

J M A P

JURNAL MATEMATIKA, APLIKASI DAN PEMBELAJARANNYA

VOLUME 2 NOMOR 1 JUNI 2003

ISSN : 1412-8632

EDISI KHUSUS

SEMINAR NASIONAL
MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
27 JUNI 2003



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2003

JMAP

JURNAL MATEMATIKA, APLIKASI DAN PEMBELAJARANNYA

ISSN : 1412-8632

Pelindung:

Dekan FMIPA Universitas Negeri Jakarta

Penanggung Jawab:

Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ

Ketua Penyunting:

Drs. Mulyono, Mkom

Wakil Ketua Penyunting:

Drs. Bambang Irawan, MSi

Sekretaris Penyunting:

Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si

Bendahara:

Ir. Fariani Hermin, MT

Penyunting Ahli:

Prof. Dr. R Santosa Murwani

Prof. Dr. A Simanungkalit, MEd

Prof. Dr. Gerardus Polla, M.Appl.Sc

Drs. Makmuri, MSi

Dra. Wardani Rahayu, MSi

Dra. Widyanti Rahayu

Sirkulator:

Ato Madsuri

Diterbitkan Oleh : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta

Alamat Redaksi : Jl. Pemuda 10 Rawamangun Jakarta Timur 13220

Telp. 021 4891689, Telp/Fax. 021 4894909

e-mail : jmap_unj@yahoo.com

<http://www.unj.ac.id>

KATA PENGANTAR

Jurnal Matematika Aplikasi dan Pembelajarannya (JMAP) merupakan kumpulan makalah terseleksi tentang Matematika dan Pendidikan Matematika yang diterbitkan oleh Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta. Jurnal ini terbit secara berkala dalam setahun. Penerbitan kali ini merupakan edisi khusus.

Semua artikel yang dimuat dalam jurnal ini adalah makalah yang masuk pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika yang diselenggarakan oleh jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta yang diadakan pada tanggal 27 Juni 2003.

Pada kesempatan ini kami sampaikan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Negeri Jakarta
2. Dekan FMIPA Universitas Negeri Jakarta
3. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta
4. Semua pihak yang telah mendukung pelaksanaan seminar ini.

Atas kerja sama yang baik dan bantuan dalam penerbitan JMAP edisi khusus ini, kami sampaikan terima kasih.

Jakarta, Juni 2003

Ketua Panitia,

KATA PENGANTAR
DAFTAR ISI

PENDIDIKAN MATEMATIKA

Optimalisasi Kemampuan Mahasiswa Mengajarkan Matematika Sekolah Melalui Pola Sinergis Clinic Supervision In Small Groups Design dalam Perkuliahan <i>Amin Suyitno</i>	1
Metode Belajar Kooperatif <i>Student Teams-Achievement Divisions</i> Sebagai Bentuk Penarapan Model Belajar Dan Pembelajaran Konstruktivis <i>Anton Noornia</i>	6
Penggunaan Segitiga Pascal pada Pengajaran Matematika <i>Bambang Herry Purwanto</i>	12
Mengajar Ketrampilan Metakognitif dalam Rangka Memperbaiki dan Meningkatkan Kemampuan Belajar matematika <i>C. Yakob</i>	17
Pembelajaran Geometri Dimensi Tiga Berbantuan Wingeom <i>D. Novi Handayani dan M. Andy Rudhito</i>	21
Aplikasi Pendekatan Kontekstual dalam Pembelajaran Statistika di Perguruan Tinggi <i>Djamilah Bondan Widjanti</i>	24
Studi Kasus Penguasaan Konsep Pecahan di Sekolah dasar Kecamatan Ciputat (Studi Kasus Penguasaan Konsep Pecahan di Sekolah Dasar Kelas V di SD Kecamatan Ciputat) <i>Djamus Widagdo</i>	28
Mewujudkan Program CAI yang Interaktif dalam Pembelajaran Matematika Menggunakan Aouthoware <i>Elang Krishnadi</i>	35
Perumahan Paradigma Mengajar ke Belajar Matematika <i>Herman Hudojo</i>	42
Variasi Proses Pembelajaran Menggunakan Transparansi Overhead Projektor (OHP) Siswa Sekolah Menengah Umum (SMU) <i>Ipar Suparyono</i>	49
Penyebaran Inovasi Pendidikan Matematika Melalui Penelitian Mahasiswa <i>Jailani</i>	51
Strategi Pembelajaran Matematika Berbasis pada Proses Dasar Ketrampilan Berpikir dalam Upaya meningkatkan Kemampuan Metakognisi Siswa (Suatu Tinjauan Teoritis) <i>Jarnawi Afgani Dahlan</i>	54
Upaya Meningkatkan Kecerdasan Emosional dalam Pembelajaran Matematika <i>Mochammad Ridho</i>	61
Pengaruh Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Pemecahan Masalah pada Siswa SLTP (Penelitian eksperimen pada siswa SLTP Negeri 14 dan 31 Kota Bandung) <i>Nanang Priatna</i>	66

Kondisi Pendidikan di Indonesia dan Kurikulum Berbasis Kompetensi <i>Rusgianto</i>	71
Implementasi Pembelajaran Matematika SD Menurut GBPP 1994 dengan KBK <i>Siti Rohmi Yuliati</i>	75
Keterlaksanaan Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan PMR di SD Percobaan 2 Yogyakarta <i>Sugiyono</i>	79
Pemanfaatan Perangkat Pembelajaran Geometri Datar di Sekolah dengan Pendekatan IBL (<i>Inquiry-Based Learning</i>) yang Berbasis pada CTL (<i>Contextual Teaching and Learning</i>) untuk Meningkatkan Minat Siswa dalam Mempelajari Geometri Datar <i>Suhito, Kumastuti</i>	84
Pemanfaatan Media Audio Visual sebagai sarana Pembelajaran Matematika <i>Sumargiyani</i>	88
Interaksi antara Pengalaman Budaya, Topangan, dan Proses Kognitif dalam Proses Reinvensi Matematika Anak <i>Susento</i>	92
Penerapan Modul Praktikum Berbasis Maple sebagai Upaya Peningkatan Mutu Pengajaran Mata Kuliah Persamaan Differensial Biasa <i>Tjang Daniel Chandra</i>	99
Evaluasi Perangkat Soal Matematika UAN; Suatu Refleksi Hasil Pembelajaran Matematika <i>Uus Kusdinar</i>	103
Pembelajaran Relasi-Fungsi dengan Model Kooperatif-Jigsaw berdasarkan KBK <i>Wahyu Setiawan</i>	109
Pembelajaran Fungsi-Fungsi Transenden : Fungsi Ekponensial dan Fungsi Logaritma dengan Bantuan Komputer <i>Yusuf Yahya</i>	114
MATEMATIKA	
Konstruksi Sistem Samar dengan ketepatan Pendekatan order Dua untuk Pendekatan Suatu Fungsi <i>Agus maman Abadi</i>	118
Penyelesaian Masalah Minimum Norm dalam Ruang Hilbert $L_2 [a, b]$ <i>Amanto, Suharsono dan Joko Waluyo</i>	124
Development of VRML Generator <i>Bachtiar Anwar</i>	131
Matriks Berpangkat untuk <i>CLIQUE</i> <i>Didit Budi Nugroho</i>	137
Teorema Pluciennik tentang Keterbatasan suatu Operator melalui Gliding Hump Method <i>Encum Sumiaty</i>	142
Integral Henstock Kurzweil pada Ruang Berdimensi-n <i>Endang Dedy</i>	147
Dua Metode Heuristik dalam Penyelesaian Masalah <i>Network Design</i> <i>Wamiliana, Eriyanto dan Dian Kurniasari</i>	153

Digraf Eksentris dari Turnamen Kuat <i>Hazrul Iswadi</i>	158
Tinjauan Tentang Sifat Titik-Titik Sekawan Harmonis <i>Himmawati Puji Lestari</i>	163
Penomoran Graf <i>Heri Sutarno</i>	167
Penyelidikan Irisan Kerucut Cara Boostra <i>Ibnu Ngatoillah</i>	172
Penentuan Minimum-Maksimum pada Beberapa Hasil Prediksi Bilangan Bintik Matahari <i>John Maspupu</i>	178
Relasi Ekuivalensi Green pada Semigrup Transformasi Linear <i>Karyati</i>	182
Logika Kombinasi untuk Kode Konversi dan Dekoder <i>Makmuri</i>	185
Gradient Garis Singgung Titik $P(x_1, y_1)$, pad Kurva Irisan Kerucut <i>Midjan</i>	190
Pemilihan Ciri Dengan Algoritma SFFS Pada Data Citra Radar Skala Kecil <i>Mulyono, Aniati Murni</i>	196
Karakterisasi Ekuivalensi Morita <i>Rini Oktavia</i>	206
Ruang Barisan λ_p <i>Uswatun Khasanah</i>	212
Greedy Heuristik dalam Penyelesaian Mixed Chinese Postman Problem <i>Wamiliiana dan Nun Hayati</i>	218
Aplikasi Konggruensi <i>Wardani Rahayu</i>	223
STATISTIKA	
Metode Percobaan Laboratorium dalam Penelitian Sosial <i>Bahriddin Abapihi</i>	228
Peramalan Indeks Saham Nikkei 225 dengan Pendekatan Fungsi Transfer <i>Brodjol Sutijo</i>	236
Analisis Faktor (Konsep dasar dan Interpretasinya) <i>Busnawir</i>	241
Keluarga Distribusi Eksponensial Kanonik dengan Fungsi Varians Kuadratis <i>Dadang Juandi</i>	246
Model Ammi Campuran untuk Memprediksi Daya Hasil Interaksi Genotip Tanaman Padi dan Lingkungan pada Percobaan Lokasi Ganda <i>Endang Wahyuningrum</i>	250
False Alarm Signals, How To Reduce Them In Making A Shewhart Control Chart: A Case Study <i>I Nyoman Arcana</i>	261

Model Kombinasi Tren Deterministik-Stokastik <i>M. Sjahid Akbar</i>	267
Memilih Uji Statistik pada Penelitian Kuantitatif <i>Moh Shae'fur Rokhman</i>	272
Ketegaran (Robustness) Metode ESACF (<i>Extended Sample Autocorrelation Function</i>) untuk Identifikasi Model AR(1) Stasioner <i>R Mohamad Atok</i>	276
Estimasi Standar Error dalam Bootstrap <i>Ratna Widyati</i>	282
Penyelesaian Masalah Kuadrat Terkecil (<i>Least Square</i>) untuk Persamaan Regresi Linear dengan Matriks Kebalikan Semu (<i>Pseudoinverse</i>) <i>Ratnaningsih</i>	287
Penerapan Metode Penyederhanaan Model pada Non Full Column Rank Model <i>Restu Arisanti dan Mustofa Usman</i>	291
Analisis Beberapa Model Regresi Linear <i>Sari Herawati, Mustofa Usman</i>	298
Analisis Bayes pada Model Regresi <i>Setiawan dan Khairil Anwar Notodipuro</i>	304
Regresi Terhadap Koefisien Fourier dalam Kalibrasi <i>Sony Sunaryo dan Khairil Anwar Notodipuro</i>	310
Cara Mengatasi Efek Multikolinieritas <i>Soekardi Hadi P</i>	316
Sifat-Sifat Asimtotik sebuah Versi dari Proses Renewal Reward <i>Suyono</i>	318
Ekspektasi Biaya Rata-Rata Inventori Melalui Proses Markov Chain <i>Thomas J. Kakiay</i>	322
Mean Model Analisis dan Aplikasinya pada Unbalanced Data <i>Tuti Ariyani dan Mustofa Usman</i>	328
Pendugaan Parameter dengan Metode Bayes <i>Widyanti Rahayu</i>	336
Penerapan Model NonLinear PLS dengan Jaringan Syaraf Tiruan dalam Kalibrasi <i>Anik Djuraidah</i>	339

ANALISIS BEBERAPA MODEL REGRESI LINEAR

Sari Herawati, Mustofa Usman
Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung

ABSTRAK

Pada paper ini akan dibahas analisis beberapa model regresi. Dari parameter model-model regresi akan ditunjukkan bagaimana membentuk selang dugaan ratio beberapa parameter model regresi dengan menggunakan Teorema Fieller. Kemudian uji hipotesis untuk kesamaan parameter model regresi akan disajikan, beta hat model (Milliken dan Johnson, 2002) akan digunakan dalam pembentukan uji statistik.

I. PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah salah satu metode statistika yang banyak digunakan untuk membangun model hubungan antara beberapa variabel. Pemakaian regresi hampir disemua bidang keilmuan diantaranya dalam bidang ekonomi, bisnis, teknik, kedokteran dan lain sebagainya. Kenyataannya, analisis regresi adalah merupakan analisis statistika yang paling banyak digunakan.

Dalam pemakaian analisis regresi, kita sering menggunakannya sebagai alat perbandingan atau efisiensi suatu kegiatan. Misalnya, membandingkan model dari beberapa promosi dengan volume penjualan, yang masing-masing model promosi dapat dimodelkan dengan analisis regresi.

Tulisan ini mencoba untuk membangun beberapa model analisis regresi, dan kemudian akan dibahas beberapa kajian yang diperlukan antara lain menguji model, apakah berbeda atau tidak, membuat selang dugaan beberapa parameter, kemudian membuat selang dugaan untuk ratio beberapa parameter yang ada pada model-model regresi.

II. PEMBENTUKAN SELANG DUGAAN RATIO DUA PARAMETER DARI DISTRIBUSI NORMAL

Teorema Fieller memberikan secara luas prosedur umum untuk pendugaan ratio dua parameter pada populasi yang berdistribusi normal. Teorema Fieller merupakan bentuk khusus dari model linear umum. Konsekuensi praktisnya adalah bahwa sebagian besar aplikasi dari teorema Fieller adalah untuk menduga ratio kombinasi linear dari parameter-parameter model, yang mana terutama dalam hal model linear umum dan uji berlakunya beberapa model dan dapat juga menghitung batas-batas kepercayaan.

TEOREMA FIELLER

Misal

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \right],$$

dimana α, β, σ^2 adalah parameter yang tidak diketahui dan v_{11}, v_{12}, v_{22} adalah diketahui. Maka batas-batas kepercayaan $A(1 - \alpha)100\%$ dari ρ , yang mana $\rho = \alpha / \beta$ diduga oleh $m = a / b$, adalah:

$$m - k^2 v_{12} \pm k [v_{11} - 2m v_{12} + m v_{22} + k^2 (v_{12}^2 - v_{11} v_{22})]^{1/2} / (1 - k^2 v_{22})$$

dimana $k = s t / b$, $s^2 = \hat{\sigma}^2$ dengan derajat bebas f , $t_f = t_{\alpha/2}$ dengan derajat bebas f , dan s^2 dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah variabel acak bebas.

Bukti.

Diketahui $\rho = \alpha / \beta$ maka $\alpha - \rho\beta = 0$, $E(a) = \alpha$, dan $E(b) = \beta$.

Sehingga

$$(a - \rho b) \sim N \left[\alpha - \rho\beta, \sigma^2 (1 - \rho) \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho \end{pmatrix} \right]$$

Misal ada vektor $A = (1, -\rho)$, dan $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka :

$$\text{Cov } AX = A \text{cov}(X) A'$$

$$= A V A'$$

$$= (1, -\rho) \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho \end{pmatrix}$$

$$= v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})$$

σ^2 diduga oleh s^2 sehingga: $\text{Var}(X) = s^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})$.

Oleh karena itu:

$$\frac{a - \rho b}{s\sqrt{v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}}} \sim t_f \text{ (berdistribusi } t \text{ dengan derajat bebas } f).$$

Jika $E(a - \rho b) = 0$, $V(a - \rho b) = s^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})$, maka:

$$P\left[\left|\frac{a - \rho b}{s\sqrt{v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}}}\right| \leq t_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\left(\frac{a - \rho b}{s\sqrt{v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}}}\right)^2 \leq t^2_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$\frac{(a - \rho b)^2}{s^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})} \leq t^2_{\alpha/2}$$

$$\frac{(a - \rho b)^2}{b^2} \leq \frac{t^2 s^2}{b^2} (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})$$

substitusikan $m = a/b$ ke persamaan diatas, maka:

$$(m - \rho)^2 \leq \frac{t^2 s^2}{b^2} (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22})$$

$$(m - \rho)^2 \leq k^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}), \text{ dimana } k = s t / b$$

$$(m - \rho)^2 - k^2 (v_{11} - 2\rho v_{12} + \rho^2 v_{22}) \leq 0$$

$$m^2 - 2\rho m + \rho^2 - k^2 v_{11} + 2k^2 \rho v_{12} - k^2 \rho^2 v_{22} \leq 0$$

$$\rho^2 (1 - k^2 v_{22}) - \rho(2m - 2k^2 v_{12}) + m^2 k^2 v_{11} = 0$$

Dengan menggunakan rumus untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$\rho = (m - k^2 v_{12}) \pm k \sqrt{(v_{11} - 2m v_{12} + m^2 v_{22} + k^2 (v_{12}^2 - v_{11} v_{22})) / (1 - k^2 v_{22})}$$

$$\rho = (m - k^2 v_{12}) \pm k [v_{11} - 2m v_{12} + m^2 v_{22} + k^2 (v_{12}^2 - v_{11} v_{22})]^{1/2} / (1 - k^2 v_{22})$$

Teorema Fieller ini yang nanti akan digunakan untuk mencari selang dugaan dari beberapa ratio parameter.

III. BEBERAPA MODEL REGRESI

Dengan tidak mengurangi keumumannya, kita misalkan, kita mempunyai model regresi:

$$Y_{1j} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1j} + \gamma_1 X_{1j}^2 + \varepsilon_{1j}$$

$$Y_{2j} = \alpha_2 + \beta_2 X_{2j} + \gamma_2 X_{2j}^2 + \varepsilon_{2j} \quad \text{dan}$$

$$Y_{3j} = \alpha_3 + \beta_3 X_{3j} + \gamma_3 X_{3j}^2 + \varepsilon_{3j}$$

Asumsikan $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ untuk semua j dan independen.

Untuk analisis data banyak yang dapat dilakukan, yaitu antara lain pendekatan matriks terhadap regresi linear (Draper dan Smith, 1981). Pendekatan lain yang dapat kita lakukan adalah membentuk model berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ : \\ Y_{1n} \\ Y_{21} \\ : \\ Y_{2n} \\ Y_{31} \\ : \\ Y_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & X_n & X_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & X_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_n & X_n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & X_1^2 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_n & X_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \varepsilon^*$$

Yang dapat juga kita tulis dengan:

$$Y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^* \quad (1)$$

dimana

$$Y^* = (Y_{11} \ Y_{12} \ \dots \ Y_{1n} \ Y_{21} \ Y_{22} \ \dots \ Y_{2n} \ Y_{31} \ Y_{32} \ \dots \ Y_{3n})'$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 1 & X_n & X_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & X_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_n & X_n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & X_1^2 \\ : & : & : & : & : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_n & X_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan} \quad \beta^* = (\alpha_1 \ \beta_1 \ \gamma_1 \ \alpha_2 \ \beta_2 \ \gamma_2 \ \alpha_3 \ \beta_3 \ \gamma_3)'$$

diasumsikan bahwa $\varepsilon^* \sim N(0, \sigma^2 I_{3n})$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa:

$$E(Y^*) = E(X^* \beta^* + \varepsilon^*)$$

$$= X^* \beta^*, \text{ karena } E(\varepsilon^*) = 0$$

$$\text{Var}(Y^*) = \text{Var}(X^* \beta^* + \varepsilon^*)$$

$$= \text{Var}(\epsilon^*) = \sigma^2 I_{3n}, \text{ karena } \text{Var}(X^* \beta^*) = 0$$

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}^*) = (X^{*'} X^*)^{-1} \sigma^2$$

Banyak analisis yang dapat kita lakukan untuk model (1) diatas, berikut ini akan disajikan beberapa analisis dan sekaligus aplikasi dari teorema Fieller diatas, serta uji hipotesis.

1. Menentukan selang dugaan untuk $\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1}$

Jika kita nyatakan dalam bentuk matriks, maka:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\beta}^* \\ &= H \hat{\beta}^* \end{aligned}$$

sehingga:

$$\text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \text{Var}(H \hat{\beta}^*) = H \text{Var}(\hat{\beta}^*) H' = \sigma^2 H (X^{*'} X^*)^{-1} H'$$

Jadi

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \sigma^2 H (X^{*'} X^*)^{-1} H' \right]$$

Sekarang kita ingin menduga ratio $\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1}$, maka ada matriks H_1 sedemikian rupa sehingga

$$H_1 \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix}$$

dan diperoleh matriks $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} &= \text{Var}(H_1 \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix}') \\ &= H_1 \text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix}' H_1' \\ &= H_1 H (X^{*'} X^*)^{-1} H' \sigma^2 H_1' \\ &= \sigma^2 H_1 H (X^{*'} X^*)^{-1} H' H_1' \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \sigma^2 H_1 H (X^{*'} X^*)^{-1} H' H_1' \right]$$

Kita misalkan $H_1 H (X^{*'} X^*)^{-1} H' H_1' = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \right]$$

Kemudian, untuk menentukan selang kepercayaan bagi dugaan ratio parameter $\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1}$, digunakan

teorema

Fieller, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, yaitu

$$m - k^2 v_{12} \pm k [v_{11} - 2m v_{12} + m^2 v_{22} + k^2 (v_{12}^2 - v_{11} v_{22})]^{1/2} / (1 - k^2 v_{22})$$

dimana dalam hal ini $m = \frac{\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}$, $k = \frac{st}{\hat{\alpha}_1}$, $s^2 = \hat{\sigma}^2$ dan $t_f = t_{\alpha/2}$ dengan derajat bebas f .

2. Untuk menguji hipotesis $H_0 : \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = h$, kita lakukan langkah-langkah berikut ini:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\beta}^*$$

$$= G \hat{\beta}^*$$

dengan

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \end{pmatrix} &= \text{Var} (G \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix}) \\ &= G \text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 & \hat{\gamma}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & \hat{\gamma}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix} G' \\ &= \sigma^2 G (X^{*'} X^*)^{-1} G' \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 - \hat{\beta}_2 \\ \hat{\alpha}_3 - \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \end{pmatrix}, \sigma^2 G (X^{**'} X^{**})^{-1} G' \right]$$

Untuk menguji hipotesis $H_0 : \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = h$, kita dapat menggunakan beta hat model (lihat, Milliken dan Johnson, 2002), yaitu bahwa:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 - \hat{\beta}_2 \\ \hat{\alpha}_3 - \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 \end{pmatrix} + \varepsilon^{**}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{h} + \varepsilon^{**}$$

Yang dapat juga ditulis dengan:

$$(2) \quad Y = X \underline{h} + \varepsilon^{**}$$

Asumsikan $\varepsilon^{**} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 C)$, dengan $C = G (X^{**'} X^{**})^{-1} G'$

Kita dapat menuliskan secara umum uji hipotesisnya dengan:

$$H_0 : G\beta = h \text{ dan alternatifnya } H_a : G\beta \neq h$$

Dimana kombinasi linear $G\beta$ adalah adalah fungsi yang dapat diduga dari β , G adalah $q \times p$ matriks dengan rank q , dan h adalah $q \times 1$ vektor.

Maka uji hipotesis statistiknya adalah:

$$F_c = \frac{SSH_0 / q}{\hat{\sigma}^2}$$

yang berdistribusi F dengan derajat bebas $[q; q; N - t(r+1)]$, dimana:

$$SSH_0 = Y'(C^{-1} - C^{-1}G(G'C^{-1}G)^{-1}GC^{-1})Y$$

Kriteria uji: Tolak H_0 jika $F_c > F_{[\alpha; q; 3n-9]}$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Cox, D.R. 1967. Fieller's Theorem and Generalization. *Biometrics*. Vol 54, pp. 567.
2. Draper, N.R. and H. Smith. 1981. *Applied Regression Analysis*. New York.: John Wiley & Sons Inc.
3. Milliken, G.A. and Johnson, D.E. 1992. *Analysis of Messy Data*. New York : Van Nostrand Reinhold.
4. Milliken, G.A. and Johnson, D.E. 2002. *Analysis of Messy Data*. Volume III : Analysis of Covariance New York : Chapman & Hall.
5. Raftery, A.E. and Schweder, T. 1993. Inference about the ratio of Two Parameters, With Application to Whale Censusing. *The American Statistician*. Vol 47, pp.259 – 263.
6. Saha, G.M. 2002. Design and Analysis for Bioassays. *Design Workshop Lecture Notes*. Pp. 61 – 76.
7. Usman, M. dan Warsono. 2003. *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Bandung : Sinar Baru.
8. Usman, M. 2001. *Model Linear Terapan*. Universitas Lampung. Bandar Lampung.
9. Zerbe, G.O. 1978. On Fieller's Theorem and General Linear Model. *The American Statistician*. Vol 32 pp.103 – 105.