai dilayani. State sistem pada waktu t ($t \geq 0$), ditandai dengan $N(t)$, yang merupakan jumlah pelanggan dalam sistem antrian pada waktu t .

Adapun asumsi dari proses kelahiran dan kematian yaitu:

1. Diberikan $N(t) = n$, distribusi peluang dari sisa waktu sampai kelahiran selanjutnya (kedatangan) adalah eksponensial dengan parameter $\lambda_n = (n=0,1,2,\dots)$
2. Diberikan $N(t) = n$, distribusi peluang dari sisa waktu sampai kematian selanjutnya (pelayanan selesai) adalah eksponensial dengan parameter $\mu_n = (n=0,1,2,\dots)$
3. Peubah acak dari asumsi 1 dan asumsi 2 hubungannya bebas. Transisi selanjutnya pada state salah satu proses dari keduanya adalah $n \rightarrow n+1$ (kelahiran tunggal) atau $n \rightarrow n-1$ (kematian tunggal), bergantung pada variabel yang terlebih dahulu atau yang belakangan lebih kecil.



Gambar 1. Diagram proses kelahiran dan kematian (Hillier dan Liberman, 1980)

2.2. Metode

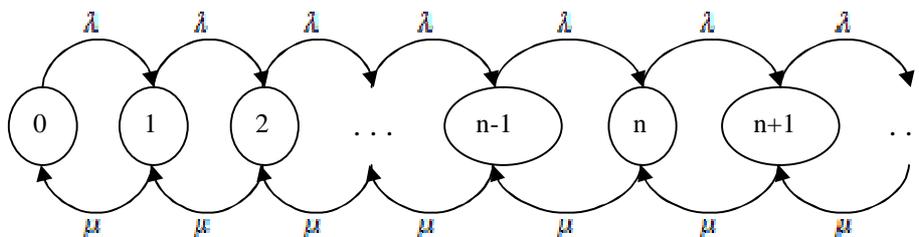
Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk mendapatkan peluang terdapat n pelanggan (P_n) pada antrian *single-server*.
2. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q).
3. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani (W_q).
4. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W).
5. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L).
6. Menganalisis persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk mendapatkan peluang terdapat n pelanggan (P_n) pada antrian *multi-server*.
7. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L_q).
8. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan saat menunggu antrian sampai dilayani (W_q).
9. Menentukan persamaan rata-rata waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem antrian (W).
10. Menentukan persamaan rata-rata jumlah pelanggan yang sedang antri (L).
11. Mengaplikasikan ke dalam bentuk studi kasus.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Sistem Antrian Single-Server

Teori antrian sangat berhubungan dengan proses kelahiran dan kematian, dimana pada proses kelahiran dan kematian terdapat persamaan keseimbangan. Untuk menjelaskan sebuah persamaan keseimbangan, anggap state 0. Proses memasuki state 0 hanya dari state 1. Jadi, peluang keseimbangan yang berada pada state 1 (P_1) menggambarkan proporsi waktu yang memungkinkan proses memasuki state 0. Jika diketahui proses berada pada state 1, tingkat rata-rata untuk memasuki state 0 adalah μ_1 (dengan kata lain, untuk setiap kumulatif unit waktu pada proses dihabiskan pada state 1, nilai harapan dari waktu yang dihabiskan dari state 1 menuju state 0 adalah μ_1). Oleh karena itu, keseluruhan tingkat rata-rata proses meninggalkan state saat ini untuk memasuki state 0 (rata-rata tingkat memasuki) adalah $\mu_1 P_1$. Dengan alasan yang sama, rata-rata tingkat meninggalkan dari state 0 menjadi $\lambda_0 P_0$. Jadi, persamaan keseimbangan untuk state 0 adalah $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$. Untuk setiap state lain terdapat dua kemungkinan transisi masuk dan keluar. Oleh karena itu, setiap sisi persamaan keseimbangan untuk state ini menggambarkan jumlah tingkat rata-rata untuk dua transisi yang terlibat.



Gambar 2. Diagram transisi untuk sistem antrian *single-server*

Tabel 1. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian

State	Kelahiran = Kematian
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1$ $P_2 = \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1 P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2}$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)$ $= \frac{\lambda_1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) P_0 + 0$ $P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$
⋮	⋮
n-1	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = \mu_{n-1} P_{n-1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ $P_n = \frac{\lambda_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} + \frac{\mu_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-2} P_{n-2}}{\mu_n}$ $= \frac{\lambda_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2})$ $= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + 0$ $P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \lambda_{n-3} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_1} P_0$

Pada sistem antrian *single-server* berlaku:

$$\lambda_n = \lambda \quad ; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga persamaan P_n menjadi:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \lambda_{n-3} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_1} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \quad ; n = 0, 1, 2, \dots$$

Pada akhirnya, syarat dari jumlah semua peluang sama dengan 1 dapat digunakan untuk mengevaluasi P_0 .

Asumsikan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) P_0 = 1$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)^{-1}$$

$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho$$

Sehingga persamaan P_n menjadi:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad ; n = 0, 1, 2, \dots$$

Setelah itu dapat menentukan persamaan L_q dari persamaan P_n yang telah diketahui.

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) (1-\rho) \rho^n = (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 \frac{d}{d\rho} \rho^{n-1} = (1-\rho) \rho^2 \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} \right)$$

$$= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 \frac{d}{d\rho} \rho^{n-1} = (1-\rho) \rho^2 \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} \right) = (1-\rho) \rho^2 \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{1-\rho} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \rho)\rho^2(-1)(1 - \rho)^{-2}(-1) = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2 \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \\
 &= \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}
 \end{aligned}$$

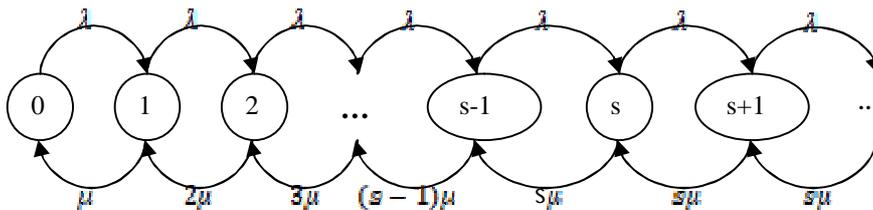
Persamaan di atas merupakan persamaan L_q dari model M/G/1 yang mengasumsikan bahwa sistem antrian mempunyai *single server* dan *exponential interarrival times* dengan mean $= \frac{1}{\mu}$ dan $\sigma^2 = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$. Persamaan di atas biasanya disebut formula *Pollaczek-Khintchine*. Sedangkan pada penelitian ini menggunakan model M/Ek/1 dimana model tersebut adalah bentuk spesial dari model M/G/1 yang waktu pelayanannya memakai distribusi Erlang dengan parameter bentuk k, mean $= \frac{1}{\mu}$, dan $\sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$. Selanjutnya formula *Pollaczek-Khintchine* diaplikasikan ke dalam model M/Ek/1, sehingga persamaan L_q menjadi:

$$\begin{aligned}
 L_q &= \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2 \left(\frac{1}{k\mu^2}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1 + k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \\
 W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}}{\lambda} = \frac{1 + k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \\
 W &= W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1 + k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} \\
 L &= \lambda W = \lambda \left(\frac{1 + k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1 + k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}
 \end{aligned}$$

3.2. Sistem Antrian Multi-Server

Ketika sistem antrian mempunyai banyak server atau *multi-server* ($s > 1$), λ_n tetap didefinisikan seperti pada antrian *single-server* namun tidak untuk μ_n .

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= \lambda ; n = 0, 1, 2, \dots \\
 \mu_n &= \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, s \\ s\mu & ; n = s, s + 1, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$



Gambar 3. Diagram transisi untuk sistem antrian *multi-server*

Tabel 2. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = n\mu$; $n = 1,2,3,\dots, s$

State	Kelahiran = Kematian
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + 2\mu_2 P_2 = \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1$ $P_2 = \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + \frac{\mu_1 P_1}{2\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{2\mu_2}$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + \frac{1}{2\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)$ $= \frac{\lambda_1 P_1}{2\mu_2} + 0$ $= \frac{\lambda_1}{2\mu_2} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \right)$
⋮	⋮
s-1	$\lambda_{s-2} P_{s-2} + s\mu_s P_s = (s-1)\mu_{s-1} P_{s-1} + \lambda_{s-1} P_{s-1}$ $P_s = \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + \frac{(s-1)\mu_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} - \frac{\lambda_{s-2} P_{s-2}}{s\mu_s}$ $= \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + \frac{1}{s\mu_s} ((s-1)\mu_{s-1} P_{s-1} - \lambda_{s-2} P_{s-2})$ $= \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_s} + 0$ $P_s = \frac{\lambda_{s-1}}{s\mu_s} \left(\frac{\lambda_{s-2} \lambda_{s-3} \dots \lambda_0}{(s-1)\mu_{s-1} (s-2)\mu_{s-2} \dots 1\mu_1} P_0 \right)$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad ; 0 \leq n \leq s$$

Tabel 3. Persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = s\mu$; $n = s, s+1, s+2, \dots$

State	Kelahiran = Kematian
s	$\lambda_{s-1} P_{s-1} + s\mu_{s+1} P_{s+1} = s\mu_s P_s + \lambda_s P_s$ $P_{s+1} = \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + \frac{s\mu_s P_s}{s\mu_{s+1}} - \frac{\lambda_{s-1} P_{s-1}}{s\mu_{s+1}}$ $= \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + \frac{1}{s\mu_{s+1}} (s\mu_s P_s - \lambda_{s-1} P_{s-1})$ $= \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+1}} + 0$ $= \frac{s\mu_{s+1}}{\lambda_s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$ $P_{s+1} = \frac{s\mu_{s+1}}{s\mu} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$
s+1	$\lambda_s P_s + s\mu_{s+2} P_{s+2} = s\mu_{s+1} P_{s+1} + \lambda_{s+1} P_{s+1}$ $P_{s+2} = \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + \frac{s\mu_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} - \frac{\lambda_s P_s}{s\mu_{s+2}}$ $= \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + \frac{1}{s\mu_{s+2}} (s\mu_{s+1} P_{s+1} - \lambda_s P_s)$ $= \frac{\lambda_{s+1} P_{s+1}}{s\mu_{s+2}} + 0$ $= \frac{s\mu_{s+2}}{\lambda_{s+1}} \frac{\lambda_s}{s\mu_{s+1}} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$

	$P_{s+2} = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$
⋮	⋮
s+(n-s)-1	$\begin{aligned} & \lambda_{s+(n-s)-2} P_{s+(n-s)-2} + S\mu_{s+(n-s)} P_{s+(n-s)} \\ & = S\mu_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1} + \lambda_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1} \\ P_{s+(n-s)} & = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1}}{S\mu_{s+(n-s)}} + \frac{S\mu_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1}}{S\mu_{s+(n-s)}} \\ & \quad - \frac{\lambda_{s+(n-s)-2} P_{s+(n-s)-2}}{S\mu_{s+(n-s)}} \\ P_{s+(n-s)} & = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1}}{S\mu_{s+(n-s)}} \\ & \quad + \frac{1}{S\mu_{s+(n-s)}} (S\mu_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1} - \lambda_{s+(n-s)-2} P_{s+(n-s)-2}) \\ P_{s+(n-s)} & = \frac{\lambda_{s+(n-s)-1} P_{s+(n-s)-1}}{S\mu_{s+(n-s)}} + 0 \\ P_{s+(n-s)} & = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 \end{aligned}$

Jika diasumsikan $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$, maka persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian untuk $\mu_n = s\mu$; $n = s, s + 1, s + 2, \dots$ menjadi sebagai berikut:

$$P_{s+(n-s)} = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0$$

$$P_n = \rho^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 \quad ; n \geq s$$

Jadi persamaan keseimbangan proses kelahiran dan kematian pada antrian *multi-server* adalah sebagai berikut:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & ; 0 \leq n \leq s \\ \rho^{n-s} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 & ; n \geq s \end{cases}$$

Nilai dari P_0 ditentukan dari persamaan P_n yang disubstitusikan ke $f(x_i) \geq 0$ dan $\sum f(x_i) = 1$. Jika $\lambda < s\mu$, dan asumsikan $\rho = \lambda/(s\mu) < 1$ agar sistem tidak *overload* dan tercipta *steady state*, maka diperoleh:

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s}\right)} = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Setelah itu dapat menentukan persamaan L_q .

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

Misalkan $j = n - s$, maka $n = s + j$. Sehingga,

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{j=0}^{\infty} j P_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho^j P_0 = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} j \rho^j = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} \rho \frac{d}{d\rho} \rho^j \\ L_q &= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{1-\rho} \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho ((-1)(1-\rho)^{-2}(-1)) \\ L_q &= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \left(\frac{1}{(1-\rho)^2} \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda/s\mu} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda/s\mu} \right)^2 \left(\frac{1}{\mu} \right) \end{aligned}$$

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s}\right) \sigma}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan L_q dari model M/M/s yang berarti sistem antrian mempunyai *multi-server* dan berdistribusi Eksponensial untuk waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan. Pada penelitian ini menggunakan model M/E_k/s dimana waktu pelayanannya memakai distribusi Erlang. Distribusi Eksponensial untuk waktu pelayanan mengasumsikan variasi yang sangat besar $\sigma = \frac{1}{\mu}$, sedangkan distribusi Erlang mengasumsikan variasi yang berada di antara varian *zero* dan varian distribusi Eksponensial ($0 < \sigma < \frac{1}{\mu}$), dengan $\sigma = \frac{1}{\sqrt{k} \mu}$. Sehingga persamaan di atas menjadi:

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \left(\frac{1}{\mu}\right)}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \sqrt{k} (1 - \rho)^2}$$

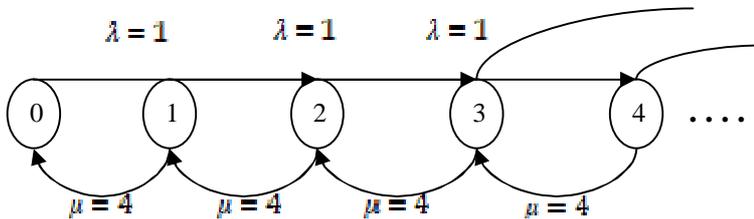
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \sqrt{k} (1 - \rho)^2}}{\lambda} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \lambda \sqrt{k} (1 - \rho)^2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \lambda \sqrt{k} (1 - \rho)^2} + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda \left(P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \lambda \sqrt{k} (1 - \rho)^2} + \frac{1}{\mu} \right) = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \sqrt{k} (1 - \rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

3.3. Studi Kasus

1. Antonio menjalankan perbaikan sepatu seorang diri. Pelanggan datang membawa sepasang sepatu untuk diperbaiki menurut proses Poisson dengan laju rata-rata satu pasang tiap jam. Waktu yang diperlukan Antonio untuk memperbaiki satu sepatu mempunyai distribusi eksponensial dengan rata-rata 15 menit.
 - a. Perhatikan rumusan sistem antrian ini jika sepatu (tidak sepasang) dianggap sebagai pelanggan. Dengan diagram laju seperti ini:



Buatlah persamaan keseimbangannya.

- b. Sekarang perhatikan rumusan sistem antrian ini jika pasangan sepatu dianggap sebagai pelanggan. Tentukan model antrian yang sesuai dengan rumusan ini.
- c. Hitunglah ekspektasi jumlah pasangan sepatu dalam kios.
- d. Hitunglah ekspektasi jumlah waktu mulai dari pelanggan memasukkan pasangan sepatu sampai sepatu tersebut selesai diperbaiki dan siap diambil lagi.

Penyelesaian

a.

$$\begin{aligned} \mu P_1 &= \lambda P_0 \\ \mu P_2 &= (\lambda + \mu) P_1 \\ \lambda P_0 + \mu P_3 &= (\lambda + \mu) P_2 \\ &\vdots \\ \lambda P_{n-2} + \mu P_{n+1} &= (\lambda + \mu) P_n \end{aligned}$$

- b. Masukkan distribusi Poisson dengan $\lambda = 1$ dan waktu pelayanan berdistribusi Erlang dengan $\mu = \frac{4}{2} = 2, k = 2$

c. $L = \rho + L_q = \rho + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = 0.5 + \frac{1^2 \cdot 0.354^2 + 0.5^2}{2(1-0.5)} = 0.875$

d. $W = \frac{1}{\mu} + W_q = \frac{1}{\mu} + \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{0.875-0.5}{1} = 0.875$

2. Pabrik McAllister Company saat ini mempunyai dua gudang peralatan, masing-masing dioperasikan oleh satu karyawan dalam lokasi pabrik. Gudang peralatan pertama hanya digunakan untuk menyimpan peralatan/mesin berat, sedangkan yang kedua digunakan untuk menyimpan peralatan lain. Akan tetapi, untuk kedua gudang kedatangan mekanik untuk mendapatkan perawatan mempunyai laju rata-rata 18 kedatangan tiap jam dan ekspektasi waktu pelayanan adalah 3 menit.

Oleh karena terdapat keluhan dari mekanik bahwa mereka harus menunggu di gudang terlalu lama untuk mendapatkan perawatan, diusulkan agar kedua gudang dijadikan satu sehingga kedua karyawan dapat melayani kedua jenis permintaan perawatan. Hal ini membuat laju kedatangan rata-rata mekanik untuk mendapatkan peralatan menjadi 36 kedatangan tiap jam dan ekspektasi waktu pelayanan tetap sebesar 3 menit. Akan tetapi, informasi mengenai bentuk probabilitas waktu antarkedatangan dan waktu pelayanan tidak diketahui sehingga tidak jelas model antrian mana yang paling sesuai.

Bandingkan kondisi sekarang dan usulan yang ada dalam hal ekspektasi total jumlah mekanik dalam gudang peralatan dan ekspektasi waktu tunggu (termasuk pelayanan) untuk setiap mekanik. Lakukan hal ini dengan membuat tabel berdasarkan model antrian eksponensial dan model antrian erlang (gunakan $k = 2$ untuk distribusi Erlang yang sesuai).

Penyelesaian

Pada sistem saat ini, $\lambda = 18$ dan $\mu = 20$, sehingga $\rho = 0,9$. Untuk sistem usulan $\lambda = 36$, $\mu = 20$, $s = 2$, sehingga $\rho = 0,9$.

Model	Saat Ini			Usulan	
	L di tiap penyimpanan	Total L	$W = L/\lambda$	L	$W = L/\lambda$
Eksponensial	9	18	0,5	9,47	0,263
Erlang	6,975	13,95	0,388	7,242	0,201

4. Kesimpulan

Berdasarkan analisis teori antrian yang telah dilakukan, distribusi Erlang sangat tepat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan antrian dalam kehidupan nyata. Bahkan jika dibandingkan dengan distribusi Eksponensial, distribusi Erlang tetap lebih baik. Sehingga tidak akan merugikan pihak penyelenggara layanan maupun pihak yang membutuhkan layanan.

5. Daftar Pustaka

Bronson, R. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research* (Terjemahan Hans Wospakrik). Erlangga, Jakarta.

Hillier, Frederick S. and Liberman, Gerald J. (1980). *Introduction to Operation Research*. 3rd ed. Holden-Day, USA.

APLIKASI *MULTIPLE CLASSIFICATION ANALYSIS* (MCA) DALAM ANALISIS PENGARUH VARIABEL SOSIAL EKONOMI DAN DEMOGRAFI TERHADAP LAMA SEKOLAH PROVINSI LAMPUNG TAHUN 2017

Desliyani Tri Wandita

*Statistisi Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung
Jl. Basuki Rahmat No.54, Bandar Lampung 35215
Penulis Korespodensi : desli@bps.go.id*

Abstrak

*Salah satu tujuan negara Indonesia yaitu mencerdaskan bangsa. Pendidikan merupakan salah satu sarana untuk meningkatkan kecerdasan dan keterampilan manusia. Permen Dikbud No 19 tahun 2016 menyebutkan bahwa wajib belajar selama 12 tahun, yang sebelumnya dalam UU No 20 tahun 2003 menyebutkan bahwa wajib belajar 9 tahun. Namun dari IPM Lampung 2017 terlihat bahwa rata-rata lama sekolah penduduk usia 25 tahun keatas di Provinsi Lampung hanya 7,79 yang artinya masih dibawah angka wajib belajar 12 tahun maupun 9 tahun. Penulisan ini bertujuan untuk melihat perbedaan pengaruh variabel sosial ekonomi dan demografi terhadap rata-rata lama sekolah pada responden usia 16-24 tahun. Data yang digunakan yaitu data mentah Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) Provinsi Lampung Tahun 2017. Hasil pengujian analisis klasifikasi berganda (*multiple classification analysis*) menjelaskan variabel yang mempengaruhi rata-rata lama sekolah adalah jenis kelamin, klasifikasi daerah tempat tinggal, pendidikan kepala rumah tangga, dan golongan pengeluaran rumah tangga.*

Kata kunci: *multiple classification analysis (MCA), rata-rata lama sekolah, Susenas*

1. Pendahuluan

Pendidikan merupakan salah satu sarana untuk meningkatkan kecerdasan dan keterampilan manusia, sehingga kualitas sumber daya manusia sangat tergantung dari kualitas pendidikan. Pentingnya pendidikan, pemerintah Indonesia memberikan perhatian yang cukup besar terhadap pendidikan yang tercermin dari kebijakan wajib belajar 6 tahun yang dicanangkan sejak tahun 1984 dan kemudian meningkat menjadi wajib belajar 9 tahun pada tahun 1994 dan berbagai kebijakan dan usaha dalam meningkatkan kualitas SDM penduduk Indonesia. Bahkan pemerintah sudah mencanang Program Indonesia Pintar yang tertuang dalam Permen Dikbud N0.19 Tahun 2016. PIP bertujuan untuk meningkatkan akses bagia anak usia 6 (enam) sampai 21 (dua puluh satu) tahun untuk mendapatkan layanan pendidikan sampai tamat satuan pendidikan menengah universal/rintisan wajib belajar 12 (dua belas) tahun.

Namun dalam perjalananya usaha memajukan pendidikan tidaklah mudah. Dari angka IPM Lampung 2017 terlihat bahwa rata-rata lama sekolah penduduk usia 25 tahun keatas di Provinsi Lampung hanya 7,79 yang artinya masih dibawah angka wajib belajar 12 tahun maupun 9 tahun. Tahun 2017 di Provinsi Lampung BPS mencatat APM untuk jenjang pendidikan SMP yaitu 79,24 persen, sedangkan APM untuk jenjang pendidikan SMA hanya 58,97 persen. Angka ini masih dibawah target capaian tahun 2017 yang tertuang dalam RPJMD Provinsi Lampung 2015-2019. Pemerintah Provinsi Lampung menargetkan pada tahun 2017 APM SMP yaitu sebesar 82 persen dan APM SMA sebesar 61 persen.

Rata-rata lama sekolah merupakan indikator yang menunjukkan rata-rata jumlah tahun efektif untuk bersekolah yang dicapai penduduk. Jumlah tahun efektif adalah jumlah tahun standar yang harus dijalani oleh seseorang untuk menamatkan suatu jenjang pendidikan. Misalnya, tamat SD adalah 6 tahun, tamat SLTP 9 tahun dan seterusnya.

Berdasarkan penjelesan diatas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui faktor apa saja yang mempengaruhi lama sekolah pada penduduk usia 16-24 tahun di Provinsi Lampung. Hasil dari penelitian ini diharapkan mampu memberikan sumbangan untuk perumusan kebijakan dalam dalam hal pendidikan berdasarkan analisis faktor-faktor yang mempengaruhi lama sekolah di Provinsi Lampung.

2. Bahan dan Metode

2.1. Bahan

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *cross-sectional data*, data yang dikumpulkan pada waktu tertentu yang sama, yaitu menggunakan data Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) Maret 2017 yang menyajikan data dasar sosial ekonomi individu dan rumah tangga di Provinsi Lampung. Sampel Susenas Maret 2017 untuk Provinsi Lampung berjumlah 9.277 rumah tangga dengan 33.880 individu. Sedangkan unit analisis dalam penelitian ini berjumlah 4.440 individu berumur 16-24 tahun dari 3.506 rumah tangga.

Penelitian ini menggunakan satu variabel tak bebas yaitu lama sekolah, Sedangkan variabel penjelas yang digunakan dalam penelitian ini dibagi menjadi empat variabel bebas yaitu klasifikasi tempat tinggal, jenis kelamin, pendidikan kepala rumah tangga, dan golongan pengeluaran rumah tangga.

2.2. Metode

2.2.1. Analisis Independensi

Analisis independensi yang menggunakan uji *chi-square* ini bertujuan untuk mengetahui ada/tidaknya hubungan antara dua variabel. Dalam hal ini akan diuji apakah ada hubungan antara variabel sosial ekonomi dan demografi terhadap variabel lama sekolah. Hasil pengujian independensi lebih lanjut dapat dijadikan bahan pertimbangan untuk menyeleksi variabel yang akan dimasukkan ke dalam model MCA. Dengan kata lain variabel bebas yang terbukti mempunyai hubungan dengan lama sekolah akan dimasukkan ke dalam model MCA.

Data yang digunakan pada analisis ini mensyaratkan berupa kategorik. Oleh karena itu lama sekolah yang awalnya berskala rasio dikonversi dengan membuat dua kategorik, yaitu kurang dari 9 tahun dan 9 tahun atau lebih.

Dalam proses pengujiannya, frekuensi yang terarah disajikan dalam suatu tabel kontingensi yang mempunyai r baris dan c kolom, sehingga disebut sebagai tabel $r \times c$. Hipotesis yang diuji berdasarkan tabel kontingensi tersebut adalah:

H_0 : Tidak ada hubungan antara variabel bebas (variabel sosial ekonomi dan demografi) dengan variabel lamanya sekolah

H_1 : Ada hubungan antara variabel bebas (variabel sosial ekonomi dan demografi) dengan variabel lamanya sekolah

Untuk menguji H_0 , maka digunakan suatu statistik uji *chi-square* yang dihitung berdasarkan nilai frekuensi yang ada pada tabel kontingensi $r \times c$, dengan formula sebagai berikut:

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \left[\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \right] \quad (1)$$

$$E_{ij} = \frac{f_i f_j}{n} \quad (2)$$

O_{ij} : jumlah observasi yang dikategorikan pada baris ke- i dan kolom ke- j

E_{ij} : jumlah observasi yang diharapkan untuk kategori pada baris ke- i dan kolom ke- j

f_i : jumlah observasi baris ke- i

f_j : jumlah observasi baris ke- j

r : banyaknya baris

c : banyaknya kolom

n : jumlah observasi/sampel

Nilai χ_{obs}^2 yang dihasilkan berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas, $db = (r-1)(c-1)$, dan aturan pengambilan keputusannya adalah:

H_0 diterima bila $\chi_{obs}^2 < \chi_{\alpha; (r-1)(c-1)}$

H_0 ditolak bila $\chi_{obs}^2 \geq \chi_{\alpha; (r-1)(c-1)}$

2.2.2. Multiple Classification Analysis

Multiple Classification Analysis (MCA) adalah salah satu metode analisis inferensia yang menggunakan uji statistik dan hampir mirip dengan analisis regresi dengan *dummy* variabel. MCA akan sangat tepat digunakan untuk menunjukkan hubungan antara beberapa variabel bebas yang berskala kategori dengan sebuah variabel tidak bebas yang berskala kategorik ataupun numerik.

Dalam tabel anova biasanya hanya statistik yang diperlukan untuk uji hipotesis yang diperhatikan, seperti F dan signifikansi atau α . Lebih lanjut, misalnya $\alpha < 0,05$ mendorong kita untuk menolak H_0 yang mengindikasikan bahwa paling tidak rata-rata dari satu kategori suatu faktor yang diteliti berbeda secara signifikan dari rata-rata keseluruhan (*Grand Mean*). Oleh karena itu, sangat menarik untuk meneliti lebih

lanjut pola hubungan dari faktor tersebut dengan beberapa variabel penjelas tentang perbedaan yang terjadi di atas.

MCA merupakan suatu metode lebih lanjut untuk memaparkan hasil anova, dengan anova dapat terlihat pengaruh variabel bebas terhadap variabel tidak bebas dan interaksi antara variabel bebas. Dengan MCA akan dapat dilihat bagaimana pengaruh variabel independen bersifat pengganggu atau pendorong.

Asumsi Linier Aditif

Asumsi-asumsi dalam MCA adalah *Simple Linear Additivity* yaitu tiap variabel yang mempengaruhi variabel tak bebas, nilainya bebas dari faktor yang lain. Untuk mengetahui adanya interaksi antar variabel tersebut dan interaksinya dengan menggunakan uji F. Nilai F hitung dan signifikansi dapat dilihat pada *output Analysis of Variance (ANOVA)*.

Langkah-langkah yang digunakan dalam uji anova adalah:

1. Menguji nilai F *main effect* untuk mengetahui keterkaitan antara variabel bebas dengan variabel tak bebas, dengan uji statistiknya adalah:

$$F = \frac{MSK}{MSE} \quad (3)$$

MSK : *mean square* variabel K

MSE : *mean square error*

Dengan hipotesis:

H₀ : Tidak ada keterkaitan antara variabel bebas dan variabel tak bebas

H₁ : Ada keterkaitan antara variabel bebas dan variabel tak bebas

Keputusan:

- a. Jika nilai *p-value* < 5%, maka H₀ ditolak berarti ada keterkaitan antara variabel bebas dengan variabel tak bebas.
 - b. Jika nilai *p-value* ≥ 5%, maka H₀ diterima berarti tidak ada keterkaitan antara variabel bebas dengan variabel tak bebas. Maka variabel bebas dikeluarkan dari model dan pengujian anova diulang sampai semua variabel bebas mempunyai keterkaitan yang signifikan terhadap variabel tak bebas.
2. Menguji Interaksi antar variabel bebas

Dengan cara yang sama, dapat dilakukan uji signifikansi interaksi diantara variabel bebas. Keputusan dari hasil uji dapat dilakukan sebagai berikut:

p-value < 5%, ada interaksi, *p-value* ≥ 5%, interaksi boleh diabaikan.

2.2.3. Koefisien Eta, Beta, dan R²

Pada tabel MCA, semua pengaruh diekspresikan sebagai deviasi-deviasi dari *mean* akhir. Dalam tabel ini juga dihasilkan nilai Eta dan Beta yang merupakan koefisien korelasi.

Eta (η) adalah nilai keeratan hubungan suatu variabel bebas dengan variabel tidak bebas sebelum diperhitungkan variabel bebas lainnya, sedangkan Beta (β) adalah nilai eta setelah dibebaskan dari pengaruh prediktor bebasnya. Karena variabel bebas yang digunakan lebih dari satu, maka keeratan hubungan masing-masing variabel bebas disebut juga korelasi parsial.

Perhitungan eta dan beta adalah sebagai berikut:

Koefisien Eta (η)

$$\eta_i = (JKG_i/JKT)^{1/2}, \text{ yaitu korelasi parsial variabel bebas ke-}i \quad (4)$$

$$JKG_i = \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y})^2, \text{ jumlah kuadrat antar kategori variabel ke-}i \quad (5)$$

JKT : jumlah kuadrat total

\bar{Y}_{ij} : rata-rata kategori ke-j variabel ke-i

\bar{Y} : rata-rata total

Koefisien Beta (β)

$$\beta_i = (JKS_i/JKT)^{1/2}, \text{ yaitu korelasi parsial adjusted variabel ke-}i \quad (6)$$

JKSi : jumlah kuadrat *adjusted* antar kategori variabel ke-i

Besarnya variasi variabel tidak bebas yang dapat diterangkan oleh variabel bebasnya dapat diketahui dari nilai koefisien determinasi R². Seperti koefisien eta dan beta untuk R² dapat dihitung sebelum *adjusted*. Perhitungan proporsi variasi dari variabel tidak bebas yang dapat dijelaskan oleh variabel bebasnya masih memasukkan unsur variabel bebas yang masih dipengaruhi faktor variabel bebas lainnya. Sedangkan R² *adjusted* dalam penghitungannya sudah memasukkan unsur variabel bebas yang tidak dipengaruhi oleh faktor lain.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Hubungan Variabel Bebas terhadap Variabel Lama Sekolah

Penduduk usia 16-24 tahun yang menjadi unit observasi pada penulisan ini sebanyak 4.440 orang. 20,2 persen penduduk usia 16-24 tahun lama mengenyam pendidikan kurang dari 9 tahun, sedangkan sisanya lama sekolahnya yaitu lebih dari 9 tahun.

Berdasarkan daerah tempat tinggalnya, 22 persen penduduk usia 16-24 tahun yang tinggal perdesaan lama sekolahnya kurang dari 9 tahun, hal ini lebih sedikit jika dibandingkan dengan persentase penduduk usia 16-24 tahun yang tinggal di perkotaan yaitu sebanyak 13,9 persen yang lama sekolahnya kurang dari 9 tahun.

Dilihat dari jenis kelamin ternyata persentase penduduk laki-laki yang berusia 16-24 tahun dengan lama sekolah kurang dari 9 tahun lebih besar dibandingkan dengan penduduk perempuan, yaitu 23,8 persen berbanding dengan 16,2 persen.

Semakin tinggi tingkat pendidikan kepala rumah tangga maka diharapkan semakin terbuka wawasan tentang pentingnya pendidikan bagi anak-anak. Dari hasil pengolahan data, terlihat bahwa semakin tinggi pendidikan kepala rumah tangga maka semakin kecil persentase anggota rumah tangga berusia 16-24 tahun dengan lama sekolah kurang dari 9 tahun. Hanya 3,6 persen penduduk usia 16-24 tahun yang lama sekolahnya kurang dari 9 tahun dengan kepala rumah tangga berpendidikan perguruan tinggi, sedangkan 26,8 persen penduduk usia 16-24 tahun yang lama sekolahnya kurang dari 9 tahun dengan kepala rumah tangga berpendidikan SD.

Semakin tinggi golongan pengeluaran per kapita di rumah tangga semakin rendah persentase penduduk usia 16-24 tahun yang lama sekolahnya kurang dari 9 tahun. 25,3 persen penduduk usia 16-24 tahun yang tinggal di rumah tangga dengan golongan pengeluaran rendah memiliki lama sekolah kurang dari 9 tahun, 20,5 persen tinggal di rumah tangga dengan golongan pengeluaran sedang, dan 10,9 persen tinggal di rumah tangga dengan golongan pengeluaran tinggi.

Untuk melihat apakah dia variabel mempunyai hubungan atau tidak digunakan analisis independensi dengan *chi-square*.

Tabel 1. *P-value* dan hasil keputusan pengujian independensi dengan *chi-square*

Variabel Bebas	Nilai α	<i>p-value</i>	keputusan
(1)	(2)	(3)	(4)
Daerah tempat tinggal	0,05	0,000	Tolak H_0
Jenis kelamin	0,05	0,000	Tolak H_0
Tingkat pendidikan KRT	0,05	0,000	Tolak H_0
Golongan pengeluaran rumah tangga	0,05	0,000	Tolak H_0

Tabel 1 memuat *p-value* dan nilai α sebesar 5 persen sebagai dasar pengambilan keputusan dalam uji independensi. Semua *p-value* pengujian adalah 0,000. Angka ini jauh lebih kecil dari nilai α sebesar 0,05. Sehingga keputusan yang diambil adalah menolak H_0 . Artinya semua variabel bebas yang diuji secara statistik mempunyai hubungan terhadap lama sekolah.

Kesimpulan tersebut akan memperkuat analisis inferensia selanjutnya dengan menggunakan MCA. Oleh karena itu semua variabel bebas (daerah tempat tinggal, jenis kelamin, tingkat pendidikan KRT, dan golongan pengeluaran rumah tangga) dapat dimasukkan pada model MCA.

4.2. Multiple Classification Analysis

4.2.1. Uji Main Effect

Sebelum analisis MCA dilakukan, terlebih dahulu dapat dilihat dari tabel anova apakah variabel bebas yang dimasukkan benar-benar memberikan pengaruh terhadap lama sekolah. Dari tabel anova, terlihat keempat variabel memiliki nilai signifikansi kurang dari 5 persen. Dapat dikatakan, variabel daerah tempat tinggal, jenis kelamin, tingkat pendidikan kepala rumah tangga, dan golongan pengeluaran rumah tangga mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap lama sekolah pada penduduk usia 16-24 tahun di Provinsi Lampung, yang kemudian keempat variabel tersebut dianalisis lebih lanjut dengan model MCA.

Tabel 2. *P-value* dan hasil keputusan pengujian *main effect*

Variabel	p-value	Nilai α	keputusan
(1)	(2)	(3)	(4)
saerah tempat tinggal	0,000	0,05	Tolak H_0
jenis Kelamin	0,000	0,05	Tolak H_0
kelompok Pendidikan KRT	0,000	0,05	Tolak H_0
Golongan pengeluaran	0,000	0,05	Tolak H_0

4.2.2. Uji Interaksi

Untuk memenuhi asumsi model MCA, yaitu tidak ada interaksi di antara variabel bebas, maka sebelum analisis dilakukan terlebih dahulu dilihat ada tidaknya interaksi di antara variabel bebas yang dapat dilihat dalam tabel anova. Dua variabel bebas dikatakan memiliki interaksi bila nilai signifikansi pengujian dari variabel bebas tersebut lebih kecil dari nilai $\alpha = 0,05$. Tapi, jika dalam pengujian ternyata terdapat interaksi perlu dilakukan pengujian tahap berikutnya.

Dari hasil pengujian interaksi pada Tabel 2 terjadi dua interaksi, yaitu antara daerah tempat tinggal dan pendidikan kepala rumah tangga serta jenis kelamin dan pendidikan kepala rumah tangga, karena *p-value* yang kurang dari 5 persen, selebihnya tidak ada interaksi. Oleh karena itu dilakukan pengujian berikutnya dengan menghitung rasio antara *sum of squares interaction* dengan *sum of squares main effect*. *Sum of squares interaction* antara variabel daerah tempat tinggal dan pendidikan kepala rumah tangga yaitu sebesar 99,687 dan *sum of squares interaction* variabel jenis kelamin dan pendidikan kepala rumah tangga yaitu sebesar 112,147 dan *sum of squares main effect* yaitu sebesar 4361,438, sehingga diperoleh masing-masing rasio sebesar 0,02 dan 0,03. Berdasarkan nilai rasio yang kurang dari 10%, jadi dapat disimpulkan interaksi diantara variabel jenis kelamin dan pendidikan kepala rumah tangga boleh diabaikan atau dengan kata lain model MCA dapat dilanjutkan dengan menggunakan semua variabel bebas tersebut.

Tabel 3. *P-value* dan hasil keputusan pengujian interaksi antara variabel bebas

Interaksi	p-value	Nilai α	keputusan
(1)	(2)	(3)	(4)
Daerah tempat tinggal*jenis kelamin	0,707	0,05	Terima H_0
Daerah tempat tinggal *pendidikan KRT	0,002	0,05	Tolak H_0
Daerah tempat tinggal *golongan pengeluaran	0,301	0,05	Terima H_0
jenis kelamin*pendidikan KRT	0,001	0,05	Tolak H_0
jenis kelamin*golongan pengeluaran	0,666	0,05	Terima H_0
pendidikan KRT*golongan pengeluaran	0,961	0,05	Terima H_0

4.2.3. Korelasi Parsial dan Simultan

Hasil perhitungan dengan metode MCA dapat dilihat dalam tabel 4. Besarnya pengaruh setiap variabel bebas terhadap rata-rata lama sekolah dapat dilihat dari nilai β yang telah dibebaskan dari faktor lain. Variabel pendidikan kepala rumah tangga merupakan faktor yang mempunyai pengaruh paling besar terhadap rata-rata lama sekolah, bila dibandingkan dengan variabel lainnya. Hal ini ditunjukkan dengan nilai korelasi parsial yang dihasilkan pada variabel pendidikan kepala rumah tangga sebesar 0,235, kemudian variabel golongan pengeluaran rumah tangga ($\beta = 0,135$), variabel jenis kelamin dan daerah tempat tinggal memiliki korelasi yang masing-masing sebesar 0,091 dan 0,080.

Multiple R² atau nilai korelasi secara simultan menunjukkan besarnya pengaruh semua variabel yang menerangkan lama sekolah. Pada tabel *Model Goodness of Fit* dapat diketahui bahwa nilai *multiple R²* sebesar 0,128. Ini artinya secara bersama-sama ke empat variabel bebas dapat menjelaskan variasi rata-rata lama sekolah sebesar 12,8 persen, sedangkan sisanya 77,2 persen dijelaskan oleh faktor lain.

Tabel 4. Rata-rata lama sekolah menurut variabel bebas dan koefisien MCA

Variabel bebas	Korelasi Parsial	Rata-rata lama sekolah			Koefisien MCA
		N	<i>Unadjusted</i>	<i>Adjusted for factor</i>	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Daerah tempat tinggal	$\eta = 0,181$ $\beta = 0,080$				
Perkotaan		1338	10,70	10,27	0,34
Perdesaan		3102	9,60	9,79	-0,14
Jenis kelamin	$\eta = 0,100$ $\beta = 0,091$				
Laki-laki		2292	9,67	9,69	-0,24
Perempuan		2148	10,22	10,20	0,26
Tingkat pendidikan KRT	$\eta = 0,308$ $\beta = 0,235$				
<= SD		2603	9,35	9,48	-0,46
SMP		771	9,96	10,00	0,06
SMA		841	11,08	10,83	0,89
PT		225	12,29	11,67	1,73
Golongan pengeluaran rumah tangga	$\eta = 0,236$ $\beta = 0,135$				
40% rendah		1621	9,29	9,53	-0,41
40% sedang		1862	9,91	9,98	0,04
20% tinggi		957	11,07	10,54	0,61

4.2.4. Interpretasi Pengaruh Variabel Bebas

Affandi dalam Hanif (2006) mengatakan bahwasanya faktor yang berpengaruh pada kecenderungan seorang siswa untuk melanjutkan pendidikan ke jenjang yang lebih tinggi diantaranya adalah: daerah tempat tinggal, jenis kelamin, jarak ke sekolah, penanggung biaya makan/tinggal, penanggung biaya sekolah, kegiatan belajar di luar jam sekolah/tutorial, biaya total pendidikan, pendapatan rumahtangga, jenis sekolah dan tingkat pendidikan kepala rumah tangga.

Pada tabel 4 terlihat bahwa rata-rata lama sekolah penduduk usia 16-24 tahun yang tinggal di daerah perkotaan lebih tinggi dibandingkan dengan yang tinggal di daerah perdesaan. Berlian (2011) menyebutkan bahwa faktor yang terkait dengan rendahnya pencapaian Wajar Diknas yaitu kesulitan menuju sekolah dan kurangnya layanan pendidikan. Pada umumnya di daerah perdesaan fasilitas sekolah yang ada belum memadai dibandingkan dengan fasilitas yang ada di daerah perkotaan. Hal ini tentunya akan berpengaruh terhadap partisipasi sekolah penduduk di wilayah perdesaan.

Rata-rata lama sekolah untuk penduduk usia 16-24 tahun perempuan lebih tinggi dibandingkan dengan penduduk laki-laki, yaitu 10,22 dan 9,69. Dengan dikontrol dengan variabel lain dalam perhitungan merubah besarnya kemampuan variabel ini dalam menerangkan variasi rata-rata lama sekolah.

Menurut Indriyanto (1996), orang tua dengan tingkat pendidikan yang lebih tinggi mempunyai kemampuan untuk membantu dan mengarahkan anaknya dalam kegiatan-kegiatan yang berkaitan dengan sekolah. Rata-rata lama sekolah penduduk usia 16-24 tahun di atas *grand mean* (9,940) terjadi pada kepala rumahtangga yang berpendidikan SMP atau lebih dan terendah pada kepala rumah tangga yang berpendidikan SD ke bawah. Variabel pendidikan kepala rumah tangga merupakan variabel pendorong terhadap lama sekolah pada penduduk usia 16-24 tahun.

Status finansial rumahtangga dapat mempengaruhi status sekolah anggota rumah tangga. Semakin baik finansial rumah tangga diharapkan anggota rumah tangga dapat bersekolah sampai pada tingkat pendidikan tertentu. Baik rata-rata lama sekolah yang *unadjusted* maupun setelah dikontrol variabel bebas, menunjukkan pola yang sama. Semakin tinggi golongan pengeluaran rumah tangga, semakin lama sekolahnya. Penduduk usia 16-24 tahun yang golongan pengeluaran rumah tangga kategori tinggi 20% rata-rata lama sekolah sebesar 11,07 tahun (di atas *grand mean*). Variabel pengeluaran rumah tangga merupakan variabel pendorong pada penduduk usia 16-24 tahun terhadap lama sekolah, karena terjadi penurunan koefisien korelasi parsial.

5. Kesimpulan

1. Rata-rata lama sekolah penduduk usia 16-24 tahun di Provinsi Lampung tahun 2017 yaitu 9,94. Namun masih ada 20,2 persen penduduk usia 16-24 tahun yang lama sekolahnya belum mencapai 9 tahun.
2. Faktor yang mempengaruhi lama sekolah yaitu, daerah tempat tinggal, jenis kelamin, pendidikan kepala rumah tangga, dan golongan pengeluaran rumah tangga. Variabel yang paling berpengaruh yaitu variabel pendidikan kepala rumah tangga.
3. Di daerah perdesaan perlu adanya penyediaan sarana dan prasarana pendidikan agar pendidikan di daerah perdesaan dapat sepadan dengan daerah perkotaan.
4. Perlunya sosialisasi tentang pentingnya pendidikan, karena pendidikan merupakan modal untuk kehidupan yang lebih baik. Dengan adanya sosialisasi pentingnya pendidikan diharapkan para orang tua lebih memperhatikan masalah pendidikan untuk anak-anaknya.

6. Daftar Pustaka

Indriyanto, Bambang. 1996. *Kontribusi Relatif Sumber Belajar di Rumah Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa SD; Suatu Analisis Data Sekunder di Tiga Propinsi*. Jurnal: Kajian Pendidikan dan Kebudayaan No.007/Tahun II/Nov 1996. Jakarta: Depdiknas.

Hanif, A. (2006). *Faktor Sosial Ekonomi Yang Mempengaruhi Lama Sekolah Pada Anak Usia 16-24 Tahun Propinsi DKI Jakarta Tahun 2003*. Skripsi. Sekolah Tinggi Ilmu Statistik.

Berliana, Nur (2011). *Faktor-faktor yang Terkait dengan Rendahnya Pencapaian Wajib Belajar Pendidikan Dasar 9 Tahun*. Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan, Vol. 17, Nomor 1.

Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. 2017. *Statistik Kesejahteraan Rakyat Provinsi Lampung Tahun 2017*. Lampung: BPS Provinsi Lampung.

KEANEKARAGAMAN ARTHROPODA TANAH PADA DUA TIPE PENGELOLAAN LAHAN KOPI (*Coffea spp.*) DI KECAMATAN GEDUNG SURIAN KABUPATEN LAMPUNG BARAT

Siti Ardiyanti^{1*}, Suratman Umar¹, Nismah Nukmal¹, M. Kanedi¹

¹Jurusan Biologi Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung

*Penulis Korespondensi: siti.adriyanti@gmail.com

ABSTRAK

Frekuensi pengolahan lahan serta penggunaan bahan kimia secara terus menerus dapat berdampak besar terhadap organisme tanah. Kesuburan tanah dapat dilihat dari keberadaan organisme tanah salah satunya arthropoda. Keanekaragaman arthropoda tanah pada lahan konvensional akan berbeda jika dibandingkan dengan lahan organik. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh pengelolaan lahan terhadap kelimpahan dan keanekaragaman arthropoda tanah. Pengambilan sampel dilakukan di Desa Warasakti pada 2 tipe lahan kopi, dengan aplikasi senyawa kimia (konvensional) dan tanpa aplikasi senyawa kimia (organik) yang letaknya berdampingan. Pada setiap lahan, dipasang 50 perangkap jebak tersebar pada 10 plot. Sampel arthropoda yang diperoleh diidentifikasi sampai pada tingkat takson famili. Hasil menunjukkan bahwa tingkat keanekaragaman dan kelimpahan arthropoda pada kedua lahan termasuk dalam kategori sedang, dengan nilai ($H = 1,57$) dan ($DMg = 3,82$) pada lahan konvensional. Sedangkan pada lahan organik, memiliki nilai ($H' = 1,67$) dan ($DMg = 3,65$). Oleh karena itu, pengolahan lahan secara organik pada daerah tersebut belum terlalu berpengaruh pada keanekaragaman dan kelimpahan arthropoda tanah, karena waktu pelaksanaannya relatif singkat, yaitu 3 tahun. Meskipun kedua lahan memiliki kriteria komunitas yang sama, pada lahan organik jumlah individu yang ditemukan lebih banyak dibandingkan pada lahan konvensional.

Kata kunci : keanekaragaman, arthropoda, konvensional, organik, perangkap jebak

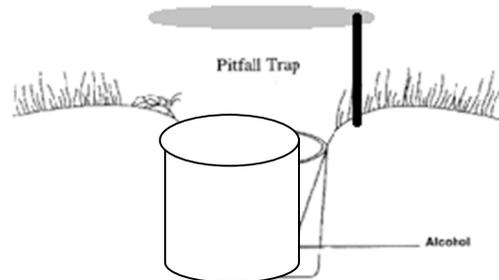
1. Pendahuluan

Di Indonesia kopi mulai diproduksi tahun 1696 di pulau Jawa. Pada saat itu, penanaman kopi hanya dilakukan secara coba-coba, namun karena hasilnya memuaskan dan dipandang cukup menguntungkan sebagai komoditi perdagangan, maka penanamannya mulai dilakukan secara serius dan mulai disebarkan ke berbagai daerah termasuk daerah Lampung (Najiyanti dan Danarti, 2004).

Tanah merupakan habitat dari bakteri, jamur, serta berbagai macam fauna, seperti nematoda, cacing tanah, dan arthropoda tanah yang memiliki fungsi khusus dalam ekosistem (Jeffrey dan Gardi, 2009). Di dalam tanah, berbagai nutrisi tersedia bagi pertumbuhan tanaman, tergantung dari interaksi antara akar tanaman, mikroorganisme, dan fauna tanah (Bonkowski *et al*, 2000). Organisme tanah memiliki peran dalam menjaga struktur tanah, siklus hara, proses dekomposisi, serta menjaga keseimbangan organisme tanah, termasuk hama tanaman (Moore dan Walter, 1988). Menurut Curry (1986) ; Lee (1991), frekuensi pengolahan lahan serta penggunaan bahan kimia berdampak besar terhadap kelimpahan, keanekaragaman serta aktivitas organisme tanah. Hal ini disebabkan adanya perubahan suhu tanah, kelembaban, serta jumlah dan kualitas bahan organik dalam tanah.

Arthropoda merupakan organisme yang jumlahnya sangat banyak dan dapat ditemukan di hampir seluruh biosfer (Campbell *et al*, 2008). Arthropoda tanah memiliki peran yang sangat vital dalam rantai makanan khususnya sebagai dekomposer, karena tanpa organisme ini alam tidak akan dapat mendaur ulang bahan organik yang sangat berpengaruh terhadap tingkat kesuburan tanah. Oleh karena itu, kegiatan identifikasi kelimpahan serta keanekaragaman jenis merupakan hal penting yang harus dilakukan, sehingga

peran organisme tersebut terhadap lingkungan dapat diketahui (Lavelle *et al*, 2006). Berdasarkan fakta dan permasalahan tersebut, maka penelitian ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh pengelolaan lahan dengan perlakuan kimiawi (konvensional) dan tanpa perlakuan kimiawi (organik) terhadap kelimpahan dan keanekaragaman arthropoda tanah.



Gambar 4. Perangkat jebak (*Pitfall trap*).

1. Proses Pengambilan Sampel

Pengambilan sampel arthropoda tanah dilakukan dengan menanamkan perangkat jebak pada setiap titik sampling hingga permukaan gelas perangkat setara dengan permukaan tanah. Proses pengambilan sampel arthropoda dilakukan selama 1 x 24 jam.

2. Pengukuran Faktor Abiotik

Faktor abiotik yang diukur adalah suhu tanah. Suhu tanah diukur menggunakan *soil thermometer*. Pengukuran faktor abiotik dilakukan pada setiap lahan dengan 10 kali pengulangan.

3. Proses Identifikasi

Identifikasi arthropoda yang diperoleh dilakukan sampai pada tingkat famili. Proses identifikasi dilakukan di Laboratorium Zoologi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung menggunakan mikroskop stereo (Olympus) dengan panduan buku identifikasi Borror, *et al* (1997).

a. Analisis Data

Analisis data dilakukan secara analisis deskriptif kuantitatif dengan menghitung nilai kekayaan jenis, keragaman jenis, kemerataan jenis, dan kesamaan dua lahan. Berikut persamaan – persamaan yang digunakan dalam analisis data (Odum, 1983) :

1. Kekayaan Jenis (*Spesies Richness*) dengan Indeks Kekayaan Margalef :

$$DMg = \frac{S - 1}{\ln N}$$

Keterangan:

DMg = indeks kekayaan jenis Margalef

S = jumlah jenis yang ditemukan

N = jumlah individu seluruh jenis yang ditemukan

Kriteria komunitas berdasarkan indeks kekayaan jenis dapat dilihat pada Tabel. 4

Tabel. 4. Kriteria indeks kekayaan jenis

Kriteria	Indeks kekayaan jenis (DMg)
Baik	> 4,0
Moderat	2,5 – 4,0
Buruk	< 2,5

2. Keragaman Jenis (*Diversity*) dengan Indeks Shanon – Wiener :

$$H' = - \sum p_i \ln p_i$$

keterangan :

- H' = indeks keanekaragaman
 pi = proporsi (ni/N)
 ni = jumlah individu jenis ke-i
 N = jumlah individu seluruh jenis yang ditemukan
 ln = logaritma natural

Menurut Fitriana (2006), indeks keanekaragaman (H') komunitas artropoda dikategorikan menjadi rendah, sedang, dan tinggi. Kategori tersebut dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Kategori keanekaragaman berdasarkan Indeks Shannon (H')

Nilai Indeks Shannon (H')	Kategori Keanekaragaman
< 1,0	Rendah
1,0 - 3,322	Sedang
> 3,322	Tinggi

Sumber : (Fitriana, 2006).

3. Kemerataan Jenis (*Eveness*) dengan persamaan :

$$E = \frac{H'}{\ln S}$$

keterangan :

- E = indeks kemerataan jenis
 S = jumlah jenis
 H' = indeks keanekaragaman *Shanon – Wiener*

Kemerataan jenis memiliki nilai E berkisar 0 – 1. Apabila nilai E = 1 berarti pada habitat tersebut tidak ada jenis yang mendominasi, dan sebaliknya apabila E mendekati 0 terdapat jenis yang mendominasi.

4. Indeks Kesamaan Dua Lahan (S) Sorenson (1928) dalam Odum (1996) dengan persamaan:

$$S = \frac{2c}{a + b}$$

keterangan :

- S = indeks kesamaan dua lahan
 c = jumlah jenis yang terdapat pada habitat a dan b
 a = jumlah jenis dalam habitat a
 b = jumlah jenis dalam habitat b

3. Hasil dan Pembahasan

a. Keanekaragaman Arthropoda Tanah

Hasil penelitian yang dilakukan pada 2 tipe lahan perkebunan kopi (konvensional dan organik), menunjukkan bahwa terdapat beranekaragam arthropoda yang terdiri dari 11 Ordo, 28 Famili, dan 32 Genus. Pada kedua tipe lahan tersebut, jumlah Ordo dan Famili arthropoda yang diperoleh adalah sama, namun jumlah individu yang diperoleh berbeda pada setiap lahan. Selain itu, kedua lahan juga sama – sama didominasi oleh arthropoda dari ordo Collembola, Coleoptera, dan Hymenoptera. Pada lahan konvensional diperoleh total 1.182 individu, sedangkan pada lahan organik diperoleh total 1.647 individu. Hasil identifikasi dan perbandingan keanekaragaman arthropoda yang ditemukan pada kedua tipe lahan kopi di Desa Warasakti, Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Perbandingan keanekaragaman arthropoda pada lahan kopi konvensional dan organik di desa warasakti

NO	ORDO	FAMILI	GENUS	JUMLAH SPESIES	
				KONVENSIONAL	ORGANIK
1	Collembola	Entomobryidea	<i>Entomobrya</i>	281	356
		Onychiuridae	<i>Onychiurus</i>	247	265
		Σ		528	621
2	Coleoptera	Staphylinidae	<i>Lathrobium</i>	7	9
		Eucinetidae	<i>Eucinetus</i>	6	6
		Scolytidae	<i>Dendroctonus</i>	17	16

		Corylophidae		249	326
			<i>Lewisium</i>	3	19
		Dermestidae	<i>Dermestes</i>	8	18
		Scydmaenidae	<i>Scydmaenus</i>	1	6
		Σ		291	400
3	Hymenoptera	Formicidae	<i>Solenopsis</i>	18	68
			<i>Formica</i>	17	82
			<i>Pheidole</i>	63	58
			<i>Camponotus</i>	11	9
		Mymaridae	<i>Asaphes</i>	3	5
		Ceraphronidae	<i>Ceraphron</i>	7	8
		Σ		119	230
4	Diptera	Dolichopodidae	<i>Dolichopus</i>	9	7
		Drosophilidae	<i>Drosophilla</i>	24	98
		Cecidomyiidae	<i>Lestremia</i>	2	8
		Phoridae		12	25
		Chaoboridae	<i>Chaoborus</i>	3	4
		Culicidae	<i>Culex</i>	11	24
		Lauxaniidae	<i>Minettia</i>	2	9
		Σ		63	175
5	Isopoda	Cylistidae	<i>Cylisticus</i>	119	138
6	Ixodida	Argasidae	<i>Argas</i>	22	23
7	Orthoptera	Tridactylidae	<i>Tridactylus</i>	6	11
		Gryllidae	<i>Acheta</i>	8	7
		Σ		14	18
8	Dermaptera	Labiduridae	<i>Anisolabis</i>	11	17
9	Araneae	Scytodidae	<i>Scydodes</i>	5	6
		Dysderidae	<i>Dysdera</i>	2	5
		Σ		7	11
10	Psocoptera	Lepidopsocidae	<i>Lepolepis</i>	1	4
		Liposcelidae	<i>Liposcelis</i>	3	6
		Σ		4	10
11	Blattodea	Blattidae	<i>Blatella</i>	4	4
	Jumlah Individu Arthropoda			1.182	1.647

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, kriteria komunitas pada lahan konvensional dan lahan organik berada dalam keadaan sedang. Hal tersebut diketahui dari nilai indeks kekayaan jenis Margalef, dimana lahan konvensional memiliki nilai ($DMg = 3,82$) dan lahan organik memiliki nilai ($DMg = 3,65$).

Pada lahan konvensional indeks keanekaragaman memiliki nilai ($H' = 1,56$), sedangkan pada lahan organik memiliki nilai ($H' = 1,67$). Oleh karena itu, diketahui bahwa komunitas artropoda pada kedua lahan memiliki keanekaragaman dalam kategori sedang. Menurut Price (1975), parameter yang menentukan nilai indeks keanekaragaman (H') pada suatu ekosistem ditentukan oleh jumlah spesies dan kelimpahan relatif spesies pada suatu komunitas.

Suatu komunitas dikatakan mempunyai keanekaragaman tinggi jika komunitas tersebut disusun oleh banyak spesies dengan kelimpahan spesies yang sama atau hampir sama. Sebaliknya, jika komunitas tersebut disusun oleh spesies dengan kelimpahan yang tidak merata atau ada spesies tertentu dari arthropoda yang mendominasi, maka keanekaragamannya akan rendah (Soegianto, 1994). Keanekaragaman dan dominansi memiliki korelasi negatif (Oka, 2005).

Pada kedua lahan pemerataan jenis (*Evenness*) memiliki nilai E mendekati 0, dimana pada lahan konvensional ($E = 0,47$) dan pada lahan organik ($E = 0,50$) sehingga diketahui bahwa pada kedua lahan terdapat jenis yang mendominasi. Nilai pemerataan jenis (E) ini menunjukkan bahwa keanekaragaman pada kedua lahan yang bernilai sedang disebabkan karena masih adanya spesies tertentu yang mendominasi pada kedua lahan tersebut.

Menurut Price (1997), keanekaragaman merupakan salah satu ukuran keseimbangan ekosistem. Keanekaragaman yang tinggi menjadikan jaring – jaring makanan yang terbentuk lebih kompleks, sehingga

kestabilan ekosistem akan terus meningkat. Keanekaragaman akan cenderung rendah dalam ekosistem yang secara fisik terkendali (menjadi sasaran faktor pembatas fisik dan kimia yang kuat) dan akan tinggi dalam ekosistem yang diatur secara biologi (Odum, 1983). Pada kedua lahan, perlakuan fisik yang terkendali menyebabkan adanya dominansi suatu spesies dan keanekaragaman yang cenderung rendah.

Saat penelitian ini dilakukan, peralihan sistem olah lahan secara biologi pada lahan organik tergolong masih pendek, yaitu sekitar 3 tahun, sehingga antara lahan konvensional dan organik memiliki kategori keanekaragaman yang relatif sama. Meskipun demikian, perolehan individu pada kedua lahan sangat berbeda. Pada lahan organik, sistem olah lahan secara biologi sudah menunjukkan hasil berupa peningkatan total individu yang jumlahnya 1,4 kali lebih banyak dibandingkan total individu yang diperoleh pada lahan konvensional. Hal tersebut jelas dipengaruhi oleh sistem pengolahan lahan yang diberlakukan pada masing – masing lahan.

b. Identifikasi Arthropoda Berdasarkan Peran Ekologi

Hasil pengelompokkan sampel arthropoda berdasarkan peranannya, yaitu herbivor, predator, dan dekomposer pada lahan konvensional dan organik menunjukkan komposisi seperti pada Tabel 8.

Tabel 8. Perbandingan komposisi arthropoda pada lahan konvensional dan organik berdasarkan peranan ekologinya.

Peranan	Famili	Literatur	Lahan Konvensional		Lahan Organik	
			Σ	%	Σ	%
Predator	Formicidae, Mymaridae, Ceraphronidae, Dolichopodidae, Drosophilidae, Chaoboridae, Culicidae, Staphylinidae, Scytodidae, Dysderidae, Argasidae	Borror, <i>et al.</i> , 1997	213	18,02%	423	25,68%
Herbivor	Cecydomyiidae, Tridactylidae, Gryllidae, Eucinetidae, Scolytidae, Corylophidae, Cylindridae, Lepidopsocidae, Liposcelidae	Borror, <i>et al.</i> , 1997	418	35,36%	545	33,08%
Dekomposer	Entomobryidae, Onychiuridae, Phoridae, Laelaniidae, Dermestidae, Scydmaenidae	Borror, <i>et al.</i> , 1997	551	46,62%	679	41,23%

Pada Tabel 8., peranan arthropoda pada kedua lahan memiliki persentase yang berbeda. Predator yang ditemukan pada lahan organik 7,66% lebih banyak dibandingkan predator pada lahan konvensional. Sebaliknya, herbivor dan dekomposer yang ditemukan pada lahan konvensional lebih banyak 2,28% – 5,39% dibandingkan herbivor dan dekomposer yang ditemukan pada lahan organik. Keanekaragaman di ekosistem pertanian dapat mempengaruhi pertumbuhan dan produksi tanaman, dimana arthropoda dapat berperan sebagai hama, musuh alami (predator), maupun dekomposer yang berperan dalam kesuburan tanah (Pracaya, 2007).

Pada lahan konvensional, jumlah herbivor dan dekomposer yang lebih banyak dibandingkan pada lahan organik disebabkan karena jumlah predator pada lahan konvensional lebih sedikit dibandingkan pada lahan organik. Menurut Suheriyanto (2008), Predator merupakan organisme yang hidup bebas dengan memakan, membunuh atau memangsa organisme lain. Predator dapat memangsa semua tingkat perkembangan mangsanya (telur, larva, nimfa, pupa, dan imago), seekor predator akan membunuh dan memakan atau menghisap mangsanya dengan cepat. Seekor predator memerlukan banyak mangsa selama

hidupnya. Arthropoda pemakan tumbuhan (herbivora) merupakan arthropoda yang termasuk dalam golongan hama menempati trofi kedua. Arthropoda herbivor memiliki kemampuan makan yang berbeda – beda tergantung pada kemampuannya untuk menyesuaikan diri dengan sumber makanannya. Dalam proses makan, arthropoda dapat memanfaatkan seluruh tumbuhan (belalang), sebagian tumbuhan, bahkan seluruh biji (kumbang pengerek) (Suheriyanto, 2008). Menurut Untung (2006), beberapa arthropoda dapat menimbulkan kerugian karena menyerang tanaman budidaya dan merusak produksi yang disimpan. Beberapa contoh arthropoda tersebut, antara lain belalang (*Dissostura*), belalang sembah (*Stagmomantis sp.*), kecoak (*Blattaorientalis*), dan walang sangit (*Leptocorixa auta*).

Arthropoda tanah tidak hanya memakan tumbuh – tumbuhan yang hidup, tetapi juga memakan tumbuh – tumbuhan yang sudah mati, sehingga arthropoda tanah banyak yang berperan dalam proses dekomposisi (Sari, 2014). Arthropoda dekomposer atau pengurai merupakan organisme yang menguraikan bahan organik yang berasal dari organisme mati yang sebelumnya telah melalui proses penguraian oleh organisme detritivor. Detritivor adalah organisme yang mengkonsumsi hewan atau tumbuhan yang telah mati dan membusuk. Contoh organisme tersebut dapat ditemukan pada Ordo Coleoptera, Blattaria, Diptera, dan Isoptera, beberapa familinya antara lain, Leiodidae (Coleoptera), Scarabaeidae (Coleoptera), Termitidae (Isoptera), Blattidae (Blattaria), Scathophagidae (Diptera) (Odum, 1996).

Proses dekomposisi tidak akan berjalan cepat bila tidak ditunjang oleh aktifitas arthropoda tanah. Keberadaan arthropoda tanah sangat dipengaruhi oleh ketersediaan energi dan sumber makanan untuk kelangsungan hidupnya. Keanekaragaman arthropoda disetiap tempat berbeda, bergantung pada keadaan lingkungannya. Lingkungan yang memiliki banyak cemaran kimia atau kesuburan tanah yang rendah dapat menurunkan tingkat keanekaragaman arthropoda tanah, sedangkan lingkungan yang memiliki bahan organik tanah yang tinggi dapat meningkatkan keanekaragaman arthropoda tanah di sekitarnya (Sari, 2014). Pada lahan organik, memiliki tingkat keanekaragaman arthropoda yang sedikit lebih tinggi disertai jumlah individu yang lebih melimpah dibandingkan pada lahan konvensional, hal itu menunjukkan bahwa keadaan lingkungan lahan organik lebih baik dibandingkan keadaan lingkungan pada lahan konvensional. Arthropoda tanah memegang peranan penting sebagai *soil engineer*, *litter transformer*, *soil decomposer*, dan predator. Serangga tanah sebagai *litter transformer* dan *soil decomposer* masing – masing organisme melakukan fragmentasi dan degradasi bahan organik (Borror *et al*, 1997).

c. Analisis Indeks Kesamaan Dua Lahan Sorensen (S) dan Pengaruh Faktor Abiotik Pada Kedua Tipe Lahan

Nilai keragaman, kelimpahan, dan kekayaan jenis yang hampir sama pada kedua lahan dipengaruhi oleh berbagai faktor. Menurut Irwan (1996), lingkungan merupakan ruang tiga dimensi dimana organisme merupakan salah satu bagian didalamnya. Lingkungan dapat berubah setiap saat dan pengaruhnya terhadap organisme akan berbeda menurut waktu, tempat, dan keadaan organisme. Oleh karena itu, analisis kesamaan kedua lahan dilakukan dengan hasil tertera pada Tabel 9.

Tabel 9 . Indeks kesamaan dua lahan Sorensen (S) arthropoda pada kedua lahan kopi

Tipe Lahan	H	DMg	E	S
Konvensional	1,56	3,82	0,47	1
Organik	1,67	3,65	0,50	

Pada Tabel 9., dapat diketahui nilai kesamaan (S) kedua tipe lahan tersebut sebesar 1, maka secara keseluruhan komunitas pada kedua lahan sama. Nilai kesamaan komunitas (S) bervariasi antara 0 sampai 1. Nilai 0 diperoleh jika tidak ada spesies yang sama di kedua komunitas, sedangkan nilai 1 akan diperoleh jika seluruh komposisi spesies di kedua komunitas sama (Odum, 1996).

Kesamaan dua lahan ini dapat dipengaruhi karena penggunaan sistem pertanian organik tergolong masih pendek, yaitu sekitar 3 tahun, sehingga masih banyak meninggalkan residu senyawa kimia yang berpengaruh terhadap arthropoda yang ada. Pencemaran oleh pestisida yang tertinggal di lingkungan fisik dan biotik merupakan akibat dari aplikasi pestisida secara langsung yang ditunjukkan pada sasaran tertentu seperti pada tanaman dan tanah. Residu pestisida dapat bergerak dalam rantai makanan dari tingkat trofi terendah menuju ke tingkat trofi tertinggi (Untung, 2006).

Faktor lain yang mendukung kesamaan kedua lahan adalah letak lahan yang relatif dekat (berdampingan), sehingga faktor lingkungan seperti suhu, intensitas cahaya, struktur tanah, pH, dan tanaman – tanaman yang ada di sekitar lahan juga relatif sama. Pengukuran faktor abiotik pada kedua lahan

dilakukan untuk mengetahui kondisi lingkungan dan bagaimana pengaruh yang ditimbulkan. Pada lahan konvensional suhu berkisar antara 24°C – 26°C dan diperoleh suhu rata-rata 24,7°C, sedangkan pada lahan organik suhu berkisar antara 24°C – 26°C dan diperoleh suhu rata-rata 25°C. Suhu tersebut merupakan suhu yang baik bagi kehidupan arthropoda, sehingga arthropoda semakin banyak dan lebih mudah untuk melakukan aktivitas. Suhu optimum bagi kehidupan arthropoda adalah 25°C (Suin, 1997).

Derajat keasaman (pH) tanah merupakan salah satu faktor pembatas bagi kehidupan arthropoda tanah. Arthropoda tanah dapat hidup dengan baik ketika berada pada kisaran pH 6 – 8. Arthropoda tanah dapat mengalami kehidupan yang tidak sempurna atau bahkan akan mati jika berada pada kondisi pH terlalu asam atau basa. Selain itu, ketika suatu daerah mempunyai pH terlalu asam atau terlalu basa maka jarang sekali terdapat arthropoda tanah (Odum, 1971).

4. Kesimpulan

Kedua lahan penelitian memiliki kriteria komunitas yang baik. Pada lahan konvensional tingkat keanekaragaman dan kelimpahan dalam kategori sedang, dengan nilai ($H' = 1,56$) dan ($DMg = 3,82$). Sedangkan pada lahan organik, tingkat keanekaragaman dan kelimpahan dalam kategori sedang, dengan nilai ($H' = 1,67$) dan ($DMg = 3,65$). Oleh karena itu, pengolahan lahan secara organik pada daerah tersebut belum terlalu berpengaruh pada keanekaragaman dan kelimpahan arthropoda tanah, karena waktu pelaksanaannya masih relatif singkat, yaitu 3 tahun.

Meskipun kedua lahan memiliki kriteria komunitas yang sama, pada lahan organik jumlah individu yang ditemukan lebih banyak dibandingkan pada lahan konvensional, hal tersebut memungkinkan beberapa tahun mendatang kualitas tanah pada lahan organik akan terus mengalami peningkatan.

5. Daftar Pustaka

- Arikunto, S. (2010). *Prosedur Penelitian : Suatu Pendekatan Praktik* (Edisi Revisi). Jakarta: Rineka Cipta.
- Bonkowski, M., Griffiths., Scrimgeour. (2000). Substrate heterogeneity and microfauna in soil organic 'hotspots' as determinants of nitrogen capture and growth of ryegrass. *Applied Soil Ecology*, 14: 37 – 53.
- Borror, D. J., C. A. Triplehorn dan N. F. Johnson. (1997). *Pengenalan Pelajaran Serangga*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Campbell, N.A., Jane, B.R., Lisa, A.U., Michael, L.C., Steven, A.W., Peter, V.M., Robert, B.J. (2008). *Biologi, edisi kedelapan jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Curry, J. P. (1986). Effects of management on soil decomposers and decomposition processes in grassland, in: Mitchell, M. J., Nakas, J. P. (Eds.), *Micro floral and Faunal Interactions in Natural and Agro ecosystems*. Nijhoff/Junk Publishers, Dordrecht, pp. 349 – 398.
- Fitriana, Y. R. (2006). Keanekaragaman dan Kelimpahan Makrozoobentos di Hutan Mangrove Hasil Rehabilitasi Taman Hutan Raya Ngurah Rai Bali. *Biodiversitas* ISSN: 1412 – 033 X. Volume VII, Nomor 1, 67 – 72.
- Irwan, Z., D. (1996). *Prinsip-prinsip Ekologi Ekosistem, Lingkungan, dan Pelestariannya*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Jeffrey, S. and Gardi, C. (2009). Soil Biodiversity. *European Commission Joint Research Centre, Institute for Environmental and Sustainability, Land Management and Natural Hazards Unit*.
- Lavelle, P., Decaëns, T., Aubert. M., Barot, S., Blouin. M., Bureau. F., Margerie.P., Mora. P., Rossi, J.P. (2006). Soil invertebrates and ecosystem services. *European Journal of Soil Biology*, 42 S3 – S15
- Lee, K. E. (1991). The diversity of soil organisms, in: Hawksworth, D.L. (Eds.), *The Biodiversity of Microorganisms and Invertebrates: Its Role in Sustainable Agriculture*. CABI, Wallingford. 73 – 86.

- Moore, J. C. dan Walter, D. E. (1988). Arthropod Regulation of micro and Mesobiota in below ground food webs. *Annual Review of Entomology*, 33: 419 – 439.
- Najiyanti, S. dan Danarti. (2004). *Budidaya Tanaman Kopi dan Penanganan Pasca Panen*. Jakarta: Penebar Swadaya.
- Odum, E. P. (1971). *Fundamentals of Ecology. Third Edition*. Philadelphia and London: Saunders Company.
- Odum, E. P. (1983). *Basic Ecology*. Holt – Saunders Japan: Saunders College Publishing.
- Odum, E. P. (1996). *Dasar-Dasar Ekologi. Penerjemah: Tjahyono Saminginan*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Oka, I., D. (2005). *Pengendalian Hama Terpadu dan Implementasinya di Indonesia*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Pracaya. (2007). *Hama dan penyakit tanaman*. Jakarta: Penebar swadaya.
- Price, P. W. (1975). *Insect Ecology*. New York: John Willey and Sons, Inc.
- Price, P. W. (1997). *Insect Ecology. Third Edition*. New York: John Willey and Sons, Inc.
- Sari, M. (2014). Identifikasi Serangga Dekomposer di Permukaan Tanah Hutan Tropis Daratan Rendah (Studi Kasus di Arboretum dan Komplek Kampus UNILAK dengan Luas 9,2 Ha). *Biolectura*, 2(1):63-72.
- Soegianto, A. (1994). *Ekologi Kuantitatif*. Surabaya: Usaha Nasional.
- Suin, N. M. (1997). *Ekologi Hewan Tanah*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Suheriyanto, D. (2008). *Ekologi serangga*. Malang: UIN Malang Press.
- Untung, K. (2006). *Pengantar Pengelolaan Hama Terpadu Edisi Kedua*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

PERBANDINGAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE) METODE *JACKKNIFE* DAN *BOOTSTRAP* PADA PENDUGAAN AREA KECIL MODEL LOGIT-BINOMIAL

ShindyDwiyanti^{1*}, Widiarti², Khoirin Nisa³

Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespondensi : shindydwian29@gmail.com

Abstrak

Pendugaan area kecil adalah teknik statistika yang digunakan untuk menduga parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan penduga Hierarchical Bayes (HB) pada pendugaan area kecil untuk model Logit-Binomial dan mengevaluasi Mean Squared Error (MSE) menggunakan metode Jackknife dan Bootstrap. Perhitungan numeric dilakukan dengan prosedur Markov Chain Monte Carlo (MCMC) dengan bantuan software R 3.2.3, sedangkan perhitungan secara statistic menggunakan Uji-t dilakukan dengan bantuan software Minitab. Hasil menunjukkan bahwa pada data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 untuk perhitungan secara numerik, metode Bootstrap menghasilkan MSE lebih kecil. Sedangkan secara statistic antara nilai rata-rata MSE Jackknife dan Bootstrap tidak ditemukan perbedaan yang signifikan.

Kata kunci: Mean Squared Error (MSE), Model Logit-Binomial, Jackknife, Bootstrap.

1. Pendahuluan

Pendugaan area kecil (*small area estimation*/ SAE) merupakan teknik statistika yang digunakan untuk menduga parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Adapun metode pendugaan area kecil yang populer diperkenalkan oleh Ghosh dan Rao (1994) yaitu model *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Empirical Bayes* (EB), dan *Hierarchical Bayes* (HB). Metode HB adalah salah satu metode bayes yang digunakan untuk menduga variabel independen pada data diskrit seperti data biner atau data cacahan. Dalam metode HB ini pendugaan parameter didasarkan pada distribusi posterior dimana parameter diestimasi melalui rata-rata posterior dan presisinya diukur dengan varian posteriornya. Menurut Ghosh dan Rao (1994) model HB ini dianggap lebih menguntungkan karena memiliki nilai kuadrat tengah galat (*Mean Squared Error*/MSE) yang lebih kecil dibandingkan dengan metode EBLUP. Selain itu masalah inferensinya relatif lebih jelas dan komputasinya juga relatif lebih mudah dengan menggunakan teknik *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC).

Karena penduga Bayes biasanya bersifat bias, maka dalam penelitian ini kualitas penduga HB yang diperoleh akan dievaluasi melalui kriteria MSE. MSE merupakan suatu besaran untuk mengukur keragaman penduga pada area kecil. Adapun metode pendugaan MSE yang akan digunakan pada penelitian ini adalah metode *Jackknife* Jiang dan *Bootstrap*. Metode ini merupakan metode *resampling* yang dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam statistika baik masalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsinya, maupun data yang tidak memiliki asumsi dalam distribusinya. Data biner merupakan bagian dari sistem bilangan basis dua. Dengan kata lain bilangan tersebut hanya memiliki dua kategori yaitu 0 dan 1. Angka tersebut merupakan simbol dari kejadian tertentu, seperti gagal dan sukses. Selanjutnya hubungan antara variabel data biner ini dapat dijelaskan dengan metode logistik. Metode logistik/logit merupakan sebuah model regresi non linear yang menghasilkan sebuah persamaan dimana variabel dependen bersifat kategorikal.

2. Metode

2.1 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder, yaitu data Keluarga Prasejahtera tahun 2015 di Kota Bandar Lampung yang diperoleh dari Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) Provinsi Lampung, dengan 6 peubah respon yang harus dipenuhi yaitu:

1. Keluarga membeli satu stel pakaian baru untuk seluruh anggota keluarga minimal satu tahun sekali
2. Seluruh anggota keluarga makan minimal 2 kali sehari

3. Seluruh anggota keluarga bila sakit berobat ke fasilitas kesehatan
4. Seluruh anggota keluarga memiliki pakaian yang berbeda untuk di rumah, bekerja/sekolah dan berpergian
5. Seluruh anggota keluarga makan daging/ikan/telur minimal seminggu sekali
6. Seluruh anggota keluarga menjalankan ibadah agama sesuai ketentuan agama yang di anut (Widiartietal., 2018).

2.2 Model HB untuk Data Biner

Rao (2003) menggunakan pendekatan HB dengan model Logit-Normal dan variabel berbasis area dengan model sebagai berikut:

- i. $y_i | p_i \sim \text{ind Binomial}(n_i, p_i)$
- ii. $\theta = \text{logit}(p_i) = \mathbf{X}'_i \beta + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \sim N_m(0, \sigma_v^2)$
- iii. β dan σ_v^2 saling bebas, $f(\beta) \propto 1$
 $\sigma_v^{-2} \sim \text{gamma}(a, b); a \geq 0, b > 0$

Penetapan model dua tahap yang didasarkan pada model Logit Binomial. Level pertama diasumsikan bahwa $y_i \sim \text{Binomial}(n_i, p_i)$ dan level kedua diasumsikan bahwa $p_i \sim \text{Logit}(\beta, \sigma_v^2)$.

Dengan:

- p_i = peluang keberhasilan suatu kasus pada area ke-i
 y_i = banyaknya pengamatan suatu kasus pada area ke-i
 n_i = banyaknya individu pada area ke-i
 (β, σ_v^2) = parameter yang akan diduga

Selanjutnya dihitung nilai dugaan dengan metode HB. Adapun tahap-tahap nya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dengan $y_i | p_i \sim \text{Binomial}(n_i, p_i)$
2. Menentukan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior)
3. Menentukan rata-rata posterior (penduga HB) secara analitik, jika tidak dapat diselesaikan maka menggunakan metode Gibbs sampling. Sebelum ke metode tersebut kita akan menentukan variable dikotomi untuk proporsi keluarga prasejahtera berdasarkan variable penyerta dengan analisis kluster. Penelitian ini menggunakan hasil pada (Widiartietal., 2018).

Adapun langkah dalam menggunakan metode *Gibbs Sampling* adalah:

- a. Mengambil nilai sembarang awal dari $p^{(0)}, \sigma_v^{2(0)}, y^{(0)}$
 - b. Membangkitkan $\beta^{(1)}$ dengan informasi $p^{(0)}, \sigma_v^{2(0)}, y^{(0)}$ dari $(\beta | p, \sigma_v^2, y) \sim N_p(\beta^*, \sigma_v^2, (\sum_{i=1}^m \sigma_v^2 (x_i x_i')^{-1}))$, informasi merupakan angugus variabel prediktor
 - c. Melakukan iterasi ke-k, akan dibangkitkan contoh acak $\beta^{(k)}$ dengan informasi $p^{(k-1)}, \sigma_v^{2(k-1)}, y^{(k)}$
 - d. Membangkitkan contoh acak $\sigma_v^{2(k)}$ dengan informasi $\beta^{(k)}, p^{(k-1)}, y^{(k)}$
 - e. Menghitung nilai $p^{(k)}$ dengan informasi $\sigma_v^{2(k)}, \beta^{(k)}, y^{(k)}$
 - f. Mengulangi proses sampai jumlah D contoh acak/iterasi yang telah ditetapkan sampai rantai konvergen. Semakin banyak jumlah iterasi yang dilakukan maka nilai estimasi yang diperoleh akan konvergen ke suatu nilai yang mendekati pada keadaan sebenarnya. Kekonvergenan suatu nilai juga dapat dilihat dari hasil *output* yang dikeluarkan.
 - g. Melakukan "burn in" dengan cara membuang d iterasi pertama untuk menghilangkan pengaruh awal sehingga diperoleh $\{p_i^{(k)}, \dots, p_m^{(k)}, \beta^{(k)}, \sigma_v^{2(k)}\}; k = d + 1, \dots, K = d + D$
 - h. Saat rantai konvergen maka diperoleh nilai \hat{p}_i^{HB} dan $V(\hat{p}_i^{HB})$
4. Menghitung nilai MSE dengan metode *Jackknife Jiang*
 5. Menghitung nilai MSE dengan metode *Bootstrap*
 6. Membandingkan nilai MSE metode *Jackknife Jiang* dan *Bootstrap* dengan Uji-t

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penentuan keluarga sejahtera didasarkan pada peubah responnya. Keluarga dianggap sebagai keluarga prasejahtera jika tidak memenuhi setidaknya 1 dari 6 indikator keluarga sejahtera. Hasil perhitungan proporsi keluarga prasejahtera untuk setiap kabupaten di kota Bandar Lampung dengan penduga langsung adalah sebagai berikut:

Tabel 1: Nilai Dugaan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015

Kecamatan	Jumlah Keluarga (n_i)	Jumlah KPS (y_i)	PendugaLangsung (p_i)	Penduga HB (\hat{p}_i^{HB})
Kedaton	9699	1596	0,165	0,16562996
Sukarame	6902	480	0,070	0,07242719
Tanjungkarang Barat	11521	787	0,068	0,07009613
Panjang	9980	2253	0,226	0,22616441
Tanjungkarang Timur	7492	760	0,101	0,10367264
Tanjungkarang Pusat	9966	878	0,088	0,08994522
Telukbetung Selatan	8853	1294	0,146	0,14755133
Telukbetung Barat	7106	1130	0,159	0,16053043
Telukbetung Utara	10920	621	0,057	0,05885712
Rajabasa	8887	909	0,102	0,10417626
Tanjung Senang	10149	1067	0,105	0,10677345
Sukabumi	12064	2419	0,201	0,20108234
Kemiling	16034	2002	0,125	0,12578934
Kedamaian	10333	797	0,077	0,07902499
Telukbetung Timur	10497	4128	0,393	0,39199432
Way Halim	13471	1153	0,086	0,08699416
Enggal	5262	227	0,043	0,04735034
Langkapura	7672	667	0,087	0,08931671
Labuhan Ratu	5189	448	0,086	0,08975419
BumiWaras	9185	793	0,086	0,08835034

Pada Tabel 1 nilai dugaan proporsi keluarga prasejahtera dan penduga HB model Logit-Binomial memberikan nilai dugaan yang tidak jauh berbeda, bahkan relatif sama. Pada penduga HB nilai dugaannya lebih besar dibandingkan nilai dugaan pada penduga langsung. Selanjutnya adalah membandingkan nilai MSE untuk penduga HB dengan menggunakan metode *Jackknife Jiang* dan metode *Bootstrap*.

Tabel 2: Nilai MSE Data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015

Kecamatan	Var(\hat{p}_i^{HB})	MSE		
		PendugaLangsung	<i>Jackknife Jiang</i>	<i>Bootstrap</i>
Kedaton	0,000000001044	0,0000720	0,004646165	0,0054866576
Sukarame	0,000000005503	0,0001257	0,004645876	0,0010491407
Tanjungkarang Barat	0,000000001562	0,0000754	0,004645954	0,0009826944
Panjang	0,000000000071	0,0000601	0,004646184	0,0102300688
Tanjungkarang Timur	0,000000018797	0,0001079	0,004645810	0,0021496042
Tanjungkarang Pusat	0,000000009957	0,0000835	0,004645986	0,0016180297
Telukbetung Selatan	0,000000006331	0,0000824	0,004646059	0,0043542798
Telukbetung Barat	0,000000006163	0,0000996	0,004646062	0,0051540049
Telukbetung Utara	0,000000009076	0,0000816	0,004646004	0,0006928331
Rajabasa	0,000000002463	0,0000908	0,004645936	0,0021705396
Tanjung Senang	0,000000008276	0,0000790	0,004646020	0,0022801152
Sukabumi	0,000000000017	0,0000530	0,004646185	0,0080868222
Kemiling	0,000000001639	0,0000478	0,004646153	0,0031645926
Kedamaian	0,000000010791	0,0000825	0,004645970	0,0012489910
Telukbetung Timur	0,000000002661	0,0000351	0,004646132	0,0307319099
Way Halim	0,000000002600	0,0000621	0,004646134	0,0015135977
Enggal	0,000000009803	0,0001748	0,004645190	0,0004484120
Langkapura	0,000000014124	0,0001088	0,004645903	0,0015954961
Labuhan Ratu	0,000000007089	0,0001612	0,004645444	0,0016111640
BumiWaras	0,000000014537	0,0000910	0,004645895	0,0015611574

Pada Tabel 2 penduga HB memberikan hasil pendugaan dengan presisi cukup baik. Hal ini ditunjukkan oleh kecilnya nilai MSE baik yang menggunakan metode *Jackknife Jiang* maupun *Bootstrap*. Evaluasi MSE dengan pendekatan HB pada metode *Bootstrap* menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode *Jackknife Jiang*. Metode *Jackknife Jiang* memiliki nilai *mean* 0,004685417 sedangkan metode *Bootstrap* memiliki nilai *mean* 0,004318148. Dengan demikian secara numeric dapat dikatakan

bahwa metode *Bootstrap* lebih baik digunakan untuk menduga MSE pada data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015.

Perhitungan secara statistic dilakukan dengan melakukan uji-t. Uji-t merupakan salah satu cara yang digunakan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan secara signifikan antara variable satu dengan variable lainnya. Pada penelitian ini akan ditentukan apakah nilai antara MSE *Jackknife Jiang* dan MSE *Bootstrap* memiliki perbedaan secara signifikan atau tidak. Untuk mengetahui perbedaan tersebut, dapat dilakukan dengan uji hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Tidak ada perbedaan secara signifikan antara nilai rata-rata MSE *Jackknife Jiang* dan *Bootstrap*

H_1 : Ada perbedaan secara signifikan antara nilai rata-rata MSE *Jackknife Jiang* dan *Bootstrap*

Taraf signifikan : $\alpha = 0,05$

Kriteria uji : Tolak H_0 jika $P\text{-Value} < \alpha$

```
Two-sample T for jack vs boot
N      Mean      StDev      SE Mean
jack  20  0,004645953  0,000000247  0,000000055
boot  20   0,00431     0,00673     0,0015

Difference =  $\mu$  (jack) -  $\mu$  (boot)
Estimate for difference: 0,00034
95% CI for difference: (-0,00281; 0,00349)
T-Test of difference = 0 (vs  $\neq$ ): T-Value = 0,23 P-Value = 0,824 DF =19
```

Berdasarkan Gambar 4.1 diperoleh nilai $p\text{-value}$ sebesar 0,824 artinya nilai $p\text{-value} > \alpha$, maka tidak tolak H_0 . Ini menunjukkan bahwa tidak ada perbedaan secara signifikan antara MSE *Jackknife Jiang* dan *Bootstrap*.

4. KESIMPULAN

Secara numerik metode *Bootstrap* menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode *Jackknife Jiang*. Sedangkan secara statistik menggunakan Uji-t pada taraf nyata 5%, dinyatakan bahwa tidak ada perbedaan secara signifikan antara nilai MSE *Jackknife Jiang* dan *Bootstrap*.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] BKKBN. 1994. <http://aplikasi.bkkbn.go.id/mdk/BatasanMDK.aspx>. 27 Januari 2018
- [2] Ghosh, Malay dan J.N.K. Rao. 1994. Small Area Estimation. *An Appraisal. Statistical Science* 9: 55-93.
- [3] Rao, J.N.K. 2003. Small Area Estimation. John Willey and Sons, New York.
- [4] Widiarti, T. Malinda, S.Suharsono, Warsono, and Usman, M. 2018. Estimating The Proportion in Small Area. *Journal of Sci.Int.(Lahore)*, 30(4):523-527.

APLIKASI DISTRIBUSI STATISTIK DALAM MEMONITOR KUALITAS UDARA DI BUKIT KOTOTABANG

Raeni Chindi Defi Ocvilia^{1*}, Achmad Rafli Pahlevi¹, Warsono, Mareta Asnia²

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

²Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG)

*Email: raenichi@gmail.com

ABSTRAK

Stasiun *Global Atmospheric Watch* (GAW) Kototabang merupakan stasiun pemantau kualitas udara yang berada di wilayah equator. Pada beberapa waktu terakhir, adanya peningkatan konsentrasi dari PM₁₀, SO₂, dan NO₂ pada bulan-bulan tertentu yang dapat mencapai nilai ekstrim atau udara tidak sehat. Pada penilitan ini distribusi yang digunakan adalah distribusi *generalized extreme value* (GEV), lognormal, perason V, dan gamma. Pemilihan distribusi ini akan dijelaskan di subbab metode. Distribusi tersebut akan dilakukan pengujian *goodness of fit* untuk mendapatkan distribusi terbaik yang menggambarkan data polutan di Sumatera Barat. Distribusi terbaik akan digunakan untuk mendapatkan probabilitas terjadinya kualitas udara yang melewati nilai baku mutunya. Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) yang telah diuji menggunakan KS dan AD merupakan distribusi terbaik dalam menggambarkan konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂. Berdasarkan data rata-rata harian konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang, dilihat dari sebaran scatter plot dan hasil probabilitas menunjukkan bahwa kondisi partikel udara pada wilayah ini berada dalam kategori yang cukup baik. Hal ini dibuktikan dengan hasil probabilitas untuk PM₁₀ hanya 1% peluang kejadian polusi udara dengan kategori tidak sehat akan terjadi. Probabilitas SO₂ yang lebih dari 0.05 ppm hanya 0.1% peluang polusi udara yang akan melebihi nilai baku mutu, dan probabilitas NO₂ yang lebih dari 0.005 ppm hanya 1%.

Kata Kunci: Distribusi Probabilitas; *Generalized Extreme Value* (GEV); *Lognormal*; *Gamma*; *Pearson V*; Nilai Baku Mutu

1. PENDAHULUAN

Stasiun *Global Atmospheric Watch* (GAW) Kototabang merupakan stasiun pemantau kualitas udara di equator. Stasiun GAW Kototabang melakukan pengamatan terhadap *particulate matter* (PM₁₀), Sulfur Dioksida (SO₂), dan Nitrogen Dioksida (NO₂), sebagai polutan udara utama yang secara rutin diamati. Pada beberapa waktu terakhir, adanya peningkatan konsentrasi dari PM₁₀, SO₂, dan NO₂ pada bulan-bulan tertentu yang dapat mencapai nilai ekstrim atau udara tidak sehat. Peningkatan ini disebabkan oleh kebakaran hutan dan lahan yang sering terjadi di wilayah Pulau Sumatera.

Distribusi probabilitas telah banyak digunakan dalam analisis data polusi udara (Larsen, 1973)(Morel dkk, 1999)(Kao dan Friedlander, 1995)(Lu, 2002). Kontenstrasi polusi udara merupakan variabel acak, yang disebabkan oleh tingkat emisi, kondisi meteorologis, dan geografis (Kan dan Chen, 2004). Distribusi probabilitas dapat digunakan untuk memprediksi frekuensi polutan yang melewati batas *air quality standard* (AQS), dan pengurangan sumber emisi untuk menjaga dalam batas nilai AQS.

Berdasarkan Peraturan Pemerintah No.41 Tahun 1999 tentang Pengendalian Pencemaran Udara, nilai baku mutu untuk PM₁₀ adalah 150 $\mu\text{g}/\text{Nm}^3$, untuk SO₂ adalah 365 $\mu\text{g}/\text{Nm}^3$, dan NO₂ adalah 150 $\mu\text{g}/\text{Nm}^3$ (PP No.41 Tahun 1999). Nilai baku mutu digunakan untuk memantau kualitas udara tergolong baik atau tidak. Konsentrasi polutan yang melewati nilai baku mutu akan tergolong ke dalam udara yang tidak sehat.

Pada penilitan ini distribusi yang digunakan adalah distribusi *generalized extreme value* (GEV), lognormal, perason V, dan gamma. Pemilihan distribusi ini akan dijelaskan di subbab metode. Distribusi tersebut akan dilakukan pengujian *goodness of fit* untuk mendapatkan distribusi terbaik yang menggambarkan data polutan di Sumatera Barat. Distribusi terbaik akan digunakan untuk mendapatkan probabilitas terjadinya kualitas udara yang melewati nilai baku mutunya.

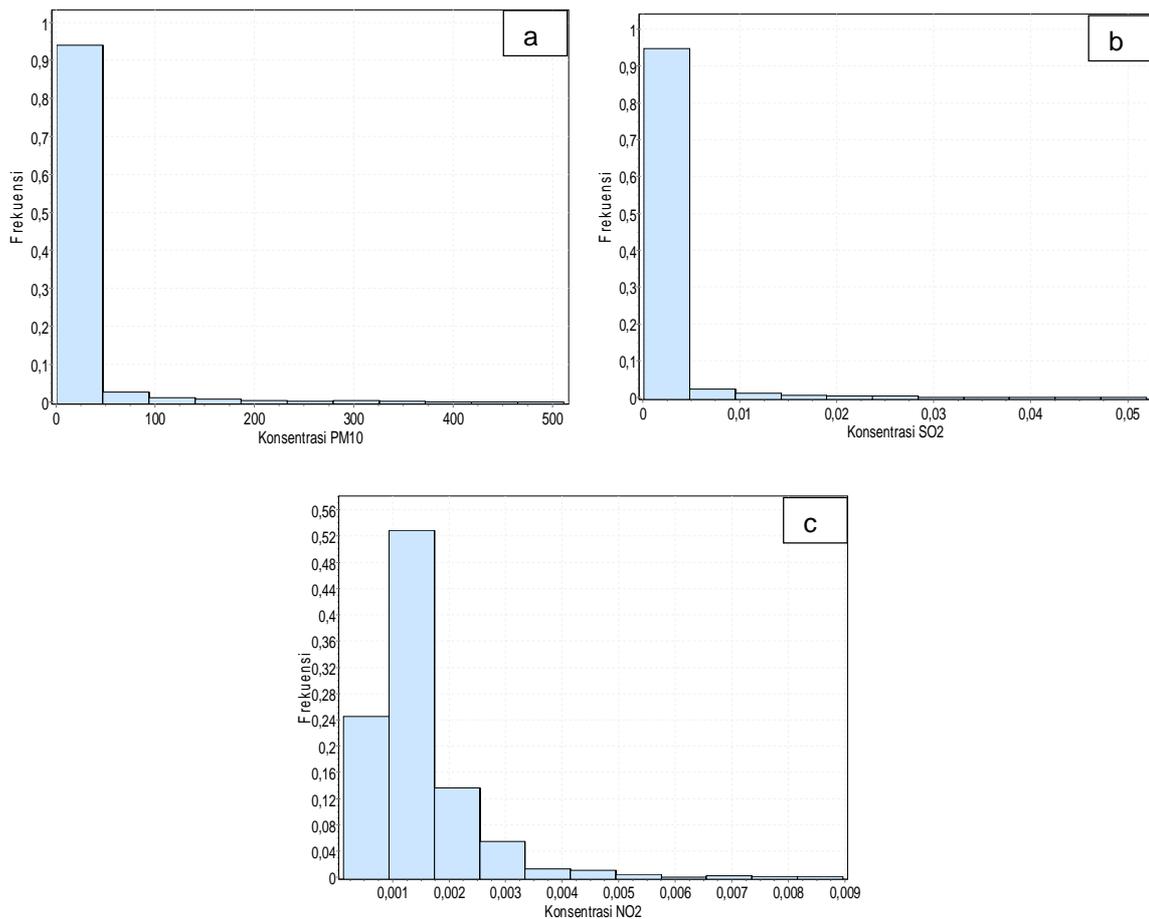
2. DATA DAN METODE

Data yang digunakan adalah data polutan berupa data *particulate matter* (PM₁₀), Sulfur Dioksida (SO₂), dan Nitrogen Dioksida (NO₂). Data merupakan data harian yang didapatkan dari Stasiun *Global Atmospheric Watch* (GAW) Kototabang dari tahun 2012 – 2016. Data PM₁₀ ada 1721 data harian, data SO₂ ada 1821, dan data NO₂ ada 1189 data. Terdapatnya data yang kosong disebabkan adanya kerusakan alat pada waktu tersebut.

Pada gambar 1.a dan 1.b, data konsentrasi PM₁₀ dan SO₂ di Kototabang adalah *positively skewed* (miring ke arah positif) dengan modus dengan nilai 0. Pada gambar 1.c, data konsentrasi NO₂ juga menunjukkan *positively skewed* (miring ke arah positif), tetapi dengan modus dengan nilai 0.001 – 0.002 ppm. Berdasarkan gambar 1, maka penulis menggunakan model distribusi miring ke arah positif (*positively skewed*). Model distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan polutan PM₁₀, SO₂, dan NO₂ adalah *generalized extreme value* (GEV), pearson V, gamma, dan lognormal (Georgopolus dan Seinfeld, 1982)(Mudelsee, 2014).

Distribusi Generalized Extreme Value (GEV), pada berbagai negara di Eropa, seperti Austria, Jerman, Italy, dan Spanyol, distribusi GEV digunakan untuk menggambarkan data banjir. Parameter mencakup bentuk (k), skala (α), dan lokasi (ξ). Pdf dari GEV dijelaskan sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\left(1 + kz\right)^{-\frac{1}{k}}\right) \left(1 + kz\right)^{-1-\frac{1}{k}} \quad (1)$$



Gambar 1. Probability Density Function (PDF) dari polutan a) PM₁₀, b) SO₂, dan c) NO₂

Distribusi Gamma. Pada random variable x , terdapat dua parameter dari fungsi kepekatan distribusi gamma yaitu α dan β dijelaskan sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2)$$

Distribusi Pearson, awalnya ditunjukkan sebagai model distribusi yang tidak simetris atau miring (*skewed*) baik ke arah positif dan negatif. Distribusi pearson terdiri dari dua parameter α dan β , serta fungsi gamma. Fungsi PDF dari distribusi pearson dijelaskan sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{x^{-(\alpha+1)} \exp(-\frac{\beta}{x})}{\beta^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad (3)$$

Distribusi Lognormal, merupakan distribusi probabilitas kontinyu dari variabel acak yang logaritmanya berdistribusi normal. Variabel acak yang berdistribusi lognormal hanya memiliki nilai positif. Ditribusi lognormal terdiri dari tiga parameter yaitu σ adalah parameter bentuk, θ adalah parameter lokasi, dan m adalah parameter lokasi. Fungsi PDF dari distribusi lognormal dijelaskan sebagai berikut,

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{\ln\left(\frac{x-\theta}{m}\right)^2}{2\sigma^2}\right)}}{(x-\theta)\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

Test of Goodness of Fit digunakan untuk menentukan kecocokan model distribusi dengan data observasi curah hujan, tes yang digunakan adalah Kolmogrov-Smirnov (KS) dan Anderson-Darling (AD). Nilai tes yang paling kecil menunjukkan kecocokan antara distribusi dengan data.

Tes statistic untuk Kolmogrov-Smirnov adalah,

$$D \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \left(F(X_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(X_i) \right) \quad (5)$$

Tes statistic untuk Anderson-Darling adalah,

$$A^2 = -N - S \quad (6)$$

dimana,

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)}{N} [\ln F(X_i) + \ln(1 - F(X_{N+1-i}))] \quad (7)$$

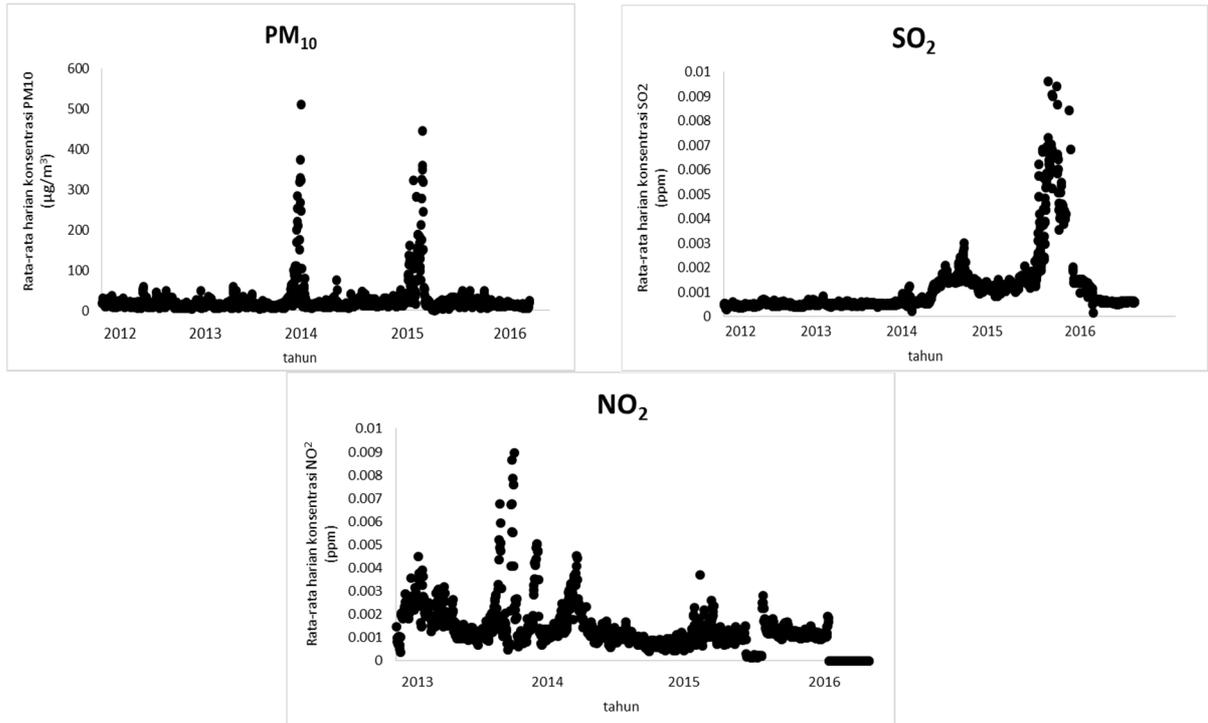
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tabel 1 merangkum statistik dasar dari konsentrasi data PM₁₀, SO₂, dan NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang yang menunjukkan bahwa PM₁₀, SO₂, dan NO₂ memiliki rata-rata dengan nilai 24.119 µgram/m³, 0.00156 ppm, dan 0.001434 ppm. Dengan nilai minimum untuk PM₁₀, SO₂, dan NO₂ berturut-turut yaitu 0.958 µgram/m³, 0.000145 ppm, dan 0.000137 ppm. Dan nilai maksimum untuk PM₁₀, SO₂, dan NO₂ berturut-turut yaitu 511.208 µgram/m³, 0.051921 ppm, dan 0.008961 ppm. Selain nilai maksimum dan minimum, dapat dilihat juga bahwa nilai standard deviasi yang digunakan untuk menyatakan keragaman konsentrasi polusi udara menunjukkan bahwa standard deviasi untuk PM₁₀ sebesar 39.429, SO₂ sebesar 0.003423 dan NO₂ sebesar 0.000939.

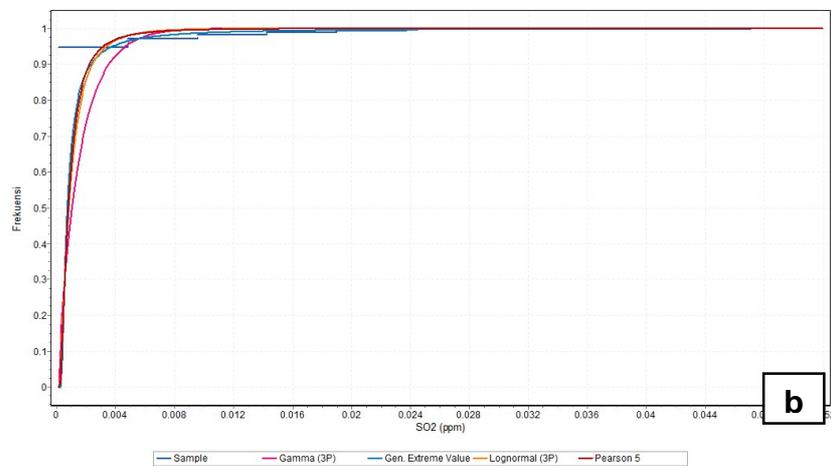
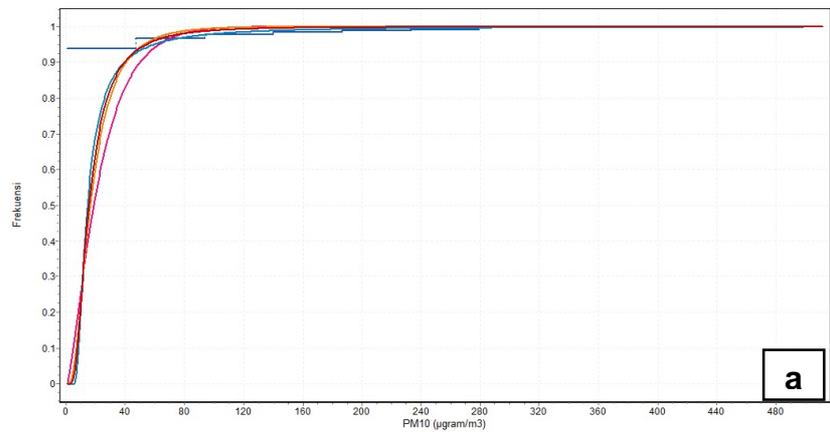
Tabel 1. Statistik Dasar dari Rata-rata Harian Konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang

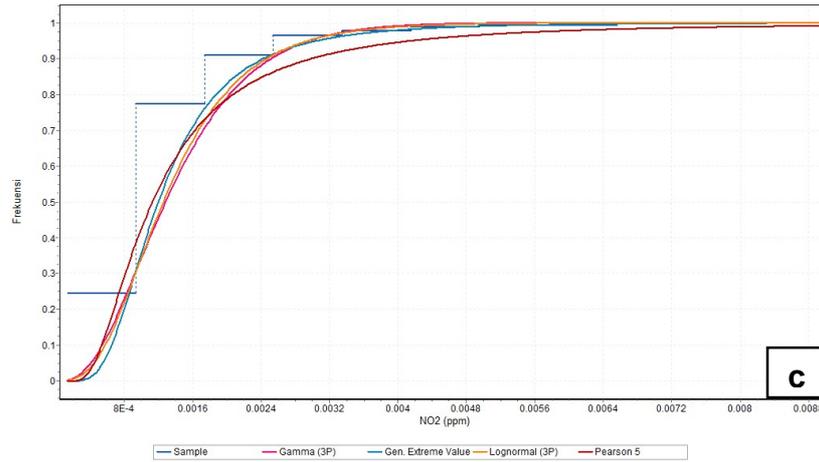
	N	Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
PM ₁₀	1721	24.119	39.429	0.958	11.25	15	21.854	511.208
SO ₂	1821	0.00156	0.00342	0.00015	0.0005	0.0006	0.00138	0.05192
NO ₂	1189	0.00143	0.00094	0.00014	0.00095	0.0012	0.00165	0.00896

Scatter plot pada gambar 2 menunjukkan bahwa rata-rata harian konsentrasi PM₁₀ memiliki sebaran data yang berkisar pada nilai 0 – 100 µgram/m³ sedangkan untuk rata-rata harian konsentrasi SO₂ dan NO₂ berkisar diantara nilai 0 – 0,01 ppm. Sebaran data tersebut masih berada dibawah nilai ambang batas dan baku mutu udara yang berarti bahwa kondisi kualitas udara pada lokasi ini masih cukup baik. Namun pada beberapa waktu tertentu rata-rata harian konsentrasi PM₁₀ menunjukkan pelampauan yang lebih tinggi dari nilai ambang batasnya dibandingkan dengan rata-rata harian konsentrasi SO₂ dan NO₂, menunjukkan bahwa nantinya jika frekuensi kejadian tersebut semakin sering terjadi, partikulat polusi udara bisa menjadi masalah pada lingkungan ini.



Gambar 2. Scatter Plot Rata-rata Harian Konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang





Gambar 3. Grafik fungsi distribusi kumulatif dari fitted distribution (a) PM₁₀, (b) SO₂, dan (c) NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang

Berdasarkan Gambar 3, grafik distribusi kumulatif data PM₁₀, SO₂, dan NO₂ dengan menggunakan distribusi Generalized Extreme Value (GEV), Pearson V, Lognormal, dan Gamma dapat diketahui distribusi mana yang paling cocok dalam menggambarkan distribusi PM₁₀, SO₂, dan NO₂. Pada gambar 3.a GEV dan Pearson V memiliki kecocokan yang baik dengan data PM₁₀, sedangkan Gamma memiliki tingkat kecocokan yang paling rendah. Pada Gambar 3.b dan 3.c GEV memiliki kecocokan yang baik dengan data SO₂ dan NO₂, sedangkan Gamma memiliki kecocokan yang paling rendah untuk data SO₂ dan Pearson V memiliki kecocokan yang paling rendah untuk data NO₂ pada lokasi penelitian.

Tabel 2. Tipe distribusi dan statistik goodness of fit di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang

Distribusi	PM ₁₀		SO ₂		NO ₂	
	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling
Gen Extreme Value	0.0467	51.629	0.15349	56.43	0.06522	11.902
Pearson V	0.06414	16.723	0.20302	89.671	0.14417	43.578
Lognormal (3P)	0.1019	40.453	0.19741	99.46	0.08438	15.072
Gamma (3P)	0.18782	126.17	0.23056	206.69	0.10249	21.781

Berdasarkan Tabel 2, dapat ditunjukkan bahwa distribusi terbaik dalam menggambarkan data PM₁₀, SO₂, dan NO₂ yang diuji menggunakan kolmogorov-smirnov (KS) dan anderson-darling (AD) adalah tipe distribusi Generalized Extreme Value (GEV). Uji yang dilakukan menggunakan KS, tipe distribusi GEV memiliki nilai terendah untuk data PM₁₀ (0.0467), SO₂ (0.15349), dan NO₂ (0.06522).

Pada tes menggunakan AD, tipe distribusi GEV memiliki nilai terendah untuk data SO₂ (56.43), dan NO₂ (11.902). Sedangkan tes AD untuk data PM₁₀ distribusi Pearson V memiliki nilai terendah yaitu 16.723 dan distribusi Lognormal berada di peringkat kedua yaitu 40.453.

Tabel 3. Estimasi parameter dari model distribusi Generalized Extreme Value (GEV)

Parameter	K	σ	μ
PM ₁₀	0.61452	5.5734	12.293
SO ₂	0.7252	0.00030320	0.00060638
NO ₂	0.23259	0.00047845	0.00102

Tabel 3 menunjukkan estimasi parameter dari distribusi GEV dengan k adalah parameter bentuk kontinu, σ adalah parameter skala kontinu, μ dan adalah parameter lokasi kontinu, dengan menggunakan persamaan 1 maka didapatkan,

$$f(x) = \frac{1}{5.5734} \left(1 + 0.61452 \left(\frac{x - 12.293}{5.5743} \right) \right)^{\frac{1}{0.61452-1}} e^{-\left(1 + 0.61452 \left(\frac{x-12.293}{5.5743} \right) \right)^{\frac{1}{0.61452-1}}}$$

Untuk konsentrasi data PM₁₀

$$f(x) = \frac{1}{0.000303} \left(1 + 0.73 \left(\frac{x - 0.00060638}{0.000303} \right) \right)^{\frac{1}{0.7252-1}} e^{-\left(1 + 0.7252 \left(\frac{x-0.00060638}{0.000303} \right) \right)^{\frac{1}{0.7252-1}}}$$

Untuk konsentrasi data SO₂

$$f(x) = \frac{1}{0.00048} \left(1 + 0.23259 \left(\frac{x - 0.00102}{0.00048} \right) \right)^{\frac{1}{0.23259-1}} e^{-\left(1 + 0.23259 \left(\frac{x-0.00102}{0.00048} \right) \right)^{\frac{1}{0.23259-1}}}$$

Untuk konsentrasi data NO₂

Tabel 4. Cumulative Density Function (CDF) distribusi Generalized Extreme Value (GEV)

Parameter	P (x≤50)	P (x≥50)	P (x>100)	P (x>150)
PM₁₀	0.93306	0.06694	0.021	0.01072

Parameter	P (x≤0.05)	P (x≥0.05)
SO₂	0.99863	0.00137

Parameter	P (x≤0.005)	P (x≥0.005)
NO₂	0.98913	0.01087

Tabel 4 merupakan probabilitas PM₁₀ dengan katagori baik berkisar antara 0-50, sedang 50-150, tidak sehat 150-250, sangat tidak sehat 250-350, dan berbahaya dengan intensitas hingga melebihi 350 $\mu\text{gram}/\text{m}^3$. Sedangkan probabilitas SO₂ dengan kategori nilai baku mutu udara yaitu 0.14 ppm dan NO₂ adalah 0.08 ppm.

Probabilitas PM₁₀ dengan kategori tidak sehat yaitu sebesar 1% hal ini berarti bahwa peluang kejadian polusi udara yang tidak sehat akan terjadi dengan peluang yang kecil sekali, sedangkan probabilitas PM₁₀ yang kurang dari 50 $\mu\text{gram}/\text{m}^3$ yaitu sekitar 93% yang berarti bahwa partikel udara yang berukuran lebih kecil dari 10 mikron pada wilayah penelitian berada dalam kategori sehat.

Probabilitas SO₂ yang lebih dari 0.05 ppm yaitu sebesar 0.1% yang berarti bahwa hanya 0.1% peluang SO₂ akan melebihi nilai baku mutu. Sedangkan probabilitas SO₂ yang berada dibawah 0.05 ppm yaitu sekitar 99% yang berarti bahwa SO₂ pada wilayah penelitian berada dalam kadar yang sangat rendah.

Probabilitas NO₂ yang lebih dari 0.005 ppm yaitu 1% yang berarti bahwa sangat kecil sekali peluang terjadinya konsentrasi NO₂ yang akan melebihi nilai baku mutu. Sedangkan probabilitas NO₂ yang berada dibawah 0.005 ppm yaitu sekitar 99% yang berarti bahwa NO₂ pada wilayah penelitian berada dalam kadar yang sangat rendah.

4. KESIMPULAN

Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) yang telah diuji menggunakan KS dan AD merupakan distribusi terbaik dalam menggambarkan konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂. Berdasarkan data rata-rata harian konsentrasi PM₁₀, SO₂, dan NO₂ di Stasiun Pemantau Atmosfer Global (GAW) Bukit Kototabang, dilihat dari sebaran scatter plot dan hasil probabilitas menunjukkan bahwa kondisi partikel udara pada wilayah ini berada dalam kategori yang cukup baik.

Hal ini dibuktikan dengan hasil probabilitas untuk PM₁₀ hanya 1% peluang kejadian polusi udara dengan kategori tidak sehat akan terjadi. Probabilitas SO₂ yang lebih dari 0.05 ppm hanya 0.1% peluang polusi udara yang akan melebihi nilai baku mutu, dan probabilitas NO₂ yang lebih dari 0.005 ppm hanya 1% sangat kecil sekali peluang terjadinya konsentrasi NO₂ yang akan melebihi nilai baku mutu. Dari hasil tersebut sangat memungkinkan sekali bahwa inilah salah satu hal yang mendasari GAW sebagai referensi udara bersih dunia.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Georgopoulos, P.G., dan Seinfeld, J.H. (1982). Statistical Distribution of Air Pollutant Concentration. *Environmental Science and Technology* 16, 401A-416A.
- Kan, H.D., dan Chen, B.H. (2004). Statistical Distribution of Ambient Air Pollutants in Shanghai, China. *Biomedical and Environmental Sciences* 17, 366-372.
- Kao, A.S., dan Friedlander, S.K. (1995). Frequency Distribution of PM₁₀ Chemical Components and Their Source. *Environment Sciences and Technology* 29, 19-28.
- Larsen, R.I. (1973). An Air Quality Data Analysis System for Interrelating Effects, Standards, and Need Source Reductions. *Journal of Air Pollutants and Control Assessment* 23, 933-940.
- Lu, H. (2002). The Statistical Character of PM₁₀ Concentration in Taiwan Area. *Atmospheric Environment* 36, 491-502.
- Morel, B., Yeh, S., dan Cifuentes, L. (1999). Statistical Distributions for Air Pollution Applied to The Study of The Particulate Problem in Santiago. *Atmospheric Environment* 33, 2575-2585.
- Mudelsee, M. (2014). *Climate Time Series Analysis*. Springer International Publishing Switzerland.
- Peraturan Pemerintah No.41 Tahun 1999 Tentang Pengendalian Pencemaran Udara.

Klastering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017

Tri Rena Mayasari

Fungsional Statistisi Pertama BPS Kabupaten Pesawaran

Email : tri.mayasari@bps.go.id

Abstrak

Peningkatan kesejahteraan masyarakat merupakan sasaran utama kegiatan pembangunan di setiap daerah. Perlu adanya pengklasifikasian berdasarkan indikator kesejahteraan masyarakat untuk mengenali karakteristik masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Lampung sehingga dapat lebih tepat sasaran dalam mengambil kebijakan strategi pembangunan. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui gambaran umum indikator-indikator kesejahteraan rakyat dan pengklasifikasian 15 Kabupaten/Kota yang berada di Provinsi Lampung. Analisis yang digunakan pada penelitian ini adalah analisis kluster (analisis gerombol) dengan menggunakan metode Hierarchical Cluster. Hasil Penelitian ini adalah dari 15 Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung dapat dibentuk menjadi empat kluster dengan karakteristik yang berbeda. Kluster pertama terdiri dari Kota Bandar Lampung dan Kota Metro, Kluster kedua terdiri dari Kabupaten Lampung Barat, Tanggamus, Lampung Tengah, Way Kanan, Tulang Bawang, Pringsewu, Mesuji dan Tulang Bawang Barat, Kluster ketiga terdiri dari Kabupaten Lampung selatan, Lampung Timur, Lampung Utara, dan Pesawaran. Sedangkan pada kluster keempat hanya terdiri Kabupaten Pesisir Barat.

Kata Kunci : kesejahteraan, cluster, Lampung

1. PENDAHULUAN

Tingkat kesejahteraan yang belum memadai baik secara material maupun spiritual dipicu oleh lingkaran setan (*vicious cycle*) sehingga menyebabkan kemiskinan, ketertinggalan, dan keterpurukan ekonomi. Tujuan pertama yang tercantum dalam *Sustainable Development Goals (SDGs)* adalah mengentaskan kemiskinan. Peningkatan kesejahteraan yang diukur dari penurunan tingkat kemiskinan merupakan cerminan keberhasilan pembangunan yang diharapkan oleh setiap negara, termasuk Indonesia. Oleh sebab itu, Pemerintah menargetkan tingkat kemiskinan turun 7-8 persen dalam Rencana Pembangunan Jangka Menengah Nasional (RPJMN) 2015-2019.

Jumlah penduduk miskin (penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan) di Provinsi Lampung pada Maret 2017 sebesar 1,131 juta penduduk atau sebesar 13,69 persen penduduk Provinsi Lampung. Sedangkan pada Maret 2016 penduduk miskin di Provinsi Lampung sebesar 1,169 juta orang atau sebesar 14,29 persen. Namun demikian, meskipun terdapat penurunan penduduk miskin sebesar 38 ribu di Provinsi Lampung dalam waktu setahun terakhir, angka kemiskinan di Provinsi Lampung masih lebih tinggi dibandingkan angka kemiskinan Nasional. Bahkan kondisi kemiskinan di Provinsi Lampung juga tergolong cukup tinggi di Pulau Sumatera, yaitu tertinggi ketiga setelah Provinsi Aceh dan Provinsi Bengkulu.

Persentase penduduk miskin terendah di Provinsi Lampung adalah Kabupaten Mesuji sebesar 7,66 persen. Namun, pada kenyataannya Kabupaten Mesuji juga memiliki Indeks Pembangunan Manusia (IPM) terendah di Provinsi Lampung, yaitu 61,87. IPM merupakan salah satu cara untuk mengukur taraf kualitas hidup penduduk. Kualitas hidup tercermin dari pendidikan, kesehatan dan kemampuan ekonomi masyarakat yang dilihat dari tingkat pendapatan. Hal ini menunjukkan bahwa tidak serta merta angka IPM akan berbanding terbalik dengan banyaknya penduduk miskin. Rendahnya penduduk miskin di Kabupaten Mesuji belum menjanjikan Kabupaten tersebut memiliki Angka IPM yang tinggi. Dengan demikian, persentase penduduk miskin maupun Indeks Pembangunan masyarakat masih belum menjawab adanya tingkat kesejahteraan rakyat pada Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung. Perlu adanya indikator lain yang menunjang untuk menunjukkan kesejahteraan rakyat di masing-masing Kabupaten/Kota.

Kesejahteraan rakyat pada suatu wilayah merupakan suatu manifestasi yang diraih oleh masyarakat yang diperoleh dari berbagai upaya, termasuk upaya dan kegiatan aktifitas ekonomi masyarakat tersebut. Menurut Sutikno (Dalam Widiastuti, 2008:1) menyatakan bahwa kesejahteraan bersifat subjektif dimana setiap orang mempunyai pedoman, tujuan, dan cara hidup yang berbeda terhadap faktor-faktor yang menentukan kesejahteraan. Seseorang dapat dikatakan hidup sejahtera jika orang tersebut mampu mencukupi kebutuhan hidup, baik secara material maupun spiritual. Kebutuhan material berupa kebutuhan

akan sandang, pangan, papan. Sedangkan kebutuhan spiritual seperti kebutuhan kesehatan, pendidikan, ibadah dan keamanan.

Berdasarkan hal tersebut perlu adanya identifikasi berdasarkan karakteristik tingkat kesejahteraan rakyat Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung agar dalam mengambil kebijakan dan strategi pembangunan dapat tepat sasaran dan tepat guna. Salah satu syarat keberhasilan pembangunan oleh suatu daerah, adalah ketepatan identifikasi daerah. Oleh karena itu, sangat penting memerhatikan pengelompokan 15 Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung berdasarkan indikator kesejahteraan rakyat Tahun 2017.

Dalam penelitian ini akan dilakukan Analisis cluster untuk mengelompokkan Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung menjadi beberapa kelompok pengamatan. Metode yang digunakan pada analisis cluster adalah metode Hierarki.

2. BAHAN DAN METODE

Data dan Variabel Penelitian

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari Publikasi Statistik Kesejahteraan Rakyat Provinsi Lampung Tahun 2017 dan Publikasi Indeks Pembangunan Masyarakat Provinsi Lampung Tahun 2017. Unit observasi adalah 15 Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung pada tahun 2017. Terdapat 10 variabel untuk analisis clustering terhadap 15 Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung, 10 variabel tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel penelitian

Variabel	Penjelasan Variabel
(1)	(2)
X ₁	Indeks Kedalaman kemiskinan/ <i>Poverty Gap Index</i> (P1) merupakan ukuran rata-rata kesenjangan pengeluaran masing-masing penduduk miskin terhadap garis kemiskinan. Nilai agregat dari <i>poverty gap index</i> menunjukkan biaya mengentaskan kemiskinan dengan membuat target transfer yang sempurna terhadap penduduk miskin dalam hal tidak adanya biaya transaksi dan faktor penghambat. Semakin kecil nilai <i>poverty gap index</i> , semakin besar potensi ekonomi untuk dana pengentasan kemiskinan berdasarkan identifikasi karakteristik penduduk miskin dan juga untuk target sasaran bantuan dan program.
X ₂	Indeks Keparahan Kemiskinan/ <i>Poverty Severity Index</i> (P2) merupakan indeks yang memberikan informasi mengenai gambaran penyebaran pengeluaran di antara penduduk miskin. Indeks ini memberikan informasi yang saling melengkapi pada insiden kemiskinan. Sebagai contoh, mungkin terdapat kasus bahwa beberapa kelompok penduduk miskin memiliki insiden kemiskinan yang tinggi tetapi jurang kemiskinannya (<i>poverty gap</i>) rendah, sementara kelompok penduduk lain mempunyai insiden kemiskinan yang rendah tetapi memiliki jurang kemiskinan yang tinggi bagi penduduk yang miskin.
X ₃	Indeks Pembangunan Manusia (IPM) mengukur pencapaian hasil pembangunan dari suatu daerah/wilayah dalam tiga dimensi dasar pembangunan yaitu: lamanya hidup, pengetahuan/tingkat pendidikan dan standar hidup layak.
X ₄	Angka Beban Ketergantungan/ Rasio ketergantungan(<i>Dependency Ratio</i>) merupakan perbandingan antara jumlah penduduk umur 0-14 tahun ditambah dengan jumlah penduduk 65 tahun ke atas (keduanya dianggap dengan bukan angkatan kerja) dibandingkan dengan jumlah penduduk usia 15-64 tahun (angkatan kerja).
X ₅	Angka Buta Huruf merupakan proporsi usia 15 tahun ke atas yang tidak dapat membaca dan menulis huruf latin dan huruf lainnya terhadap penduduk usia 15 tahun ke atas.
X ₆	Persentase rumah tangga yang memiliki luas lantai per kapita >10m ² merupakan luas lantai rumah dibagi dengan jumlah anggota rumah tangga (ART).
X ₇	Persentase penduduk umur 5 tahun ke atas yang mengakses internet merupakan penduduk berusia lima tahun ke atas yang mengakses internet tiga bulan terakhir (Desember 2016 sd Februari 2017).
X ₈	Persentase penduduk yang menjadi korban kejahatan sejak maret 2016 – Februari 2017. Korban kejahatan adalah orang yang menderita kerugian baik badan, jiwa, harta benda (baik milik sendiri atau orang lain), kehormatan, dan lainnya akibat suatu tindak kejahatan. Bila tindak kejahatan tersebut ditujukan kepada harta benda milik rumah tangga (bukan milik pribadi rumah tangga), maka yang dicatat sebagai korban kejahatan adalah kepala rumah tangga.
X ₉	Persentase penduduk yang menerima raskin selama 4 bulan terakhir (November 2016 sd Februari 2017).
X ₁₀	Tingkat pengangguran terbuka merupakan persentase jumlah pengangguran terhadap jumlah angkatan kerja.

Metode *Hierarchical Cluster*

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis cluster (analisis gerombol). Analisis kluster adalah tehnik yang digunakan untuk mengklasifikasikan objek ke dalam kelompok yang relatif homogen yang disebut cluster. Objek dalam tiap cluster cenderung memiliki kemiripan satu dengan lainnya, sedangkan antar cluster mempunyai sifat yang berbeda. Analisis cluster juga disebut analisis klasifikasi atau taksonomi numeric (numerical taxonomy). Analisis cluster pada prinsipnya digunakan untuk mereduksi data yaitu meringkas sejumlah variabel menjadi lebih sedikit dan menamakannya sebagai kluster.

Analisis kluster dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu *Hierarchical Cluster* dan *K-Means Cluster* (*Nonhierarchical cluster*). Pengelompokan secara hierarki biasanya digunakan untuk jumlah sampel yang relatif sedikit. Sedangkan untuk data yang banyak dapat digunakan *K-Means Cluster*.

Tujuan pengklasteran ialah untuk mengelompokkan obyek yang mirip dalam kluster yang sama, maka beberapa ukuran diperlukan untuk mengakses seberapa mirip atau berbeda obyek-obyek tersebut. Pendekatan yang paling biasa ialah mengukur kemiripan dinyatakan dalam jarak (distance) antara pasangan obyek. Makin besar nilai ukuran kemiripan atau jarak antar dua buah obyek, makin besar pula perbedaan antara dua objek tersebut, sehingga cenderung untuk tidak menganggapnya ke dalam kelompok yang sama.

Terdapat beberapa cara dalam mengukur jarak, yaitu:

- Menggunakan jarak euclidean, yaitu jarak berupa akar kuadrat perbedaan nilai untuk tiap variabel.

Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ maka

$$D(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \dots + (x_p - y_p)^2}$$

- Menggunakan jarak kuadrat *euclidean* (*squared euclidean distance*).
- The city Block or Manhattan Distance* antara dua objek merupakan jumlah nilai perbedaan mutlak untuk tiap variabel. Jarak ini juga disebut jarak *Minkowski*.

Jika $x' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$; p adalah variabel. Maka $x_1' = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p})$ adalah kumpulan variabel pada obyek ke- i

$$d_{ij} = (\sum_{k=1}^p x_{ik} - y_{jk})^{1/r}$$
 dengan d_{ij} adalah jarak antar dua obyek ke- i dan obyek ke- j

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pengklasteran:

- Sampel yang diambil harus benar-benar bisa mewakili populasi.
- Pengujian Multikolinieritas untuk mengetahui ada tidaknya variabel independen yang memiliki kemiripan dengan variabel independen lainnya.
- Transformasi data

Jika terdapat perbedaan nilai yang besar antar variabel yang dapat menyebabkan bias dalam analisis kluster maka data asli perlu ditransformasikan (standarisasi). Misalnya terdapat variabel dalam satuan puluhan dan ada dengan satuan ratusan. Perbedaan data yang besar akan menyebabkan perhitungan jarak menjadi tidak valid.

- Analisis Kluster

Metode yang digunakan adalah metode *hierarki* (*average Linkage*) dengan teknik *agglomerative* dan ukuran jarak *euclidean*. Langkah-langkah pengelompokan dalam analisis kluster dengan metode hierarki mencakup tiga hal, yaitu:

- Mengukur kesamaan jarak

Hal yang penting dalam penggerombolan adalah bagaimana mengkualifikasi ukuran kemiripan antar obyek.

- Membentuk kluster secara hierarkis

Dalam metode ini menggunakan aglomerasi. Dalam metode aglomerasi tiap observasi pada mulanya dianggap sebagai cluster tersendiri sehingga terdapat cluster sebanyak jumlah observasi. Kemudian dua cluster yang terdekat kesamaannya digabung menjadi suatu cluster baru, sehingga jumlah cluster berkurang satu pada tiap tahap.

- Melakukan interpretasi terhadap kluster yang terbentuk

Tahap akhir dari analisis kluster adalah menginterpretasikan dari kluster-kluster yang terbentuk.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Deskriptif

Karakteristik tingkat kesejahteraan rakyat di Provinsi Lampung dapat dilihat dari berbagai Variabel. Berikut gambaran karakteristik tingkat kesejahteraannya:

Tabel 2. Gambaran Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Karakteristik Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017

No	Kabupaten/Kota	P1	P2	IPM	ABK	Buta huruf	Persentase luas lantai per kapita >10m ²	Akses Internet	korban kejahatan	Penerima Raskin	TPT
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	Lampung Barat	2,15	0,49	66,0 6	45,7 5	1,89	80,93	21,25	1,66	37,92	0,96
2	Tanggamus	1,81	0,35	64,9 4	50,1 4	3,33	91,41	15,09	1,43	46,62	5,08
3	Lampung Selatan	2,36	0,53	66,9 5	51,5 8	2,9	92,28	21,65	1,09	62,18	4,8
4	Lampung Timur	2,96	0,78	68,0 5	49,7 8	4,13	98,38	19,59	1,37	57,37	3,89
5	Lampung Tengah	1,99	0,45	68,9 5	49,1 6	3,32	95,36	19,87	2,04	55,46	3,08
6	Lampung Utara	4,19	1,15	66,5 8	51,3 8	2,43	87,42	17,66	1,23	53,36	5,62
7	Way Kanan	2,05	0,47	65,9 7	50,3 2	4,19	84,41	15,67	1,04	39,25	2,88
8	Tulang Bawang	1,53	0,36	67,0 7	50,6 8	3,18	88,16	22,33	1,66	34,22	3,47
9	Pesawaran	3,31	0,87	64,4 3	51,0 8	3,97	92,49	17,7	1,36	54,77	5,73
10	Pringsewu	1,71	0,39	68,6 1	50,3 5	2,9	92,32	18,24	0,64	18,59	4,63
11	Mesuji	1,13	0,27	61,8 7	49,8 5	4,87	94,17	19,48	1,63	31,8	0,65
12	Tulang Bawang Barat	1,08	0,21	64,5 8	49,1 7	4,89	90,24	21,1	1,17	54,27	1,86
13	Pesisir Barat	2,08	0,48	62,2 1	54,2 1	2,84	75,88	16,78	0,38	44,58	0,96*
14	Bandar Lampung	1,48	0,36	75,9 8	42,9 5	1,21	85,06	42,06	1,63	34,31	8,1
15	Metro	1,92	0,6	75,8 7	43,1 5	2,31	93,35	42,89	1,8	7,82	4,64
	Provinsi Lampung	2,16	0,51	68,2 5	49,1 1	3,11	91,01	22,45	1,43	47,18	4,33

Berdasarkan tabel di atas, Provinsi Lampung memiliki indeks kedalaman kemiskinan sebesar 2,16 dan indeks keparahan kemiskinan sebesar 0,51. Kabupaten/Kota yang memiliki Indeks Kedalamankemiskinan dan Indeks Keparahan kemiskinan tertinggi adalah Kabupaten Lampung Utara, masing-masing sebesar 4,19 dan 1,15 persen. Sedangkan indeks kedalaman kemiskinan dan indeks keparahan kemiskinan terendah di Provinsi Lampung adalah Kabupaten Tulang Bawang Barat, masing-masing sebesar 1,08 dan 0,21.

Angka Indeks Pembangunan Manusia(IPM) memberikan gambaran komprehensif mengenai tingkat pencapaian pembangunan manusia sebagai dampak dari kegiatan pembangunan yang dilakukan oleh suatu negara/daerah. Semakin tinggi nilai IPM suatu daerah, menunjukkan pencapaian pembangunan manusianya semakin baik. Pada tahun 2017, Provinsi Lampung memiliki angka IPM sebesar 68,25. IPM tertinggi di Provinsi Lampung adalah Kota Bandar Lampung dan Kota Metro, masing-masing sebesar 75,98 dan 75,87. Sedangkan IPM terendah di Provinsi Lampung adalah Kabupaten Mesuji yakni sebesar 61,87.

Tingginya angka IPM di daerah perkotaan mengindikasikan bahwa masih adanya ketimpangan sarana dan prasarana di daerah Kota dan Kabupaten, terutama dalam hal pendidikan, pendapatan dan kesehatan.

Angka Beban Ketergantungan (*Dependency Ratio*) merupakan Rasio ketergantungan (dependency ratio). Indikator ini secara kasar dapat menunjukkan keadaan ekonomi suatu daerah apakah tergolong daerah maju atau daerah yang sedang berkembang. Semakin tingginya persentase *dependency ratio* menunjukkan semakin tingginya beban yang harus ditanggung penduduk yang produktif untuk membiayai hidup penduduk yang belum produktif dan tidak produktif lagi. Pada tahun 2017, Angka Beban ketergantungan Provinsi Lampung sebesar 49,11 persen. Hal ini berarti bahwa setiap 100 orang yang berusia kerja (dianggap produktif) mempunyai tanggungan sebanyak 49 orang yang belum produktif dan dianggap tidak produktif lagi. Kabupaten/Kota yang memiliki Angka beban ketergantungan tertinggi adalah Kabupaten Pesisir Barat, yakni sebesar 54,21 persen sedangkan yang memiliki Angka beban ketergantungan terendah adalah Kota Bandar Lampung, yakni sebesar 42,95 persen.

Tingkat buta huruf yang rendah menunjukkan adanya sebuah sistem pendidikan dasar yang efektif dan/atau program keaksaraan yang memungkinkan sebagian besar penduduk untuk memperoleh kemampuan menggunakan kata-kata tertulis dalam kehidupan sehari-hari dan melanjutkan pembelajarannya. Semakin rendah angka buta huruf, maka semakin baik tingkat pendidikan di daerah tersebut. Tingkat buta huruf di Provinsi Lampung pada tahun 2017 sebesar 3,11 persen. Artinya, dari 100 orang berumur 15 tahun ke atas di Provinsi Lampung, 3 orang tersebut tidak dapat membaca ataupun menulis. Kabupaten/Kota yang memiliki tingkat buta huruf tertinggi adalah Kabupaten Tulang Bawang Barat yaitu sebesar 4,89 persen sementara yang terendah adalah Kota Bandar Lampung yaitu 1,21 persen.

Salah satu kriteria WHO dari rumah sehat adalah rumah tinggal yang memiliki luas lantai per orang minimal lebih dari 10 m². Persentase rumah tangga yang memiliki luas lantai lebih dari 10 m² di Provinsi Lampung adalah 91,01 persen. Kabupaten/Kota yang memiliki persentase rumah tangga dengan luas lantai lebih dari 10 m² terbesar adalah Kabupaten Lampung Timur yakni sebesar 98,38 persen, sedangkan Kabupaten/kota yang memiliki persentase rumah tangga dengan luas lantai lebih dari 10 m² adalah Kabupaten Pesisir Barat yakni sebesar 75,88 persen.

Akses Internet digunakan untuk mengukur tingkat kemampuan masyarakat terhadap teknologi terutama untuk mengakses komunikasi dan informasi yang dapat bermanfaat dalam mendukung upaya pembangunan. Semakin tinggi persentase rumah tangga yang memiliki akses internet, maka semakin banyak rumah tangga yang memanfaatkan teknologi informasi dalam hal ini akses internet di kehidupan sehari-hari. Persentase penduduk umur 15 tahun ke atas yang mengakses internet dalam tiga bulan terakhir pada Provinsi Lampung sebesar 22,45 persen. Kabupaten/kota yang memiliki penduduk dengan akses internet tertinggi adalah Kota Metro dan Kota Bandar Lampung, masing-masing sebesar 42,89 persen dan 42,06 persen. Hal ini mengindikasikan bahwa sarana dan prasarana akses internet di Kota lebih baik dibandingkan di Kabupaten.

Sejak maret 2016 sampai dengan Februari 2017, Kabupaten Lampung tengah merupakan Kabupaten yang memiliki persentase korban kejahatan tertinggi, yaitu sebesar 2,04 persen. Sedangkan Kabupaten/kota dengan persentase korban kejahatan terendah adalah Kabupaten Pesisir Barat. Persentase korban kejahatan ini menunjukkan kerawanan suatu daerah. Artinya semakin besar persentasenya maka semakin rawan daerah tersebut.

Raskin/beras murah merupakan program bantuan dari pemerintah untuk keluarga miskin berupa pendistribusian beras khusus kepada keluarga miskin yang harganya telah disubsidi oleh pemerintah. Persentase penerima raskin di Provinsi Lampung sebesar 47,18 persen. Hal ini menunjukkan bahwa hampir setengah rumah tangga yang berada di Provinsi Lampung membeli/menerima beras murah/raskin antara bulan November 2016 sampai dengan Februari 2018. Persentase penerima raskin tertinggi ada di Kabupaten Lampung Selatan, yakni sebesar 62,18 persen. Sedangkan persentase penerima raskin terendah adalah Kota Metro yang hanya sebesar 7,82 persen.

Tingkat pengangguran terbuka di Provinsi Lampung tahun 2017 sebesar 4,33 persen. Artinya bahwa dari 100 penduduk 15 tahun ke atas yang tersedia untuk memproduksi barang dan jasa (angkatan kerja) sebanyak 4 orang merupakan pengangguran. Kabupaten/Kota dengan TPT tertinggi adalah Kota Bandar Lampung, yakni sebesar 8,1 persen. Sementara Kabupaten/Kota dengan TPT terendah adalah Kabupaten Mesuji, yakni sebesar 0,65 persen.

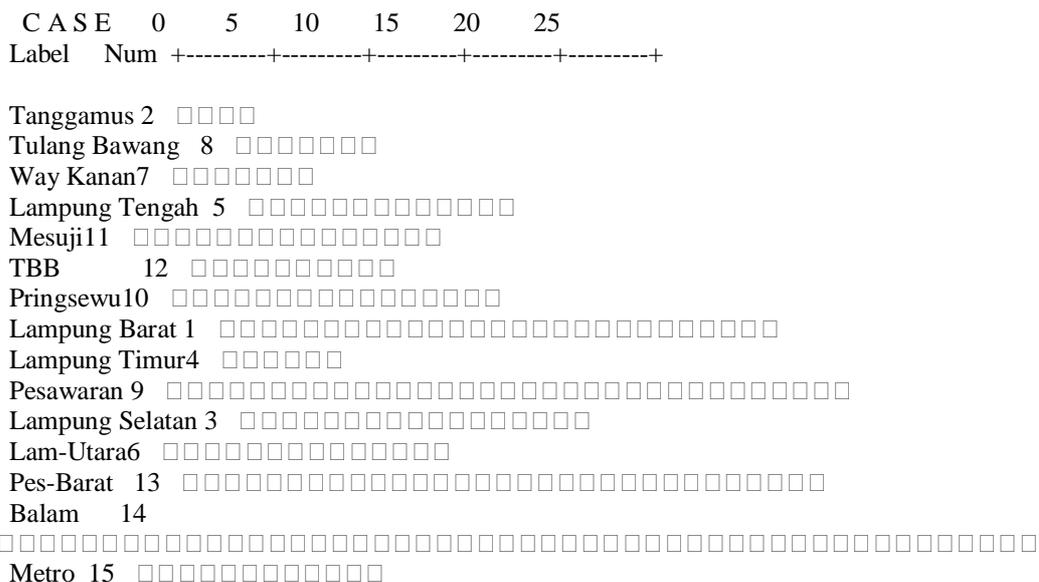
Analisis Hierarchical Cluster

Untuk mengetahui jarak dari kemiripan antar Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung dapat dilihat pada tabel *Proximity Matrix* berikut ini:

Proximity Matrix															
Kabupaten/Kota	Squared Euclidean Distance														
	Lampung Barat	Tanggamus	Lampung Selatan	Lampung Timur	Lampung Tengah	Lampung Utara	Way Kanan	Tulang Bawang	Pesawaran	Pringsewu	Mesuji	Tulang Bawang Barat	Pesisir Barat	Bandar Lampung	Metro
Lampung Barat	0,000	12,638	15,943	21,602	12,729	25,147	10,637	7,983	22,300	17,943	18,403	17,515	18,980	26,257	24,825
Tanggamus	12,638	0,000	3,866	8,619	5,225	20,754	4,600	2,990	8,698	7,847	9,645	6,927	19,397	31,015	32,165
Lampung Selatan	15,943	3,866	0,000	5,146	7,208	12,840	7,310	7,580	5,669	10,641	18,286	11,000	17,603	31,451	34,445
Lampung Timur	21,602	8,619	5,146	0,000	6,594	11,796	11,071	12,685	3,145	16,613	17,979	14,850	30,586	41,148	33,173
Lampung Tengah	12,729	5,225	7,208	6,594	0,000	23,398	11,385	5,203	11,730	17,386	11,505	10,576	32,521	29,921	25,936
Lampung Utara	25,147	20,754	12,840	11,796	23,398	0,000	20,234	24,968	5,672	26,854	43,082	38,383	28,855	47,093	45,276
Way Kanan	10,637	4,600	7,310	11,071	11,385	20,234	0,000	4,799	10,528	7,446	9,450	5,843	9,432	38,139	35,154
Tulang Bawang	7,983	2,990	7,580	12,685	5,203	24,968	4,799	0,000	14,140	7,786	7,641	7,635	18,687	25,091	22,409
Pesawaran	22,300	8,698	5,669	3,145	11,730	5,672	10,528	14,140	0,000	18,225	22,783	19,434	25,755	44,109	40,390
Pringsewu	17,943	7,847	10,641	16,613	17,386	26,854	7,446	7,786	18,225	0,000	16,592	14,738	18,475	29,894	25,554
Mesuji	18,403	9,645	18,286	17,979	11,505	43,082	9,450	7,641	22,783	16,592	0,000	4,635	26,300	51,487	38,851
Tulang Bawang Barat	17,515	6,927	11,000	14,850	10,576	38,383	5,843	7,635	19,434	14,738	4,635	0,000	19,455	43,241	40,846
Pesisir Barat	18,980	19,397	17,603	30,586	32,521	28,855	9,432	18,687	25,755	18,475	26,300	19,455	0,000	59,338	62,055
Bandar Lampung	26,257	31,015	31,451	41,148	29,921	47,093	38,139	25,091	44,109	29,894	51,487	43,241	59,338	0,000	10,216
Metro	24,825	32,165	34,445	33,173	25,936	45,276	35,154	22,409	40,390	25,554	38,851	40,846	62,055	10,216	0,000

Berdasarkan hasil analisis kluster menurut 10 variabel diatas, 15 Kabupaten/kota di Provinsi Lampung dikelompokkan berdasarkan karakteristik yang sama. Dari gambar dendrogram dibawah ini, dapat diputuskan berapa banyak kluster yang akan dibentuk. Dari gambar tersebut, sebaiknya dibuat empat kluster. Empat kluster tersebut diharapkan mampu menggambarkan perbedaan karakteristik satu kluster dengan kluster lainnya.

Rescaled Distance Cluster Combine



Berdasarkan dendrogram tersebut, 15 Kabupaten/kota di Provinsi Lampung dapat dikelompokkan menjadi empat kelompok. Keempat kelompok tersebut adalah:

1. Kelompok/Cluster 1 terdiri dari Kota Bandar Lampung dan Kota Metro.
2. Kelompok/Cluster 2 terdiri dari Kabupaten Lampung Barat, Tanggamus, Lampung Tengah, Way Kanan, Tulang Bawang, Pringsewu, Mesuji dan Tulang Bawang Barat
3. Kelompok/Cluster 3 terdiri dari Kabupaten Lampung Selatan, Lampung Timur, Lampung Utara dan Pesawaran
4. Sedangkan Kleompok/Klaster 4 hanya terdiri dari Kabupaten Pesisir Barat.

Berdasarkan hasil clustering tersebut, maka pencirian kluster dari masing-masing kluster tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Data rata-rata Analisis kluster di Provinsi Lampung Tahun 2017

Kluster	(P1)	(P2)	IPM	ABK	Buta huruf	luas lantai per kapita >10m2	Akses Interne	korban kejahatan	Penerima Raskin	TPT
---------	------	------	-----	-----	------------	------------------------------	---------------	------------------	-----------------	-----

							t				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	Bandar Lampung Metro	1,70(CR)	0,48(CT)	75,93(T)	43,05(R)	1,76(R)	89,21(CR)	42,48(T)	1,72(T)	21,07(R)	6,37(T)
2	Lampung Barat Tanggamus Lampung Tengah Way Kanan Tulang Bawang Pringsewu Mesuji Tulang Bawang Barat	1,68(R)	0,37(R)	66,01(CR)	49,43(CR)	3,57(T)	89,63(CT)	19,13(CR)	1,41(CT)	39,77(CR)	2,83(CR)
3	Lampung Selatan Lampung Timur Lampung Utara Pesawaran	3,21(T)	0,83(T)	66,50(CT)	50,96(CT)	3,36(CT)	92,64(T)	19,15(CT)	1,26(CR)	56,92(T)	5,01(CT)
4	Pesisir Barat	2,08(CT)	0,48(CT)	62,20(R)	54,21(T)	2,84(CR)	75,88(R)	16,78(R)	0,38(R)	44,58(CT)	0,96(R)

Ket :T: tinggi, CT : cukup Tinggi, CR: Cukup Rendah, R: Rendah

Pencirian klaster dilakukan dengan membandingkan nilai antar klaster dalam suatu variabel. Perbandingan tersebut menggunakan empat skala, yaitu tinggi, cukup tinggi, cukup rendah dan rendah. Adapun pencirian dari empat cluster tersebut adalah sebagai berikut:

- Klaster pertama terdiri dari Kota Bandar Lampung dan Kota Metro. Klaster ini dicirikan dengan IPM, Akses internet, korban kejahatan dan Tingkat Pengangguran Terbuka yang tinggi, namun memiliki angka buta huruf dan persentase penerima raskin terendah. Klaster ini merupakan klaster terbaik tingkat kesejahteraan rakyatnya di Provinsi Lampung. Penduduk Kota lebih baik dari segi fasilitas, sarana dan prasarana yang ada.
- Klaster kedua terdiri dari Kabupaten Lampung Barat, Tanggamus, Lampung Tengah, Way Kanan, Tulang Bawang, Pringsewu, Mesuji dan Tulang Bawang Barat. Klaster ini dicirikan dengan Indeks Kedalaman Kemiskinan, indeks keparahan kemiskinan yang rendah, namun memiliki angka Buta Huruf yang tinggi. Variabel IPM, Beban ketergantungan, akses internet, dan TPT cukup rendah, sedangkan variabel luas lantai per kapita lebih dari 10 m² dan korban kejahatan cukup tinggi.
- Klaster ketiga terdiri dari Kabupaten Lampung Selatan, Lampung Timur, Lampung Utara dan Pesawaran. Klaster ini dicirikan dengan indeks keparahan kemiskinan, indeks kedalaman kemiskinan, luas lantai per kapita lebih dari 10 m², dan penerima raskin yang tinggi. IPM dan akses internet yang cukup tinggi, begitu juga analisis beban ketergantungan, TPT dan angka buta huruf yang juga cukup tinggi. Sedangkan variabel korban kejahatan cukup rendah.
- Klaster keempat hanya terdiri dari Kabupaten Pesisir Barat. Klaster ini dicirikan dengan angka beban ketergantungan yang tinggi, indeks kedalaman dan keparahan kemiskinan dan penerima raskin yang cukup tinggi, angka buta huruf yang cukup rendah dan variabel IPM, persentase luas lantai per kapita lebih dari 10 m², akses internet dan TPT yang rendah. Kabupaten Pesisir barat merupakan Kabupaten terbaru di Provinsi Lampung. Pada klaster ini masih banyak tantangan yang harus dibenahi dalam pembangunan Kabupaten Pesisir Barat. Terlihat bahwa variabel ekonomi, sosial, maupun kesehatan masih rendah di Kabupaten Pesisir Barat.

4. KESIMPULAN

Dari hasil analisis dan pembahasan, maka dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

- Dari analisis cluster yang dilakukan, terdapat 4 cluster untuk membandingkan tingkat kesejahteraan rakyat di Provinsi Lampung.
- Keempat cluster tersebut adalah: klaster pertama terdiri dari Kota Bandar Lampung dan Kota Metro, klaster kedua terdiri dari Kabupaten Lampung Barat, Tanggamus, Lampung Tengah, Way Kanan, Tulang Bawang, Pringsewu dan Mesuji, klaster ketiga terdiri dari Kabupaten Lampung selatan, Lampung Timur, Lampung Utara dan Pesawaran, sedangkan klaster keempat terdiri dari Kabupaten Pesisir Barat.
- Gambaran umum kesejahteraan rakyat di Provinsi Lampung masih belum merata. Hal ini dapat dilihat dari angka kedalaman kemiskinan dan keparahan kemiskinan yang masih tinggi di masing-masing Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung. Angka IPM di Kabupaten masih sangat rendah jika dibandingkan dengan IPM di Daerah Perkotaan. Umumnya sarana dan prasarana di Kota lebih baik jika dibandingkan dengan di Kabupaten, hal ini menunjukkan masih adanya ketimpangan pembangunan di Provinsi Lampung.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih saya sampaikan kepada Ibu Wintarti Dyah Indriani, SE selaku kepala BPS Kabupaten Pesawaran dalam dukungannya selama ini. Kemudian saya ucapkan terima kasih juga bagi rekan-rekan saya (Agustina Riyanti, Abdul Kadir dan Lusi Oktari) yang telah membantu saya dalam menyelesaikan makalah ini.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Pusat Statistik.2017..*Indikator Kesejahteraan Rakyat 2017*. Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung, Provinsi Lampung.
- [2] Basri F.H. 1995. *Perekonomian Indonesia Menjelang Abad XXI : Distorsi, Peluang dan Kendala*. Jakarta:Erlangga.
- [3] Badan Pusat Statistik.2017..*Statistik Daerah Provinsi Lampung 2018*. Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung, Provinsi Lampung.

KONTRUKSI MODEL ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL ATAS STRUKTUR HIRARKIS JALUR KERETA API SEMI-DOUBLE TRACK

Tri Utomo^{1*}, Eristia Arfi¹

¹Program Studi Matematika, Fakultas Sains, Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan
Jl. Terusan Ryacudu, Way Hui, Jati Agung, Lampung Selatan 35365

*Penulis Korespodensi : tri.utomo@ma.itera.ac.id

Abstrak

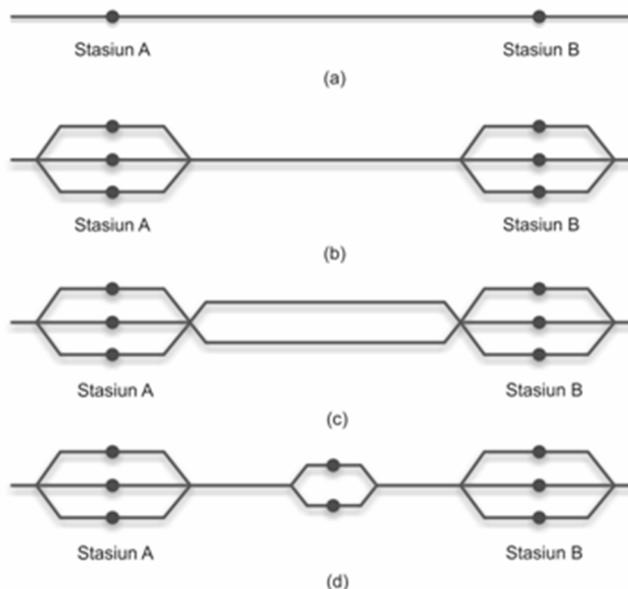
Dalam mengatasi permasalahan kemacetan, pemerintah memberikan kebijakan salah satunya yaitu dengan membangun jalur kereta api double-track. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan alternatif lain dalam mengatasi permasalahan kereta api dengan memanfaatkan jalur kereta api yang sudah ada (single-track), yaitu dengan membangun suatu persimpangan dipertengahan jalur, yang kemudian diberi istilah sebagai jalur kereta api semi-double track. Pada penelitian ini, diberikan penjelasan dalam melakukan kontruksi model Aljabar Max-Plus Interval atas struktur hirarkis jalur kereta api semi-double track.

Kata kunci: Aljabar Max-Plus, Petri Net, Railways, Semi-Double Track, Struktur Hirarkis

1. Pendahuluan

Kemacetan merupakan permasalahan yang dihadapi oleh hampir disemua negara, termasuk Indonesia. Hal ini dapat diatasi dengan cara mengalihkan transportasi ke mode transportasi masal, contohnya seperti kereta api. Terkait dengan hal itu, pemerintah Indonesia telah menetapkan beberapa kebijakan yaitu pembangunan jalur kereta api double track.

Berdasarkan penjelasan di atas, pada penelitian ini dimaksudkan untuk mencari solusi alternatif dalam mengatasi permasalahan perkeretaapian. Ide penelitian ini adalah mengoptimalkan penggunaan jalur kereta api single track dengan cara menambahkan persimpangan di tengah-tengah jalur kereta api di antara dua stasiun utama yang selanjutnya diberi istilah jalur kereta api semi-double track, sebagai ilustrasi bisa dilihat pada Gambar 1. Permasalahan pada jalur kereta api semi-double track adalah dalam menentukan hirarkis arah jalur lintasana. Hal ini disebabkan karena adanya pembagian *resource* (rel) secara bergantian untuk beberapa kereta api yang melaluinya.



Gambar 1 Ilustrasi Permasalahan dari Dua Stasiun Kereta Api (a) Dua Stasiun yang Digambarkan dalam Sebuah Graf, (b) Ilustrasi Jalur Kereta Api Single track, (c) Ilustrasi Jalur Kereta Api double track, (d) Ilustrasi Jalur Kereta Api semi-double track

Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh (Utomo & Subiono, 2015). Pada artikel ini, dilakukan penelitian lebih lanjut dari model petrinet yang sudah dikonstruksi pada penelitian sebelumnya, yaitu dengan mengkonstruksi model Aljabar Max-Plus Interval.

Beberapa penelitian yang terkait dengan Aljabar Max-Plus Interval yaitu (Fahim, 2013) dengan judul Aplikasi Aljabar Max-Plus pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta Api Komuter. Penelitian ini menghasilkan kesimpulan bahwa periode keberangkatan setiap λ menit sekali, dengan $41,6 < \lambda < 51,9$. Selain itu

Sedangkan penelitian terkait dengan penjadwalan kereta api juga sudah pernah dilakukan oleh (Afiatna, 2013) yaitu Pemodelan dan Penjadwalan Monorel dan Trem yang Terintegrasi di Kota Surabaya Menggunakan Aljabar Max-Plus, dan menghasilkan kesimpulan periode keberangkatannya adalah 4,6. Selain itu (Alfiah, 2011) dengan judul Pemodelan dan Penjadwalan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus juga meneliti tentang penjadwalan kereta api. Akan tetapi penelitian-penelitian mengenai penjadwalan kereta api ini hanya membahas penjadwalannya tanpa melihat jalur kereta yang digunakan yaitu single track atau double track. Sehingga peneliti ingin melakukan penelitian terkait masalah penjadwalan kereta api dengan mempertimbangkan jalur kereta api yang digunakan.

2. Dasar Teori

Aljabar Max-Plus adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan \mathbb{R}_ϵ dengan $\mathbb{R}_\epsilon = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ dan $\epsilon = -\infty$ beserta dengan dua operator biner yaitu Operator Max (\oplus “baca: oplus”) dan Operator Plus (\otimes “baca: otimes”), yang didefinisikan sebagai berikut, $\forall x, y \in \mathbb{R}_\epsilon$

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y = x + y.$$

Diketahui bahwa $(\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring dengan elemen netral ϵ dan elemen satuan 0 (Subiono, 2015).

Sedangkan Aljabar Max-Plus Interval didefinisikan sebagai berikut

$$I(R)_{max} = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in R \text{ dan } \epsilon < \underline{x} \leq \bar{x}\} \cup \{\epsilon, \epsilon\}$$

dengan operasi \oplus dan \otimes didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} x \oplus y &= [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \\ x \otimes y &= [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}] \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in I(R)_{max}$

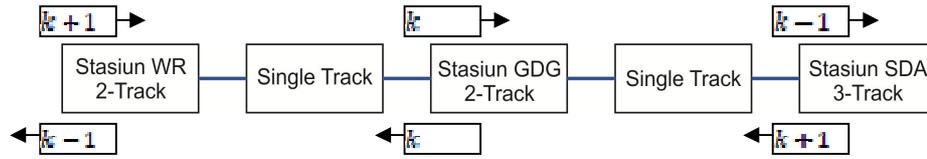
3. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian sebelumnya telah didapatkan model Petri Net. Model Petri Net tersebut merupakan model dengan keadaan *non-autonomous*, yaitu dengan dua *transition source*. *Transition source* adalah *transition* yang akan selalu *enabled* oleh keadaan di luar sistem. Dua *transition source* pada model Petri Net ini adalah *transition* yang menandakan kedatangan kereta api dari WO menuju ke WR (*transition* t_1) dan *transition* yang menandakan kedatangan kereta api dari BG menuju ke SDA (*Transition* t_7). Selain itu model Petri Net tersebut mempunyai dua *transition sink*, yaitu *transition* yang menjadi output dari suatu model. Dua *transition sink* pada model Petri Net ini adalah *transition* yang menandakan kedatangan kereta api dari SDA menuju ke BG (*Transition* t_6) dan *transition* yang menandakan keberangkatan kereta api dari WR menuju ke WO (*Transition* t_{12}).

Dalam melakukan pemodelan Aljabar Max-Plus Interval, model Petri Net ini diubah menjadi keadaan *autonomous*, yaitu dengan menambahkan 2 *place* yang berfungsi untuk menghubungkan *transition sink* dengan *transition source* (*transition* t_6 dengan *transition* t_1 , dan *transition* t_{12} dengan *transition* t_7). *Place* ini difungsikan sebagai penanda selang waktu antara kereta api yang keluar dari sistem dengan kereta api yang masuk ke dalam sistem. Dalam hal ini, dimisalkan ada n kereta api pada saat ke- k yang berjalan dari WR menuju ke SDA, maka untuk kereta api yang datang dari WO di WR berikutnya ($k + 1$) harus menunggu kereta api ke- $(k + 1 - n)$ di SDA berjalan menuju ke BG dalam selang waktu tertentu.

Untuk mempermudah dalam menjelaskan pembentukan model Aljabar Max-Plus Interval berikut diberikan ilustrasi posisi saat terjadinya persilangan antara kereta api yang berjalan dari WR menuju ke SDA dengan kereta api yang berjalan dari SDA menuju ke WR. Seperti pada penjelasan-penjelasan sebelumnya, diketahui bahwa setiap kereta api yang berjalannya dari WR menuju ke SDA akan saling berbagi resource dengan kereta api yang berjalan dari SDA menuju ke WR, atau sebaliknya. Berdasarkan Gambar

ilustrasi jalur kereta api WR-SDA, diketahui bahwa terdapat 3 lokasi persilangan yang mungkin dapat dilakukan yaitu di WR, GDG, dan SDA.



Gambar 2 Ilustrasi Posisi Saat Terjadinya Persilangan Kereta Api

Perhatikan Gambar 2, jika dimisalkan persilangan kereta api yang berjalan dari WR menuju ke SDA saat ke- k dengan kereta api yang berjalan dari SDA menuju ke WR saat ke- k terjadi di GDG, maka persilangan kereta api yang berjalan dari WR menuju ke SDA saat ke- $(k + 1)$ akan terjadi di WR dengan kereta api yang berjalan dari SDA menuju ke WR saat ke- $(k - 1)$. Selain itu persilangan kereta api yang berjalan dari WR menuju ke SDA saat ke- $(k - 1)$ akan terjadi di SDA dengan kereta api yang berjalan dari SDA menuju ke WR saat ke- $(k + 1)$.

Untuk keperluan selanjutnya diberikan pendefinisian variabel-variabel, yaitu variabel yang menunjukkan waktu dan variabel yang menunjukkan lama waktu, berikut variabel yang menunjukkan waktu.

- $t_1(k)$ waktu kedatangan kereta api dari WO (Luar Sistem) ke WR pada saat ke- k
- $t_2(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari WR ke GDG pada saat ke- k
- $t_3(k)$ waktu kedatangan kereta api dari WR ke GDG pada saat ke- k
- $t_4(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari GDG ke SDA pada saat ke- k
- $t_5(k)$ waktu kedatangan kereta api dari GDG ke SDA pada saat ke- k
- $t_6(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari SDA ke BG (Luar Sistem) pada saat ke- k
- $t_7(k)$ waktu kedatangan kereta api dari BG (Luar Sistem) ke SDA saat ke- k
- $t_8(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari SDA ke GDG pada saat ke- k
- $t_9(k)$ waktu kedatangan kereta api dari SDA ke GDG pada saat ke- k
- $t_{10}(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari GDG ke WR pada saat ke- k
- $t_{11}(k)$ waktu kedatangan kereta api dari GDG ke WR pada saat ke- k
- $t_{12}(k)$ waktu keberangkatan kereta api dari WR ke WO (Luar Sistem) pada saat ke- k

Adapun variabel yang menunjukkan lama waktu interval, yaitu

- $v_{t_1,k}$ lama kedatangan kereta api dari WO (Luar Sistem) di WR saat ke- k
- $v_{t_2,k}$ lama kereta api berhenti di WR saat ke- k
- $v_{t_3,k}$ lama kereta api berjalan dari WR menuju GDG saat ke- k
- $v_{t_4,k}$ lama kereta api berhenti di GDG saat ke- k
- $v_{t_5,k}$ lama kereta api berjalan dari GDG menuju SDA saat ke- k
- $v_{t_6,k}$ lama kereta api berhenti di SDA saat ke- k
- $v_{t_7,k}$ lama kedatangan kereta api dari BG (Luar Sistem) di SDA saat ke- k
- $v_{t_8,k}$ lama kereta api berhenti di SDA saat ke- k
- $v_{t_9,k}$ lama kereta api berjalan dari SDA menuju GDG saat ke- k
- $v_{t_{10},k}$ lama kereta api berhenti di GDG saat ke- k
- $v_{t_{11},k}$ lama kereta api berjalan dari GDG menuju WR saat ke- k
- $v_{t_{12},k}$ lama kereta api berhenti di WR saat ke- k

Berdasarkan model Petri Net yang sudah dibuat dan beberapa penjelasan tambahan di atas maka dapat dibentuk model Aljabar Max-Plus Interval sebagai berikut:

$$t_1(k + 1) = [v_{t_1,k} \otimes t_6(k - 2)] \oplus [t_2(k - 1)] \oplus [t_3(k - 1)] \oplus [t_{12}(k - 2)] \oplus [t_{11}(k - 1)] \oplus [t_4(k - 1)] \oplus [t_{10}(k - 1)] \quad (1)$$

$$t_2(k + 1) = [v_{t_2,k} \otimes t_1(k + 1)] \oplus [t_9(k)] \oplus [t_3(k)] \oplus [t_{11}(k - 1)] \quad (2)$$

$$t_3(k + 1) = [v_{t_3,k} \otimes t_2(k + 1)] \oplus [t_4(k - 1)] \oplus [t_{10}(k - 1)] \quad (3)$$

$$t_4(k + 1) = [v_{t_4,k} \otimes t_3(k + 1)] \oplus [t_5(k)] \oplus [t_6(k - 2)] \oplus [t_8(k - 1)] \oplus [t_9(k)] \quad (4)$$

$$t_5(k + 1) = [v_{t_5,k} \otimes t_4(k + 1)] \oplus [t_6(k - 2)] \oplus [t_8(k - 1)] \quad (5)$$

$$t_6(k + 1) = [v_{t_6,k} \otimes t_5(k + 1)] \quad (6)$$

$$t_7(k+1) = [v_{t_7,k} \otimes t_{12}(k-2)] \oplus [t_8(k-2)] \oplus [t_9(k-1)] \oplus [t_6(k-3)] \oplus [t_5(k-1)] \oplus [t_4(k-1)] \oplus [t_{10}(k-1)] \quad (7)$$

$$t_8(k+1) = [v_{t_8,k} \otimes t_7(k+1)] \oplus [t_3(k)] \oplus [t_9(k)] \oplus [t_5(k-1)] \quad (8)$$

$$t_9(k+1) = [v_{t_9,k} \otimes t_8(k+1)] \oplus [t_4(k-1)] \oplus [t_{10}(k-1)] \quad (9)$$

$$t_{10}(k+1) = [v_{t_{10},k} \otimes t_9(k+1)] \oplus [t_{11}(k)] \oplus [t_{12}(k-1)] \oplus [t_2(k)] \oplus [t_3(k)] \quad (10)$$

$$t_{11}(k+1) = [v_{t_{11},k} \otimes t_{10}(k+1)] \oplus [t_{12}(k-1)] \oplus [t_2(k)] \quad (11)$$

$$t_{12}(k+1) = [v_{t_{12},k} \otimes t_{11}(k+1)] \quad (12)$$

Untuk keperluan penulisan, terlebih dahulu diberikan permisalan sebagai berikut,

$$t(k+1) = [t_1(k+1) \quad t_2(k+1) \quad t_3(k+1) \quad \dots \quad t_{12}(k+1)]^T$$

$$t(k) = [t_1(k) \quad t_2(k) \quad t_3(k) \quad t_4(k) \quad \dots \quad t_{12}(k)]^T$$

$$t(k-1) = [t_1(k-1) \quad t_2(k-1) \quad t_3(k-1) \quad \dots \quad t_{12}(k-1)]^T$$

$$t(k-2) = [t_1(k-2) \quad t_2(k-2) \quad t_3(k-2) \quad \dots \quad t_{12}(k-2)]^T$$

$$t(k-3) = [t_1(k-3) \quad t_2(k-3) \quad t_3(k-3) \quad \dots \quad t_{12}(k-3)]^T$$

dan

$$a_{1,1} = v_{t_1,k}$$

$$a_{1,2} = v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

$$a_{1,3} = v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

$$a_{1,4} = v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

$$a_{1,5} = v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

$$a_{1,6} = v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

$$a_{2,1} = v_{t_2,k}$$

$$a_{2,2} = v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

$$a_{2,3} = v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

$$a_{2,4} = v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

$$a_{2,5} = v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

$$a_{3,1} = v_{t_3,k}$$

$$a_{3,2} = v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k}$$

$$a_{3,3} = v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k}$$

$$a_{3,4} = v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k}$$

$$a_{4,1} = v_{t_4,k}$$

$$a_{4,2} = v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k}$$

$$a_{4,3} = v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k} \otimes v_{t_4,k}$$

$$a_{5,1} = v_{t_5,k}$$

$$a_{5,2} = v_{t_6,k} \otimes v_{t_5,k}$$

$$a_{6,1} = v_{t_6,k}$$

$$a_{7,1} = v_{t_7,k}$$

$$a_{7,2} = v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k}$$

$$a_{7,3} = v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k}$$

$$a_{7,4} = v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k}$$

$$a_{7,5} = v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k}$$

$$a_{7,6} = v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k}$$

$$a_{8,1} = v_{t_8,k}$$

$$a_{8,2} = v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k}$$

$$a_{8,3} = v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k}$$

$$a_{8,4} = v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k}$$

$$a_{8,5} = v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k}$$

$$a_{9,1} = v_{t_9,k}$$

$$a_{9,2} = v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k}$$

$$a_{9,3} = v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k}$$

$$a_{9,4} = v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{11},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0^{\otimes n} = \mathcal{E}(n \times n)$$

Sehingga A^* ada, dan didapatkan

$$A_0^* = [A_0^*, \overline{A_0^*}]$$

Sehingga Persamaan (13) dapat dikonstruksi ulang menjadi,

$$t(k+1) = [(A_0^* \otimes A_1) \otimes t(k)] \oplus [(A_0^* \otimes A_2) \otimes t(k-1)] \oplus [(A_0^* \otimes A_3) \otimes t(k-2)] \oplus [(A_0^* \otimes A_4) \otimes t(k-3)] \quad (14)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_0^* \otimes A_1 &= [A_0^* \otimes A_1, \overline{A_0^* \otimes A_1}] \\ A_0^* \otimes A_2 &= [A_0^* \otimes A_2, \overline{A_0^* \otimes A_2}] \\ A_0^* \otimes A_3 &= [A_0^* \otimes A_3, \overline{A_0^* \otimes A_3}] \\ A_0^* \otimes A_4 &= [A_0^* \otimes A_4, \overline{A_0^* \otimes A_4}] \end{aligned}$$

Langkah terakhir, dari Persamaan (14) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan relasi rekurensi orde-1 dan didapatkan persamaan relasi rekurensi orde-1 sebagai berikut.

$$\tilde{t}(k+1) = [\underline{\tilde{A}}(k), \overline{\tilde{A}}(k)] \otimes \tilde{t}(k) \quad (15)$$

dengan

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{A}} &= \begin{bmatrix} A_0^* \otimes A_1 & A_0^* \otimes A_2 & A_0^* \otimes A_3 & A_0^* \otimes A_4 \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & E & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & E & \mathcal{E} \end{bmatrix} \\ \overline{\tilde{A}} &= \begin{bmatrix} \overline{A_0^* \otimes A_1} & \overline{A_0^* \otimes A_2} & \overline{A_0^* \otimes A_3} & \overline{A_0^* \otimes A_4} \\ E & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & E & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & E & \mathcal{E} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\tilde{t}(k) = [t^T(k), t^T(k-1), t^T(k-2), t^T(k-3)]^T$$

4. Kesimpulan

Dari penelitian ini didapatkan model Aljabar Max-Plus Interval yaitu Persamaan (15). Untuk penelitian selanjutnya akan dilakukan simulasi terhadap model Aljabar Max-Plus Interval tersebut untuk mendapat sistem penjadwalan berdasarkan struktur hirarkis jalur kereta api semi-double track.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Institut Teknologi Sumatera (ITERA), yang telah memberikan dana dalam melakukan penelitian ini yang berupa Dana Penelitian Hibah Mandiri ITERA 2017.

6. Daftar Pustaka

- Afiatna, F. A. (2013). *Pemodelan dan Penjadwalan Monorel dan Trem yang Terintegrasi di Kota Surabaya Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Surabaya: Thesis of Bachelor Programs, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Alfiah, S. (2011). *Pemodelan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Surabaya: Thesis of Magister Programs, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Fahim, K. (2013). *Aplikasi Aljabar Max-Plus pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta Api Komuter*. Tugas Akhir S1 Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*. Surabaya: Buku Ajar Mata Kuliah Pilihan Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Utomo, T. (2015). *Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus*. Tesis S2 Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Utomo, T., & Subiono. (2015). *Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api SDT Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus*. Semnastika 2015 (hal. 592-601). Surabaya: Universitas Islam Negeri Surabaya. 25 April 2015