



SEMINAR NASIONAL  
METODE KUANTITATIF II  
2018

# PROSIDING

**SEMINAR  
NASIONAL**

**METODE KUANTITATIF II  
2018**

**PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA  
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU  
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA**

**PROSIDING  
SEMINAR NASIONAL  
METODE KUANTITATIF II 2018  
(SNMK II 2018)**

**“Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi”**

**Bandar Lampung, 19-20 November 2018**

**Penerbit  
Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Lampung**

## Steering Committee

Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P, *Universitas Lampung* (Rektor Unila)  
Prof. Dr. Bujang Rahman, *Universitas Lampung*  
Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc, *Universitas Lampung*  
Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D, *Universitas Lampung*  
Dr. Hartoyo, M.Si, *Universitas Lampung*  
Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D, *Universitas Lampung* (Dekan FMIPA Unila)  
Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*  
Dian Kurniasari S.Si., M.Sc, *Universitas Lampung*  
Drs. Suratman Umar, M.Sc., *Universitas Lampung*  
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, *Universitas Lampung*

## Reviewer

Prof. Drs. Mustofa , M.A., Ph.D  
Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D  
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si  
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

## Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.  
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D  
Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si  
Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

## Managing Editor

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.  
Azwar Rizaldy  
Gesang Subarkah  
Evrilia Rahmawati

## Penerbit :

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Lampung

## Redaksi

Jurusan Matematika FMIPA Unila  
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1  
Bandar Lampung 35145  
Telp/Faks. 0721-704625  
Email : [snmk.matematika@gmail.com](mailto:snmk.matematika@gmail.com)  
Cetakan pertama, Februari 2019  
Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin  
tertulis dari penerbit.

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrohmaanirrohiim*

*Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh*

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah “Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa”.

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.  
Ketua

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>i</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>ii</b>
Aliran MHD Fluida Nano Melewati Bola Bermagnet Dengan Pengaruh Konveksi Campuran oleh <i>Basuki Widodo</i> .....	1
Inferensi Regresi Semiparametrik Untuk Data Hilang Menggunakan Metode <i>Likelihood</i> Empiris Dan Simulasinya Menggunakan R oleh <i>Yuana Sukmawaty</i> , dan <i>Nur Salam</i> .....	9
Penentuan Struktur Dan Kadar Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal ( <i>Gliricidia Maculata</i> ) Kultivar Lampung Barat Sebagai Insektisida Nabati Pada Kutu Putih Tanaman Kopi ( <i>Planococcus Citri</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Hona Anjelina Putri</i> , dan <i>Nismah Nukmal</i> .....	17
Solusi Analitik Persamaan Laplace Pada Suatu Cakram oleh <i>Yulia Novita</i> , <i>Suharsono S.</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Dorrah Azis</i> .....	25
Kajian <i>Best-Fit</i> Distribusi Probabilitas Untuk Curah Hujan Harian Dan Aplikasinya Dalam Mitigasi Hujan Ekstrim Di Pulau Sumatera oleh <i>Achmad Raflie Pahlevi</i> , dan <i>Warsono</i> .....	28
Kuantifikasi Dan Penentuan Struktur Senyawa Flavonoid Ekstrak Polar Daun Gamal ( <i>Gliricidia Maculata</i> ) Kultivar Pringsewu Dan Uji Toksisitas Terhadap Kutu Putih Sirsak ( <i>Pseudococcus Cryptus</i> , Hemiptera: Pseudococcidae) oleh <i>Yayang Anas Persada</i> , dan <i>Nismah Nukma</i> .....	39
Barisan Bilangan Fibonacci <i>N</i> -Bebas oleh <i>Irmawati</i> , <i>Amanto</i> , <i>Agus Sutrisno</i> , dan <i>Muslim Ansori</i> .....	49
Metode Estimasi <i>Diagonal Weighted Least Square</i> (DWLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Nurkholifa Sholihat</i> , dan <i>Netti Herawati</i> .....	53
<i>Singgah Pai</i> : Aplikasi Android Untuk Melestarikan Budaya Lampung oleh <i>Putri Sukma Dewi</i> , <i>Refiesta Ratu Anderha</i> , <i>Lily Parnabhakti</i> , dan <i>Yolanda Dwi Prastika</i> .....	62
Metode Estimasi <i>Weighted Least Square</i> (WLS) Untuk Berbagai Ukuran Sampel (Studi Kasus Kualitas Pelayanan Perpustakaan Unila) oleh <i>Eri Setiawan</i> , <i>Wardhani Utami Dewi</i> , dan <i>Rudi Ruswandi</i> .....	68
Perbandingan Metode Solusi Awal Layak Pada Data Biaya Pengiriman Beras Perum Bulog Divre Lampung oleh <i>Dwi Wahyu Lestari</i> , dan <i>Dian Kurniasari</i> .....	77

Segmentasi Kabupaten/ Kota Berdasarkan Karakteristik Penduduk Lanjut Usia Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 oleh <i>Agustina Riyanti, dan Tri Rena Maya Sari</i> .....	86
Penerapan Metode <i>Autoregressive Distributed Lag</i> (Ardl) Dalam Memodelkan Persentase Penduduk Miskin Terhadap Tingkat Pengangguran Terbuka Di Provinsi Lampung Periode 2011-2017 oleh <i>Moni Dwi Fenski, Nusyirwan, dan Agus Sutrisno</i> .....	95
Simulasi Pemodelan Klaim Agregasi Dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson Dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh oleh <i>Rudi Ruswandi, Ira Syavitri, dan Subian Saidi</i> .....	105
Karakteristik Fungsi Phi ( $\emptyset$ ) Euler oleh <i>Rini Karina Agustini, Suharsono S., Wamiliana, dan Notiragayu</i> .....	110
Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Pada Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi oleh <i>Farida, Agus Sutrisno, Dorrah Aziz, dan Tiryono Ruby</i> .....	114
Evaluasi Nilai UN Sma/Ma IPA Provinsi Lampung Dengan Graf <i>Maximum Spanning Tree</i> oleh <i>Sugama Maskar, Refiesta Ratu Anderha, dan Andriyanto</i> .....	123
Penentuan Rute Terpendek Pada Optimalisasi Jalur Tol Trans Jawa Dengan Menerapkan Algoritma <i>Floyd-Warshall</i> oleh <i>Maharani Damayanti, Notiragayu, dan La Zakaria</i> .....	131
Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau <i>Loop</i> Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam oleh <i>Dracjat Indrawan, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto</i> .....	139
Solusi Eksak Klasik Persamaan Tricomi oleh <i>Aura Purwaningrum, Suharsono S., Tiryono Ruby, dan Agus Sutrisno</i> .....	144
Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Empat oleh <i>Lucia Dessie Natasha, Wamiliana, Aang Nuryaman, dan Amanto</i> .....	148
Beberapa Penggunaan Rantai Markov Pada Saat Kondisi Stabil (Steady State) oleh <i>Dimas Rahmat Saputra, Dian Kurnia Sari, dan Wamiliana</i> .....	157
Ruang Barisan Selisih $L_{3/2}(\Delta_2)$ oleh <i>Aulia Rahman, Muslim Anshori, dan Dorrah Aziz</i> .....	163
Solusi Analitik Untuk Sistem KDV Homogen Dengan Metode Analisis Homotopi (HAM) oleh <i>Anita Rahmasari, Suharsono S., dan Asmiati</i> .....	171
Alokasi Dana Dari Premi Asuransi Jiwa Syariah Menggunakan Metode Dwiguna oleh <i>Rudi Ruswandi, Arum Mardiyah Nurvitasari, dan La Zakaria</i> .....	178

Analisis Biplot dalam pengelompokan Persepsi antaretnik di Bakauheni Lampung Selatan oleh <i>Karomani dan Nusyirwan</i> .....	184
Perbandingan <i>MVE-BOOTSTRAP</i> dan <i>MCD-BOOTSTRAP</i> dalam Analisis Regresi Linear Berganda pada Data Berukuran Kecil yang Mengandung Pencilan oleh <i>Ario Pandu, dan Khoirin Nisa</i> .....	192
Analisis Uji Keandalan Dua Populasi Dengan Data Tersensor oleh <i>A.S Awalluddin</i> .....	202
Iteraksi Inflasi dan Jumlah Uang Beredar di Indonesia dengan Model Bivariate Vector Autoregressive oleh <i>K. Nurika Damayanti</i> .....	211
Pengelompokan Kabupaten/ Kota Berdasarkan Indikator Pembangunan Daerah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Abdul Kadir</i> .....	222
Penggunaan Teori Antrian <i>Multi-Server</i> Dengan Distribusi Erlang oleh <i>Muhammad Taufik Rizal , Widiarti, Wamiliana, dan Rudi Ruswandi</i> .....	228
Aplikasi <i>Multiple Classification Analysis</i> (MCA) Dalam Analisis Pengaruh Variabel Sosial Ekonomi dan Demograf Terhadap Lama Sekolah Provinsi Lampung Tahun 2017 oleh <i>Desliyani Tri Wandita</i> .....	237
Keanekaragaman Arthropoda Tanah Pada Dua Tipe Pengelolaan Lahan Kopi ( <i>Coffea spp.</i> ) di Kecamatan Gedung Surian Kabupaten Lampung Barat oleh <i>Siti Ardiyanti, Suratman Umar, Nismah Nukmal, dan M. Kanedi</i> .....	244
Perbandingan <i>Mean Squared Error</i> (MSE) Metode <i>Jackknife</i> dan <i>Bootstrap</i> Pada Pendugaan Area Kecil Model Logit-Binomial oleh <i>Shindy Dwiyanti, Widiarti, dan Khoirin Nisa</i> .....	252
Aplikasi Distribusi Statistik dalam Memonitor Kualitas Udara di Bukit Kotatabang oleh <i>Raeni Chindi Defi Ocvilia, Achmad Raflie Pahlevi, Warsono, dan Mareta Asnia</i> .....	256
Klustering Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2017 oleh <i>Tri Rena Mayasari</i> .....	263
Konstruksi Model Aljabar Max-Plus Interval Atas Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi-Double Track oleh <i>Tri Utomo ,dan Eristia Arfi</i> .....	271

## KARAKTERISTIK FUNGSI PHI ( $\phi$ ) EULER

Rini Karina Agustini<sup>1</sup>, Suharsono S,<sup>1</sup> Wamiliana<sup>1</sup>, Notiragayu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung  
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145  
Penulis Korespondensi : [rini karina07@gmail.com](mailto:rini karina07@gmail.com)<sup>1</sup>

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan karakteristik dari fungsi phi ( $\phi$ ) Euler, membuktikan sifat-sifat fungsi phi ( $\phi$ ) Euler serta membuktikan apakah fungsi phi ( $\phi$ ) Euler merupakan fungsi multiplikatif. Untuk memperlihatkannya jika  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat positif dan  $\text{fpb}(m, n) = 1$ , maka  $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$  dan juga  $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$ .

**Kata kunci:** Fungsi phi, Fungsi Euler, Persamaan Karakteristik

### 1. Pendahuluan

Matematika adalah pola berpikir, mengorganisasikan, dan pembuktian yang logik. Matematika adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol. Didalam matematika, terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giuseppe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963).

Dalam teori bilangan, pada tahun 1763 Leonhard Euler memperkenalkan fungsi phi Euler. Fungsi ini hanya memperhitungkan bilangan bulat. Alasan mengapa dinamakan fungsi phi, karena fungsi ini menggunakan lambang phi ( $\phi$ ). Meskipun fungsi ini memiliki nama phi, namun dalam perhitungannya sama sekali tidak menggunakan phi ( $\phi$ ) yang bernilai 1,61803399. Penggunaan phi ( $\phi$ ) hanya untuk sebuah 'fungsi'. Pada teori bilangan, beberapa fungsi memiliki karakteristik atau sifat fungsi multiplikatif seperti pada fungsi Mobius. Oleh karena itu akan dibuktikan apakah fungsi phi juga merupakan fungsi multiplikatif.

Fungsi phi Euler diterapkan pada bilangan bulat positif,  $\phi(n)$  merupakan fungsi aritmatika yang digunakan untuk menghitung banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan  $n$  yang saling prima terhadap  $n$ .

Yang dapat ditunjukkan sebagai berikut :

Bilangan bulat yang kurang dari 12 dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$12 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah  $\{1, 5, 7, 11\}$ . Dan jumlah bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah 4 sehingga  $\phi(12) = 4$ .

Fungsi multiplikatif dapat didefinisikan sebagai berikut:

(i) Fungsi  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  dikatakan fungsi aritmetika.

(ii) Fungsi aritmetika  $f$  dikatakan fungsi multiplikatif jika

a)  $f \neq 0$ .

b)  $(m, n) = 1$ , maka  $f(mn) = f(m)f(n)$

(iii) Fungsi aritmetika  $g$  adalah multiplikatif lengkap jika untuk semua bilangan asli  $m$  dan  $n$ , berlaku  $g(mn) = g(m)g(n)$ .

Jadi  $f(n)$  adalah multiplikatif jika  $f(1)=1$ .

### 2. Metode

Metode yang digunakan untuk menentukan karakteristik fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :

1. Diberikan bilangan bulat positif  $n$ .
2. Membuktikan sifat-sifat dari fungsi phi Euler.
3. Menentukan fungsi phi Euler untuk bilangan bulat positif  $n$ .
4. Membuktikan apakah fungsi phi Euler merupakan fungsi multiplikatif

### 3. Hasil dan Pembahasan

Beberapa sifat fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :

Teorema 4.1 :

Untuk  $n$  bilangan prima dan  $k > 0$ , adalah

$$\begin{aligned}\phi(n^k) &= n^k - n^{k-1} \\ &= n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Bukti :

Jika  $\text{fpb}(m, n^k) = 1$ . Maka terdapat  $n^{k-1}$  bilangan bulat diantara 1 dan  $n^k$  yang dapat dibagi oleh  $n$ , yaitu  $n, 2n, 3n, 4n, \dots, (n^{k-1})n$ . Maka dimisalkan  $\{1, 2, \dots, n^k\}$ , kecuali  $n^k - n^{k-1}$  yang merupakan suatu bilangan bulat yang relatif prima terhadap  $n^k$  dan berdasarkan definisi fungsi phi,  $\phi(n^k) = n^k - n^{k-1}$ . Berdasarkan definisi fungsi phi Euler dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned}\phi(n^k) &= n^k - n^{k-1} \\ &= n^k \left(1 - n^{-1}\right) \\ &= n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Teorema 4.2 :

Jika bilangan bulat  $n > 1$ , memiliki faktor prima  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  maka :

$$\begin{aligned}\phi(n) &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

Bukti :

Karena  $\text{fpb}(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} p_{i+1}^{k_{i+1}}) = 1$

Diberikan definisi fungsi multiplikatif sebagai berikut

$$\begin{aligned}\phi((p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} p_{i+1}^{k_{i+1}})) &= \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) \phi(p_{i+1}^{k_{i+1}}) \\ &= \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) (p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1})\end{aligned}$$

Tetapi  $\phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } \phi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} p_{i+1}^{k_{i+1}}) &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1}) \\ &\Rightarrow \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

Contoh :

$$\phi(100) = 40$$

Penyelesaian:

$$\phi(100) = \phi(2^2 \cdot 5^2) = 100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$$

Teorema 4.3 (Karakteristik Fungsi Phi Euler)

Jika  $\text{fpb}(m, n) = 1$  maka  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ . Dan  $\phi(mn)$  merupakan fungsi multiplikatif.

Bukti :

Sebelum menunjukkan bahwa  $\phi(mn)$  merupakan fungsi multiplikatif yaitu  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ , maka haruslah terpenuhi dua syarat berikut :

- (i)  $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$
- (ii)  $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$

Akan diperlihatkan bahwa :

- (i) Apabila diambil  $m = 1$  dan  $n = 1$  maka hasilnya akan selesai, artinya terlihat jelas bahwa pasangan  $(mn)$  pastilah pasangan relatif prima. Jadi, misalkan diambil  $m > 1$  dan  $n > 1$ . Dan  $a_1, \dots, a_{\phi(m)}$  yang merupakan bilangan bulat positif  $\leq n$  yang relatif prima ke  $n$ , misalkan  $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$  dan  $\text{fpb}(k, mn) = 1$ . Kemudian  $a$  dan  $b$  didefinisikan

$$k \equiv a \pmod{m} \quad ; 0 \leq a < m \quad \text{dan} \quad k \equiv b \pmod{n} \quad ; 0 \leq b < n$$

Untuk memperlihatkan bahwa definisi diatas terpenuhi yaitu apabila diambil bilangan  $k = 5$ ,  $m = 2$  dan  $n = 3$  maka akan terpenuhi bahwa  $\text{fpb}(k, mn) = 1$  yaitu  $\text{fpb}(5, (2 \cdot 3)) = 1$ . Kemudian dapat dengan mudah didefinisikan (berdasarkan Teorema Sisa Cina)

$$k \equiv a \pmod{m} \quad ; 0 \leq a < m$$

$$5 \equiv a \pmod{2} \quad ; 0 \leq a < 2$$

Dari definisi kekongruenan, maka

$$5 = (2) \cdot 2 + 1$$

Jadi, 1 adalah sisa dari pembagiannya sehingga definisi tersebut terpenuhi yaitu

$$5 \equiv 1 \pmod{2} \quad ; 0 \leq 1 < 2$$

Begitu pun dengan definisi berikutnya

$$k \equiv b \pmod{n} \quad ; 0 \leq b < n$$

$$5 \equiv b \pmod{3} \quad ; 0 \leq b < 3$$

$$5 = (1) \cdot 3 + 2$$

Jadi, 2 adalah sisa pembagiannya sehingga definisi tersebut juga terpenuhi yaitu

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad ; 0 \leq a < m$$

Karena  $k = a + tm$  untuk suatu bilangan bulat  $t$  dan terpenuhi bahwa  $\text{fpb}(k, m) = 1$  yaitu  $\text{fpb}(5, 2) = 1$ , maka dapat ditarik kesimpulan  $\text{fpb}(a, m) = 1$  yaitu  $\text{fpb}(1, 2) = 1$ . Begitu juga karena  $k = b + tn$  untuk suatu bilangan bulat  $t$  dan terpenuhi  $\text{fpb}(k, n) = 1$  yaitu  $\text{fpb}(5, 3) = 1$  maka  $\text{fpb}(2, 3) = 1$ . Oleh karena itu, terdapat pasangan  $i \in \{1, 2, \dots, \phi(m)\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, \phi(n)\}$  yaitu

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

Dengan menggunakan pembuktian seperti diatas maka definisi tersebut terpenuhi, karena terdapat  $\phi(m)$  yaitu  $\phi(2) = 1$  dan  $\phi(n)$  yaitu  $\phi(3) = 2$  dengan pasangan  $(i, j)$  maka  $\phi(mn)$  yaitu  $\phi(6) = 2$  dan  $k$  adalah solusi unik artinya  $k$  solusi adalah tunggal (berdasarkan teorema sisa Cina) maka terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n) \text{ yaitu}$$

$$\Leftrightarrow \phi(2 \cdot 3) \leq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq 1 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \leq 2$$

Maka terbukti untuk (i) bahwa  $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$

- (ii) Untuk pasangan  $(i, j)$  dengan  $i \in \{1, 2, \dots, \phi(m)\}$  dan  $j \in \{1, 2, \dots, \phi(n)\}$  dan pandang bilangan bulat  $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$  (berdasarkan Teorema Sisa Cina) dengan bentuk

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$k \equiv b_j \pmod{n}$$

Untuk memperlihatkan definisi tersebut terpenuhi yaitu jika diambil  $k = 5$  dan  $k = 7$ ,  $m = 2$  dan  $n = 3$  sehingga terpenuhi bahwa  $\text{fpb}(k, m) = 1$  dan  $\text{fpb}(k, n) = 1$ . Pada pembuktian ini karena masing-masing pasangan  $(i, j)$  dengan solusi  $k$  nya adalah solusi yang berbeda maka akan terpenuhi bahwa  $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$ . Dapat diperlihatkan sebagai berikut

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

$$5 \equiv a_i \pmod{2}$$

$$5 = (2) \cdot 2 + 1$$

Sehingga 1 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk

$$k \equiv a_i \pmod{m}$$

Untuk definisi selanjutnya

$$k \equiv b_i \pmod{n}$$

$$7 \equiv b_i \pmod{3}$$

$$7 = (1) \cdot 3 + 4$$

Sehingga 4 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk

$$k \equiv b_i \pmod{n}$$

Karena masing-masing pasangan  $(i, j)$  dengan solusi  $k$  yang berbeda maka terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$$

$$\phi(2 \cdot 3) \geq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq \phi(2)\phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq 1 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \phi(6) \geq 1 \cdot 2$$

Maka terbukti untuk (ii) bahwa  $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$

Jadi, kedua syarat tersebut sudah terpenuhi yaitu (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ .  
dan  $\phi(mn)$  merupakan fungsi multiplikatif.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah diatas maka dapat ditarik kesimpulan bahwa apabila pasangan  $(m,n)$  adalah bilangan bulat positif dan  $\text{fpb}(m,n) = 1$  dan terpenuhi bahwa

$$\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n) \text{ dan}$$

$$\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$$

maka  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$  dan  $\phi(mn)$  merupakan fungsi multiplikatif. Sehingga terbukti bahwa karakteristik fungsi Phi Euler adalah fungsi yang multiplikatif.

#### 5. Daftar Pustaka

Burton, D.M. (1980). *Elementary Number Theory*. University Of New Hampshire, United State of Afrika.

Stewart, B.M. (1952). *Theory of Numbers*. The Macmillan Company, New York.