SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II
2018

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF II
2018

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPILIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN DAYA SAING BANGSA

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF II 2018
(SNMK II 2018)

"Penggunaan matematika, statistika, dan komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk meningkatkan daya saing bangsa dalam bidang sains dan teknologi"

Bandar Lampung, 19-20 November 2018

Penerbit
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Penerbit :
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Redaksi
Jurusan Matematika FMIPA Unila
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No 1
Bandar Lampung 35145
Telp/Faks. 0721-704625
Email : snmk.matematika@gmail.com
Cetakan pertama, Februari 2019

ISBN No. 978-623-90150-0-8

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalaamu 'alaykum warohmatulloohi wabarokaatuh

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Alloh s.w.t., karena berkat kuasa dan pertolongan-Nya acara Seminar Nasional Metode Kuantitatif (SNMK) II Tahun 2018 ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. SNMK II 2018 ini terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Lampung dan Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung. Penyelenggaraan SNMK II 2018 merupakan tindak lanjut dari kesuksesan SNMK pertama pada tahun 2017 lalu. Adapun tema yang diusung adalah "Penggunaan Matematika, Statistika dan Komputer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan daya saing bangsa".

SNMK II 2018 diikuti oleh peserta dari berbagai institusi di Indonesia diantaranya Badan Pusat Statistik, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, Universitas Lambung Mangkurat, Badan Meteorologi dan Geofisika, Unversitas Teknokrat Indonesia, Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai, Universitas Lampung dan lain-lain. Dengan berkumpulnya para peneliti, baik itu dosen maupun mahasiswa, dari berbagai institusi dan disiplin ilmu yang berbeda untuk berbagi pengalaman dan hasil penelitian pada kegiatan SNMK II ini diharapkan semakin memperluas wawasan keilmuan dan jaringan kerja sama di antara sesama peserta atau institusi. Lebih jauh lagi tentunya memberikan dampak positif pada peningkatan kualitas iklim akademik khususnya di Unila.

Selanjutnya kami haturkan terima kasih dan selamat kepada para penulis yang telah berkontribusi pada terbitnya prosiding SNMK II 2018. Mudah-mudahan artikel yang diterbitkan pada prosiding ini dapat memberikan inspirasi dan gagasan pada para pembaca untuk mengembangkan penelitiannya sehingga dapat menghasilkan publikasi yang lebih berkualitas.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor Unila, Ketua LPPM Unila dan Dekan FMIPA Unila serta Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah mendukung penuh sehingga penyelenggaraan SNMK II 2018 hingga terbitnya prosiding ini dapat berjalan dengan lancar dan sukses. Khususnya kepada seluruh panitia, terima kasih tak terhingga atas segala usaha dan kerja kerasnya demi kesuksesan acara dan terbitnya prosiding ini. Semoga Alloh s.w.t. membalasnya dengan kebaikan yang berlipat ganda. Tak lupa, mohon maaf apabila ada layanan, tingkah laku atau tutur kata dari kami yang kurang berkenan.

Bandar Lampung, 19 November 2018

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
Ketua

ISBN No. 978-623-90150-0-8

DAFTAR ISI

ISBN No. 978-623-90150-0-8

KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (∅) EULER

Rini Karina Agustini [1], Suharsono S,[1] Wamiliana[1], Notiragayu[1]

[1]*Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung*
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Penulis Korespndensi :rinikarina07@gmail.com[1]

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan karakteristik dari fungsi phi (∅) Euler, membuktikan sifat-sifat fungsi phi (∅) Euler serta membuktikan apakah fungsi phi (∅) Euler merupakan fungsi multiplikatif. Untuk memperlihatkannya jika m dan n adalah bilangan bulat positif dan $fpb(m,n) = 1$, *maka* $\emptyset(mn) \leq \emptyset(m)\emptyset(n)$ *dan juga* $\emptyset(mn) \geq \emptyset(m)\emptyset(n)$.

Kata kunci: *Fungsi phi, Fungsi Euler, Persamaan Karakteristik*

1. Pendahuluan

Matematika adalah pola berpikir, mengorganisasikan, dan pembuktian yang logik. Matematika adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol. Didalam matematika, terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963).

Dalam teori bilangan, pada tahun 1763 Leonhard Euler memperkenalkan fungsi phi Euler. Fungsi ini hanya memperhitungkan bilangan bulat. Alasan mengapa dinamakan fungsi phi, karena fungsi ini menggunakan lambang phi (ϕ). Meskipun fungsi ini memiliki nama phi, namun dalamperhitungannya sama sekali tidak menggunakan phi (ϕ) yang bernilai 1,61803399. Penggunaan phi (ϕ) hanya untuk sebuah 'fungsi'. Pada teori bilangan, beberapa fungsi memiliki karaketristik atau sifat fungsi multiplikatif seperti pada fungsi Mobius. Oleh karena itu akan dibuktikan apakah fungsi phi juga merupakan fungsi multiplikatif.

Fungsi phi Euler diterapkan pada bilangan bulat positif, $\emptyset(n)$ merupakan fungsi aritmatika yang digunakan untuk menghitung banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan *n* yang saling prima terhadap *n*.
Yang dapat ditunjukkan sebagai berikut :
Bilangan bulat yang kurang dari 12 dapat dinyatakan sebagai berikut :
12 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah $\{1,5,7,11\}$. Dan jumlah bilangan yang relatif prima terhadap 12 adalah 4 sehingga $\emptyset(12) = 4$.

Fungsi multiplikatif dapat didefinisikan sebagai berikut:

(i) Fungsi $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dikatakan fungsi aritmetika.
(ii) Fungsi aritmetika *f* dikatakan fungsi multiplikatif jika
   a) $f \neq 0$.
   b) $(m,n) = 1$, *maka* $f(mn) = f(m) f(n)$
(iii) Fungsi aritmetika *g* adalah multiplikatif lengkap jika untuk semua bilangan asli *m* dan *n*, berlaku $g(mn) = g(m) g(n)$.

Jadi f(*n*) adalah multiplikatif jika f(1)=1.

2. Metode

Metode yang digunakan untuk menentukan karakteritik fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :
1. Diberikan bilangan bulat positif *n*.
2. Membuktikan sifat-sifat dari fungsi phi Euler.
3. Menentukan fungsi phi Euler untuk bilangan bulat positif *n*.
4. Membuktikan apakah fungsi phi Euler merupakan fungsi multiplikatif

ISBN No. 978-623-90150-0-8

3. Hasil dan Pembahasan

Beberapa sifat fungsi phi Euler adalah sebagai berikut :

Teorema 4.1 :
Untuk n bilangan prima dan $k > 0$, adalah
$\emptyset(n^k) = n^k - n^{k-1}$
$\quad = n^k(1 - \frac{1}{n})$

Bukti :
Jika fpb$(m, n^k) = 1$. Maka terdapat n^{k-1} bilangan bulat diantara 1 dan n^k yang dapat dibagi oleh n, yaitu n, 2n, 3n, 4n, ... ,$(n^{k-1})n$. Maka dimisalkan $\{1, 2, \dots, n^k\}$, kecuali $n^k - n^{k-1}$ yang merupakan suatu bilangan bulat yang relatif prima terhadap p^k dan berdasarkan definisi fungsi phi, $\emptyset(n^k) = n^k - n^{k-1}$. Berdasarkan definisi fungsi phi Euler dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned}\emptyset(n^k) &= n^k - n^{k-1}\\ &= n^k(1 - n^{-1})\\ &= n^k(1 - \tfrac{1}{n})\end{aligned}$$

Teorema 4.2 :
Jika bilangan bulat $n > 1$, memiliki faktor prima $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ maka :

$$\begin{aligned}\emptyset(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_1} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1})\\ = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\\ = n \prod_{p\,|\,n}(1 - \tfrac{1}{p})\end{aligned}$$

Bukti :
Karena fpb$(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}, p_{i+1}^{k_{i+1}}) = 1$
Diberikan definisi fungsi multiplikatif sebagai berikut

$$\begin{aligned}\emptyset((p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) p_{i+1}^{k_{i+1}-1}) &= \emptyset(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i})\emptyset(p_{i+1}^{k_{i+1}})\\ &= \emptyset(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i})(p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1})\end{aligned}$$

Tetapi $\emptyset(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$
Jadi $\emptyset(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} p_{i+1}^{k_{i+1}}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_{i+1}^{k_{i+1}} - p_{i+1}^{k_{i+1}-1})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \emptyset(n) &= n\left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \tfrac{1}{p_r}\right)\\ &= n \prod_{p\,|\,n}(1 - \tfrac{1}{p})\end{aligned}$$

Contoh :
$\emptyset(100) = 40$

Penyelesaian:
$\emptyset(100) = \emptyset(2^2 \cdot 5^2) = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$

Teorema 4.3 (Karakteristik Fungsi Phi Euler)
Jika fpb$(m, n) = 1$ maka $\emptyset(mn) = \emptyset(m)\emptyset(n)$. Dan $\emptyset(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif.

Bukti :
Sebelum menunjukkan bahwa $\emptyset(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif yaitu $\emptyset(mn) = \emptyset(m)\emptyset(n)$, maka haruslah terpenuhi dua syarat berikut :
(i) $\emptyset(mn) \le \emptyset(m)\emptyset(n)$
(ii) $\emptyset(mn) \ge \emptyset(m)\emptyset(n)$

Akan diperlihatkan bahwa :
(i) Apabila diambil $m = 1$ dan $n = 1$ maka hasilnya akan selesai, artinya terlihat jelas bahwa pasangan (*mn*)pastilah pasangan relatif prima. Jadi, misalkan diambil $m > 1$ dan $n > 1$. Dan $a_1, \dots, a_{\emptyset(m)}$ yang merupakan bilangan bulat positif $\le n$ yang relatif prima ke n, misalkan $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$ dan fpb$(k, mn) = 1$. Kemudian a dan b didefinisikan

ISBN No. 978-623-90150-0-8

$k \equiv a(mod\ m) \quad ; 0 \leq a < m$ dan$k \equiv b(mod\ n)\ ; 0 \leq b < n$
Untuk memperlihatkan bahwa definisi diatas terpenuhi yaitu apabila diambil bilangan $k = 5$, $m = 2$ dan $n = 3$ maka akan terpenuhi bahwa fpb (k, mn) = 1 yaitu fpb(5, (2.3)) = 1. Kemudian dapat dengan mudah didefinisikan (berdasarkan Teorema Sisa Cina)
$k \equiv a(mod\ m) \quad ; 0 \leq a < m$
$5 \equiv a(mod\ 2) \quad ; 0 \leq a < 2$
Dari definisi kekongruenan, maka
5 = (2) 2+ 1
Jadi, 1 adalah sisa dari pembagiannya sehingga definisi tersebut terpenuhi yaitu
$5 \equiv 1(mod\ 2) \quad ; 0 \leq 1 < 2$
Begitu pun dengan definisi berikutnya
$k \equiv b(mod\ n) \quad ; 0 \leq b < n$
$5 \equiv b(mod\ 3) \quad ; 0 \leq b < n$
5 = (1) 3 + 2
Jadi, 2 adalah sisa pembagiannya sehingga definisi tersebut juga terpenuhi yaitu
$5 \equiv 2(mod\ 3) \quad ; 0 \leq a < m$
Karena $k = a + tm$ untuk suatu bilangan bulat t dan terpenuhi bahwa fpb(k,m) =1 yaitu fpb(5,2) = 1 , maka dapat ditarik kesimpulan fpb(a,m) = 1 yaitu fpb(1,2) = 1. Begitu juga karena $k = b + tn$ untuk suatu bilangan bulat t dan terpenuhi fpb(k,n) = 1 yaitu fpb(5,3) = 1 maka fpb(2,3)) = 1. Oleh karena itu, terdapat pasangan i ∈ {1, 2, …., $\emptyset(m)$} dan j ∈{1, 2, …., $\emptyset(n)$} yaitu

$$k \equiv a_i(mod\ m)$$
$$k \equiv b_j(mod\ n)$$

Dengan menggunakan pembuktian seperti diatas maka definisi tersebut terpenuhi, karena terdapat $\emptyset(m)$ yaitu $\emptyset(2) = 1$ dan $\emptyset(n)$ yaitu $\emptyset(3) = 2$ dengan pasangan (i,j) maka $\emptyset(mn)$ yaitu $\emptyset(6) = 2$ dan k adalah solusi unik artinya k solusi adalah tunggal (berdasarkan teorema sisa Cina) maka terpenuhi bahwa
$\emptyset(mn) \leq \emptyset(m)\emptyset(n)$ yaitu

$$\Leftrightarrow \emptyset(2 \cdot 3) \leq \emptyset(2)\emptyset(3)$$
$$\Leftrightarrow \emptyset(6) \leq \emptyset(2)\emptyset(3)$$
$$\Leftrightarrow \emptyset(6) \leq 1 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \emptyset(6) \leq 2$$

Maka terbukti untuk (i) bahwa $\emptyset(mn) \leq \emptyset(m)\emptyset(n)$

(ii) Untuk pasangan (i,j) dengan i ∈ {1, 2, …., $\emptyset(m)$} dan j ∈{1, 2, …., $\emptyset(n)$} dan pandang bilangan bulat k ∈{1, 2, …., mn} (berdasarkan Teorema Sisa Cina) dengan bentuk

$$k \equiv a_i(mod\ m)$$

$k \equiv b_j(mod\ n)$
Untuk memperlihatkan definisi tersebut terpenuhi yaitu jika diambil $k = 5$ dan $k = 7$, $m = 2$ dan $n = 3$ sehingga terpenuhi bahwa fpb(k,m) = 1 dan fpb(k,n) = 1. Pada pembuktian ini karena masing-masing pasangan (i,j) dengan solusi k nya adalah solusi yang berbeda maka akan terpenuhi bahwa $\emptyset(mn) \geq \emptyset(m)\emptyset(n)$. Dapat diperlihatkan sebagai berikut

$$k \equiv a_i(mod\ m)$$
$$5 \equiv a_i(mod\ 2)$$

$5 = (2) \cdot 2 + 1$
Sehingga 1 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk
$k \equiv a_i(mod\ m)$
Untuk definisi selanjutnya
$k \equiv b_i(mod\ n)$
$7 \equiv b_i(mod\ 3)$
$7 = (1) \cdot 3 + 4$
Sehingga 4 adalah sisa pembagiannya dan terpenuhi untuk
$k \equiv b_i(mod\ n)$
Karena masing-masing pasangan (i,j) dengan solusi k yang berbeda maka terpenuhi bahwa
$\emptyset(mn) \geq \emptyset(m)\emptyset(n)$
$\emptyset(2 \cdot 3) \geq \emptyset(2)\emptyset(3)$
$\Leftrightarrow \emptyset(6) \geq \emptyset(2)\emptyset(3)$

$$\Leftrightarrow \emptyset(6) \geq 1 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \emptyset(6) \geq 1 \cdot 2$$

Maka terbukti untuk (ii) bahwa $\emptyset(mn) \geq \emptyset(m)\emptyset(n)$

ISBN No. 978-623-90150-0-8

Jadi, kedua syarat tersebut sudah terpenuhi yaitu (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\emptyset(mn) = \emptyset(m)\emptyset(n)$.
dan $\emptyset(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah diatas maka dapat ditarik kesimpulan bahwa apabila pasangan (m,n) adalah bilangan bulat positif dan fpb$(m,n) = 1$ dan terpenuhi bahwa

$\emptyset(mn) \leq \emptyset(m)\emptyset(n)$ dan

$\emptyset(mn) \geq \emptyset(m)\emptyset(n)$

maka $\emptyset(mn) = \emptyset(m)\emptyset(n)$ dan $\emptyset(mn)$ merupakan fungsi multiplikatif. Sehingga terbukti bahwa karakteristik fungsi Phi Euler adalah fungsi yang multiplikatif.

5. Daftar Pustaka

Burton, D.M. (1980). *Elementary Number Theory.* University Of New Hampshire, United State of Afrika.

Stewart, B.M. (1952). *Theory of Numbers*. The Macmillan Company, New York.